VILNIAUS UNIVERSITETAS

DMITRIJ MOCHOV

UNIVERSALUMO TEOREMOS PERIODINEI HURVICO DZETA FUNKCIJAI

Daktaro disertacijos santrauka

Fiziniai mokslai, matematika (01P)

Vilnius, 2018

Disertacija rengta 2014–2018 metais Vilniaus universitete.

Mokslinis vadovas:

Prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas

(Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Mokslinis konsultantas:

Prof. dr. Ramūnas Garunkštis

(Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Disertacija ginama viešame disertacijos Gynimo tarybos posėdyje:

Pirmininkas:

Prof. habil. dr. Eugenijus Manstavičius

(Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Nariai:

Dr. Natalija Budarina (Dundalk technologijos universitetas, Airija, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Prof. dr. Paulius Drungilas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Prof. dr. Konstantinas Pileckas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Prof. dr. Artūras Štikonas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Disertacija bus ginama viešame Gynimo tarybos posėdyje 2018 m. spalio 4 d. 16 val. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultete, 102 auditorijoje.

Adresas:

Naugarduko g.24, LT 03225, Vilnius, Lietuva.

Disertacijos santrauka išplatinta 2018 m. rugsėjo 3d. Su disertacija galima susipažinti Vilniaus universiteto bibliotekoje ir VU interneto svetainėje adresu:

www.vu.lt/naujienos/ivykiu-kalendorius

VILNIUS UNIVERSITY

DMITRIJ MOCHOV

UNIVERSITY THEOREMS FOR PERIODIC HURWITZ ZETA FUNCTION

Summary of Doctoral Dissertation

Physical sciences, Mathematics (01P)

Vilnius, 2018

The scientific work was carried out at Vilnius University in 2014–2018.

Scientific supervisor:

Prof. Dr. Habil. Antanas Laurinčikas

(Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

Scientific adviser:

Prof. Dr. Ramūnas Garunkštis

(Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

The dissertation is being defended in the public meeting of the Thesis council:

Chairman:

Prof. Dr. Habil. Eugenijus Manstavičius

(Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

Members:

Dr. Natalija Budarina (Dundalk Institute of Technology, Ireland, Physical sciences, Mathematics – 01P)

Prof. Dr. Paulius Drungilas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

Prof. Dr. Konstantinas Pileckas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

Prof. Dr. Artūras Štikonas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

The dissertation will be defended at the public meeting of the Thesis council on October 4, at 4 pm, 2018, in Vilnius University, Department of Mathematics and Informatics, room 102.

Address:

Naugarduko str. 24, LT 03225, Vilnius, Lithuania.

The summary of the dissertation was distributed on September 3, 2018. The dissertation is available at the library of Vilnius University and at VU website address:

www.vu.lt/naujienos/ivykiu-kalendorius

Tyrimo objektas

Disertacijoje yra nagrinėjama periodinė Hurvico (Hurwitz) dzeta funkcija. Tegul $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis, α, $0 < \alpha \leq 1$ yra fiksuotas parametras, o $\mathfrak{a} = \{a_m : m \in \mathbb{N}_0\}, \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, yra periodinė kompleksinių skaičių seka su minimaliuoju periodu $q \in \mathbb{N}$. Periodinė Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė (Dirichlet) eilute

$$\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(m+\alpha)^s}.$$

Kai $a_m \equiv 1$, ši funkcija tampa klasikine Hurvico dzeta funkcija

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+\alpha)^s}, \sigma > 1,$$

kuri yra meromorfiškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, kurioje turi vienintelį paprastąjį polių taške $s = 1$ su reziduumu 1. Iš sekos $\mathfrak{a}$ periodiškumo išplaukia, kad srityje $\sigma > 1$

$$\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a}) = \frac{1}{q^s} \sum_{l=0}^{q-1} a_l \zeta\Big(s, \frac{l+\alpha}{q}\Big).$$

Ši lygybė ir funkcijos $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})$ savybės duoda funkcijos $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})$ analizinį pratęsimą į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus tašką $s = 1$, kuris yra paprastasis polius su reziduumu

$$\hat{a} \stackrel{def}{=} \frac{1}{q} \sum_{l=0}^{q-1} a_l.$$

Jei $\hat{a} = 0$, tuomet periodinė Hurvico dzeta funkcija yra sveikoji.

Funkcija $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})$ susijusi ir su kita klasikine dzeta funkcija - Lercho (Lerch) dzeta funkcija. Tegul $\lambda \in \mathbb{R}$. Tuomet Lercho dzeta funkcija $L(\lambda, \alpha, s)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$L(\lambda, \alpha, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda m}}{(m+\alpha)^s}.$$

Kai $\lambda \in \mathbb{Z}$, tada funkcija $L(\lambda, \alpha, s)$ tampa Hurvico dzeta funkcija. Jei $\lambda \notin \mathbb{Z}$, tada funkcija $L(\lambda, \alpha, s)$ yra sveikoji. Kai λ yra racionalus parametras, tarkime, $\lambda = \frac{a}{b}, (a, b) = 1$, tuomet seka $\{e^{2\pi i \frac{a}{b} m}\}$ yra periodinė su periodu b. Taigi, Lercho dzeta funkcija su racionaliuoju parametru $\lambda \notin \mathbb{R}$ yra atskiras periodinės Hurvico dzeta funkcijos atvejis.

Periodinė Hurvico dzeta funkcija buvo apibrėžta ir pradėta nagrinėti [7] straipsnyje.

Tikslas ir uždaviniai

Darbo tikslas yra periodinės Hurvico dzeta funkcijos universalumo, t.y. analizinių funkcijų, apibrėžtų kritinėje juostoje, aproksimavimo postūmiais $\zeta(s+i\tau,\alpha;\mathfrak{a})$, tyrimas, o uždaviniai yra šie:

1. Tolydžiosios universalumo teoremos išplėtimas funkcijai $\zeta(s,\alpha;\mathfrak{a})$ su transcendenčiuoju parametru α.
2. Diskrečiosios universalumo teoremos išplėtimas funkcijai $\zeta(s,\alpha;\mathfrak{a})$ su transcendenčiuoju parametru α.
3. Tolydžiosios ir diskrečiosios universalumo teoremos funkcijos $\zeta(s,\alpha;\mathfrak{a})$ kompozicijoms.
4. Funkcijos $\zeta(s,\alpha;\mathfrak{a})$ nulių skaičiaus įverčiai.

Aktualumas

Dzeta funkcijų universalumas turi didelę įtaką analizinių funkcijų artiniams. Dzeta funkcijos paprastai yra aproksimuojamos tam tikru tikslumu Dirichlė polinomais, t.y., baigtinėmis trigonometrinėmis sumomis. Todėl dzeta funkcijų universalumo teoremos sudaro sąlygas sudėtingų analizinių funkcijų aproksimavimą pakeisti aproksimavimą baigtinėmis trigonometrinėmis sumomis, kurios palyginti yra nesudėtingos funkcijos. Minėta procedūra nurodo kelią sudėtingų analizinių funkcijų įverčiams gauti. Pavyzdžiui, tokį kelią fizikai pritaikė kvantinės mechanikos integralų pagal sudėtingas analizines kreives įverčiams gauti. Taigi, dzeta funkcijų universalumo teoremos turi ir nemažą praktinę naudą, kas, žinoma, rodo, jog reikia plėsti naujų dzeta funkcijų klasių universalumo tyrimus. Kadangi periodinės Hurvico dzeta funkcijos išplečia Hurvico ir Lercho dzeta funkcijų klases, jų universalumo teoremos yra ženklus indėlis į aproksimavimo teoriją.

Universalumo teoremos periodinėms Hurvico dzeta funkcijoms turi ir visą eilę teorinių taikymų. Jos gali būti naudojamos plačios dzeta funkcijų klasės funkcinio nepriklausomumo įrodymui,
kuris glaudžiai siejasi su viena Hilberto (Hilbert) hipoteze apie kai kurių Dirichlė eilučių algebrinį-diferencialinį neprilausomumą. Be to, universalumo teoremos turi savyje informaciją apie dzeta funkcijų be Oilerio (Euler) sandaugos nulių pasiskirstymą. Todėl galima gauti periodinių Hurvico dzeta funkcijų nulių skaičiaus įverčius.

Apskritai, dzeta funkcijų universalumo tyrimas yra viena iš pripažintos pasaulyje Lietuvos skaičių teorijos mokyklos produktyviausių krypčių. Tai irgi rodo disertacijos temos aktualumą.

Metodai

Universalumo teoremų periodinėms Hurvico dzeta funkcijoms įrodymai remiasi tikimybinėmis ribinėmis teoremomis apie silpnai konverguojančius tikimybinius matus analizinių funkcijų erdvėje. Šis įrodymo kelias apima Furjė (Fourier) transformacijų metodą, Prochorovo teoriją apie tikimybinių matų šeimų suspaustumą ir reliatyvųjį kompaktiškumą bei ergodinės teorijos elementus. Be to, įrodymuose svarbų vaidmenį atlieka Mergeliano (Mergalyan) teorema apie analizinių funkcijų aproksimavimą polinomais. Nulių skaičiaus įverčiams gauti yra naudojama klasikinė Rušė (Rouché) teorema.

Naujumas

Visi disertacijos rezultatai yra nauji. Kai kurios universalumo teoremos funkcijai $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})$ išplečia parametro α reikšmių klasę. Nulių skaičiaus įverčių teoremos funkcijai $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})$ nebuvo niekada įrodinėjamos.

Problemos istorija ir rezultatai

Dzeta funkcijų universalumo problema siejama su S. M. Voronino vardu. Jis prieš beveik 45 metus atrado Rymano dzeta funkcijos $\zeta(s)$ universalumą. Primename, kad $\zeta(s) = \zeta(s, 1; \{1\})$. Voroninas įrodė tokią teoremą.

A teorema. *Tegul* $0 < r < \frac{1}{4}$. *Tarkime, kad funkcija* $f(s)$ *yra tolydi, nevirstanti nuliumi skritulyje* $|s| \leq r$ *ir analizinė jo viduje. Tuomet kiekvieną* $\varepsilon > 0$ *atitinka toks realusis skaičius* $\tau = \tau(\varepsilon)$, *su kuriuo yra teisinga nelygybė*

$$\max_{|s| \leq r} \left| \zeta(s + \frac{3}{4} + i\tau) - f(s) \right| < \varepsilon.$$

Ši teorema rodo, kad plati analizinių funkcijų klasė norimu tikslumu yra aproksimuojama tos pačios funkcijos $\zeta(s)$ postūmiais. Tai yra Voronino universalumo esmė.

Pastebime, kad pirmąjį universalų analizinį objektą praėjusio amžiaus pradžioje sukonstravo M. Feketė (Fekete). Jis įrodė, kad egzistuoja tokia realioji laipsninė eilutė

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m,$$

kad kiekvieną tolydžiąją funkciją $g(x), g(0) = 0$, atitinka tokia sveikųjų teigiamųjų skaičių didėjanti seka $\{n_k\}$, jog tolygiai pagal $x \in [-1, 1]$

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{m \leq n_k} a_m x^m = g(x).$$

Tačiau tokios eilutės išreikštinis pavidalas nebuvo nurodytas, Feketė įrodė tik jos egzistavimą.

Po Feketės rezultato įvairūs autoriai, tarp jų G. D. Birkhofas (Birkhoff), J. Marcinkievičius (Marcinkiewitz), atrado universalius objektus, tačiau visi tie objektai, kaip ir Feketės laipsninė eilutė, neturėjo išreikštinio pavidalo. Taigi, Rymano dzeta funkcija yra pirmasis konkretus universalus analizinis objektas.

A teorema yra gilus analizinės skaičių teorijos rezultatas, todėl nėra nuostabu, kad ji atkreipė skaičių teorijos specialistų dėmesį. Įvairūs autoriai surado bendresnį A teoremos pavidalą. Tegu $D = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$, t.y., D yra dešinioji kritinės juostos pusė, $\mathcal{K}$ yra juostos D kompaktinių aibių su jungiaisiais papildiniais klasė, o $H_0(K)$, $K \in \mathcal{K}$, yra tolydžiųjų, nevirstančių nulimi aibėje K ir analizinių jos viduje funkcijų klasė. Be to, tegul $\operatorname{meas} A$ yra mačios aibės $A \in \mathbb{R}$ Lebego matas. Tuomet šiuolaikinė Voronino teorema turi tokį pavidalą [6].

B teorema. *Tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H_0(K)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\Big\{\tau \in [0;T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon\Big\} > 0.$$

Teoremos nelygybė rodo, kad aibė postūmių $\zeta(s+i\tau)$, aproksimuojančių duotąją analizinę funkciją $f(s) \in H_0(K)$ ε tikslumu turi teigiamą apatinį tankį. Taigi, ši postūmių aibė yra begalinė. Be to, skirtingai nuo A teoremos, analizinės funkcijos yra tolygiai aproksimuojamos bendresnėse kompaktinėse aibėse negu skrituliai.

Po Voronino atradimo pasirodė, kad ir kai kurios kitos dzeta ir L funkcijos taip pat pasižymi Voronino tipo universalumu. Taigi, Dirichlė L funkcijos, algebrinių kūnų Dedekindo dzeta funkcijos, Hekės (Hecke) parabolinių formų dzeta funkcijos, Selbergo klasės L funkcijos bei kai kurios kitos dzeta ir L funkcijos yra universalios Voronino prasme. Paminėtos dzeta ir L funkcijos turi bendrą bruožą - jos yra išreiškiamos ir Oilerio (Euler) tipo begaline sandauga pagal pirminius skaičius. Pavyzdžiui, Rymano dzeta funkcija pusplokštumėje $\sigma > 1$ turi Oilerio sandaugą

$$\zeta(s) = \prod_p \Big(1 - \frac{1}{p^s}\Big)^{-1}$$

pagal pirminius p. Yra pagrindo manyti, kad dzeta funkcijų su Oilerio sandauga postūmiai gali aproksimuoti tik nevirstančias nuliumi analizines funkcijas.

Yra kita dzeta funkcijų be Oilerio sandaugos klasė, kurios funkcijos yra universalios šiek tiek kitokia prasme. Disertacijoje nagrinėjama periodinė Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})$ bendruoju atveju neturi Oilerios sandaugos. Paprasčiausia dzeta funkcija be Oilerio sandaugos yra Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha)$. Ji turi Oilerio sandaugą tik dviems parametro α reikšmėms: $\zeta(s, 1) = \zeta(s)$ ir

$$\zeta\Big(s, \frac{1}{2}\Big) = (2^s - 1)\zeta(s).$$

Funkcijų $\zeta(s, \alpha)$ ir $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})$ atveju aproksimuojamų funkcijų klasė $H_0(K)$, $K \in \mathcal{K}$, yra pakeičiama platesne tolydžiųjų aibėje K ir analizinių jos viduje funkcijų klase $H(K), K \in \mathcal{K}$. Paprasčiausias yra transcendenčiojo parametro α atvejis. Primename, jos α yra transcendentusis skaičius, jei nėra jokio polinomo $p(s) \not\equiv 0$ su racionaliasiais koeficientais, kurio šaknimi būtų α. Pirmoji universalumo teorema periodinei Hurvico dzeta funkcijai buvo įrodyta [5] darbe ir yra formuluojama taip.

C teorema. *Tarkime, kad α yra transcendentusis skaičius. Tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H(K)$. Tada su kiekvienu $\varepsilon > 0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K}\left|\zeta(s+i\tau,\alpha;\mathfrak{a}) - f(s)\right| < \epsilon\right\} > 0.$$

Disertacijoje C teoremos sąlyga, kad α yra transcendentusis skaičius, yra pakeičiama silpnesniu reikalavimu. Apibrėžiame aibę

$$L(\alpha) = \{\log(m+\alpha) : m \in \mathbb{N}_0\}.$$

Tuomet 1 disertacijos skyriuje gautas toks tvirtinimas.

1.1 teorema. *Tarkime, kad aibė $L(\alpha)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$. Tegul $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H(K)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K}\left|\zeta(s+i\tau,\alpha;\mathfrak{a}) - f(s)\right| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Remiantis transcendenčiojo skaičiaus apibrėžimu, nesunku patikrinti, kad aibė $L(\alpha)$ su transcendenčiuoju α yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$. Iš kitos pusės, nėra žinoma nė vieno netranscendenčiojo skaičiaus $\alpha, 0 < \alpha \leq 1$, kuriam aibė $L(\alpha)$ būtų tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$. Tačiau pagal žinomą Kaselso (Cassels) teoremą [2] tokie skaičiai, gal būt, egzistuoja. Primename, kad α yra algebrinis skaičius, jei jis yra kurio nors polinomo $p(s) \not\equiv 0$ su racionaliaisiais koeficientais šaknis. Pavyzdžiui, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ yra algebrinis skaičius, nes jis yra polinomo $2s^2 = 1$ šaknis. Visi racionalieji skaičiai yra algebriniai. Kaselso teorema tvirtina, kad bent 51% aibės $L(\alpha)$ elementų tankio prasme su algebriniu iracionaliuoju α yra tiesiškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$. Taigi, gali būti, kad aibė $L(\alpha)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$ su kuriuo nors algebriniu iracionaliuoju α.

Racionaliojo parametro α atvejis yra sudetingesnis už transcendenčiojo α atvejį. Disertacijoje įrodyta tokia universalumo teorema. Primename, kad q yra sekos $\mathfrak{a}$ periodas, o skaičiaus q radikalas yra skirtingų skaičiaus q daliklių sandauga, t.y.

$$\operatorname{rad}(q) = \prod_{p|q} p.$$

Sąlyga, kad $\operatorname{rad}(q)$ dalija b reiškia, kad kiekvienas pirminis q daliklis dalija b.

1.2 teorema. *Tarkime, kad $\alpha = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{N}, a < b, (a,b) = 1, b \neq 2$ ir $\operatorname{rad}(q)$ dalija b. Tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H(K)$. Tuomet, su kiekvienu $\varepsilon > 0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K}\left|\zeta(s+i\tau,\frac{a}{b};\mathfrak{a}) - f(s)\right| < \varepsilon\right\} > 0.$$

1.2 teoremą Hurvico dzeta funkcijai (šiuo atveju $a_m \equiv 1, q = 1$ ir $\alpha \neq 1, \frac{1}{2}$) įrodė B. Bagčis (Bagchi) [1] ir S. M. Gonekas (Gonek)[4].

B, 1.1 ir 1.2 teoremos yra vadinamos tolydžiosiomis universalumo teoremomis, nes τ postūmiuose $\zeta(s+i\tau)$ ir $\zeta(s+i\tau,\alpha;\mathfrak{a})$ gali įgyti bet kurias realiąsias reikšmes. Jei τ postūmiuose įgyja reikšmes iš kurios nors diskrečiosios aibės, tai tuomet turime diskrečiąsias universalumo teoremas. Diskrečiąsias universalumo teoremas dzeta funkcijoms pasiūlė A. Reichas (Reich) [17]. Jis įrodė diskrečiąsias universalumo teoremas algebrinių skaičių kūnų $\mathbb{K}$ Dedekindo dzeta funkcijoms $\zeta_{\mathbb{K}}(s)$. Pusplokštumėje $\sigma > 1$ funkcija $\zeta_{\mathbb{K}}(s)$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta_{\mathbb{K}}(s) = \sum_{I \subset O_{\mathbb{K}}} \frac{1}{(N(I)^s},$$

čia I perbėga kūno $\mathbb{K}$ sveikųjų skaičių žiedo $O_{\mathbb{K}}$ nenulinius idealus, o $N(I)$ yra idealo I norma. Be to, funkcija $\zeta_{\mathbb{K}}(s)$ yra meromorfiškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą su vieninteliu paprastuoju poliumi taške $s = 1$.

Reichas nagrinėjo atvejį, kai τ įgyja reikšmes iš aritmetinės progresijos $\{kh : k \in \mathbb{N}_0\}$ su fiksuotu parametru $h > 0$. Šiuolaikinė Reicho teoremos versija yra tokia ($\#A$ yra aibės A elementų skaičius ir $N \in \mathbb{N}_0$).

D teorema. *Tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H_0(K)$. Tuomet su kiekvienu $\epsilon > 0$ ir $h > 0$,*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \Big\{ 0 \le k \le N : \sup_{s \in K} \Big| \zeta_{\mathbb{K}}(s + ikh) - f(s) \Big| < \epsilon \Big\} > 0.$$

Pastebime, kad atveju $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ D teorema yra B teoremos diskretusis analogas Rymano dzeta funkcijai.

Pirmąją diskrečiąją universalumo teoremą Hurvico dzeta funkcijai $\zeta(s, \alpha)$ su racionaliuju parametru α savo disertacijoje [1] įrodė Bagčis. Transcendenčiojo paramtero α atvėjis yra sudetingesnis, ir Hurvico dzeta funkcijai buvo reikalaujama skaičiaus $\exp\left\{\frac{2\pi}{h}\right\}$ racionalumo. Panaši sitauacija yra ir periodinės Hurvico dzeta funkcijos atveju [13]. Yra žinoma tokia teorema.

E teorema. *Tarkime, kad α yra transcendentusis skaičius, o $h > 0$ yra toks, kad $\exp\left\{\frac{2\pi}{h}\right\}$ yra racionalus skaičius. Tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H(K)$. Tuomet su kiekvienu $\epsilon > 0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \Big\{ 0 \le k \le N : \sup_{s \in K} \Big| \zeta(s + ikh, \alpha; \mathfrak{a}) - f(s) \Big| < \epsilon \Big\} > 0.$$

Pavyzdžiui, E teorema yra teisinga su transcendenčiuoju $\alpha = e^{-1}$ ir $h = 2\pi(\log 2)^{-1}$.

Disertacijoje yra išplėčiama E teorema, naudojant naujas sąlygas parametrui α ir skaičiui h. Tegul

$$L(\alpha, h, \pi) = \left\{ \Big(\log(m + \alpha) : m \in \mathbb{N}_0 \Big), \frac{2\pi}{h} \right\}.$$

Tuomet turime tokį tvirtinimą.

1.3 teorema. *Tarkime, kad aibė $L(\alpha, h, \pi)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$. Tegul $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H(K)$. Tuomet su kiekvienu $\epsilon > 0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \Big\{ 0 \le k \le N : \sup_{s \in K} \Big| \zeta(s + ikh, \alpha; \mathfrak{a}) - f(s) \Big| < \epsilon \Big\} > 0.$$

Aišku, jog iš 1.3 teoremos išplaukia analogiškas tvirtinimas Hurvico dzeta funkcijai.

Tiesinis aibių nepriklausomumas virš $\mathbb{Q}$ tam tikra prasme siejasi su labai svarbia ir sudėtinga algebrinio nepriklausomumo virš $\mathbb{Q}$ sąvoka. Primename, kad skaičiai $\alpha_1, ..., \alpha_r$ yra algebriškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$, jei nėra jokio polinomo $p(s_1, ..., s_r) \not\equiv 0$ su racionaliais koeficientais, kad $p(\alpha_1, ..., \alpha_r) = 0$. Nesunku matyti, kad jei skaičiai α and $\exp\left\{\frac{2\pi}{h}\right\}$ algebriškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$, tada aibė $L(\alpha, h, \pi)$ yra tiesiškai nepriklausoma. Todėl iš garsios Nesterenkos (Nesterenko) teoremos, tvirtinančios, kad skaičiai π ir e^{π} yra algebriškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$, išplaukia, jog 1.3 teoremoje galima imti, pavyzdžiui, $\alpha = \frac{1}{\pi}$ ir racionalius h.

Disertacijoje yra gautas ir diskretusis 1.2 teoremos analogas.

1.4 teorema. *Tarkime, kad* $\alpha = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{N}, a < b, (a,b) = 1, b \neq 2$ *ir* $\mathrm{rad}(q)$ *dalija* b. *Tegu* $K \in \mathcal{K}$ *ir* $f(s) \in H(K)$. *Tuomet su kiekvienu* $\epsilon > 0$ *yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \#\Big\{0 \le k \le N : \sup_{s\in K} \Big|\zeta(s + ikh, \frac{a}{b}; \mathfrak{a}) - f(s)\Big| < \epsilon\Big\} > 0.$$

1.2 ir 1.4 teoremų įrodymai remiasi funkcijos $\zeta(s, \frac{a}{b}; \mathfrak{a})$ išraiška Dirichlė L funkcijomis. Tegul χ yra Dirichlė charakteris moduliu k, t.y., $\chi : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ yra periodinė funkcija su periodu k ($\chi(m+k) = \chi(m)$ su visais $m \in \mathbb{N}$), visiškai multiplikatyvi ($\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$ su visais $m, n \in \mathbb{N}$), $\chi(m) = 0$ kai $(m,k) > 1$, ir $\chi(m) \neq 0$ kai $(m,n) = 1$. Atitinkama Dirichlė L funkcija $L(s,\chi)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$L(s,\chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s}.$$

Yra tiksliai $\phi(k)$ ($\phi(k)$ yra Oilerio funkcija: $\phi(k) = \#\{1 \le m \le k : (m,k) = 1\}$) skirtingų Dirichlė charakterių moduliu k. Charakteris χ_0 moduliu k yra vadinamas pagrindiniu, jei $\chi_0(m) = 1$ su visais $(m,k) = 1$. Funkcija $L(s,\chi_0)$ yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus paprastąjį polių taške $s = 1$ su reziduumu

$$\prod_{p|k} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big).$$

Kai $\chi \neq \chi_0$, tai funkcija $L(s,\chi)$ yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, t.y., ji yra sveikoji funkcija.

Dirichlė L funkcijos yra glaudžiai susijusios su Hurvico dzeta funkcijomis $\zeta(s,\alpha)$ su racionaliuoju parametru α. Yra teisingos lygybės

$$L(s,\chi) = \frac{1}{k^s} \sum_{l=1}^{k} \chi(l) \zeta\Big(s, \frac{l}{k}\Big),$$

ir

$$\zeta\Big(s, \frac{a}{b}\Big) = \frac{b^s}{\phi(b)} \sum_{\chi (\mathrm{mod}\ b)} \overline{\chi}(a) L(s,\chi), \tag{2}$$

su $a, b \in \mathbb{N}, (a,b) = 1, a < b$, o sumuojama pagal visus Dirichlė charakterius moduliu b. (1) ir (2) lygybės sudaro sąlygas funkcijos $\zeta(s, \frac{a}{b}; \mathfrak{a})$ universalumo tyrimui panaudoti Dirichlė L funkcjų savybes įrodinėjant 1.2 ir 1.3 teoremas.

2 disertacijos skyriuje tolygusis realiųjų skaičių sekų pasiskirstymas moduliu 1 yra taikomas periodinės Hurvico dzeta funkcijos diskrečiojo universalumo įrodymui. Primename, kad seka $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ yra vadinama tolygiai pasiskirsčiusi moduliu 1, jei su kiekvienu intervalu $I = [a, b) \subset [0, 1)$ yra teisinga lygybė

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \chi_I\Big(\{x_k\}\Big) = b - a,$$

čia $\{x_k\}$ yra skaičiaus x_k trupmeninė dalis, o χ_I yra intervalo I indikatorius. Idėja apie tolygaus pasiskirstymo moduliu 1 taikymą universalumo teorijoje buvo pasiūlyta [3] darbe ir buvo gauta tokia teorema Rymano dzeta funkcijai.

F teorema. *Tarkime, kad $\beta, 0 < \beta < 1$, ir $h > 0$ yra fiksuoti skaičiai. Tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H_0(K)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \#\Big\{0 \le k \le N : \sup_{s\in K} \Big|\zeta(s + ik^\beta h) - f(s)\Big| < \varepsilon\Big\} > 0.$$

Ši teorema yra pirmasis rezultatas dzeta funkcijų diskrečiojo universalumo teorijoje, kai vietoje aritmetinės progresijos $\{kh : k \in \mathbb{N}\}, h > 0$, yra naudojama bendresnė aibė $\{k^\beta h : k \in \mathbb{N}_0\}, h > 0$.

F teorema buvo išplėsta Dirichlė L funkcijų rinkiniui. Tegul $\mathbb{P}$ yra visų pirminių skaičių aibė, $h_1 > 0, ..., h_r > 0$ ir

$$L(h_1, ..., h_r; \mathbb{P}) = \Big\{(h_1 \log p : p \in \mathbb{P}), ..., (h_r \log p : p \in \mathbb{P})\Big\}.$$

Tuomet [14] straipsnio rezultatas yra tokia teorema.

G teorema. *Tarkime, kad $\chi_1, ..., \chi_r$ yra bet kokie Dirichlė charakteriai, $\beta \in (0, 1)$ yra fiksuotas skaičius, o aibė $L(h_1, ..., h_r; \mathbb{P})$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$. Tegul $K_j \in \mathcal{K}$ and $f_j(s) \in H_0(K_j)$, $j = 1, ..., r$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \#\Big\{0 \le k \le N : \sup_{1\le j\le r} \sup_{s\in K_j} \Big|L(s + ik^\beta h_j, \chi_j) - f_j(s)\Big| < \varepsilon\Big\} > 0.$$

F ir G teoremų įrodymuose iš esmės yra remiamasi tuo, kad seka $\{k^\beta a : k \in \mathbb{N}_0\}$ su $0 < \beta < 1$ ir $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ yra tolygiai pasiskirsčiusi moduliu 1.

F teoremos analogas Hurvico dzeta funkcijai buvo gauta [12] darbe. Turime tokį tvirtinimą.

H teorema. *Tarkime, kad aibė $L(\alpha)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$, o $\beta, 0 < \beta < 1$, yra fiksuotas skaičius. Tegul $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H(K)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$ ir $h > 0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \#\Big\{0 \le k \le N : \sup_{s\in K} \Big|\zeta(s + ik^\beta h, \alpha) - f(s)\Big| < \varepsilon\Big\} > 0.$$

Disertacijoje yra įrodomas toks H teoremos plėtinys.

2.1 teorema. *Tarkime, kad aibė $L(\alpha)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$, o $\beta_1, 0 < \beta_1 < 1$, ir $\beta_2 > 0$ yra fiskuoti skaičiai. Tegul $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H(K)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$ ir $h > 0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N-1} \#\Big\{2 \le k \le N : \sup_{s\in K} \Big|\zeta(s + ihk^{\beta_1} \log^{\beta_2} k, \alpha; \mathfrak{a}) - f(s)\Big| < \varepsilon\Big\} > 0.$$

2.1 teoremos įrodymo pagrindinė idėja pagrįsta sekos $\{ak^{\beta_1}\log^{\beta_2} k : k = 2, 3, ...\}$ su $\beta_1, 0 < \beta_1 < 1, \beta_2 > 0$ ir bet kuriuo $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tolygiuoju pasiskirstymu moduliu 1.

3 disertacijos skyriuje yra nagrinėjami periodinės Hurvico dzeta funkcijos universalumo teoremų apibendrinimai sudėtinėms funkcijoms $F(\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a}))$ kai kurioms operatorių F analizinių funkcijų erdvėje $H(D)$ klasėms.

Pirmosios universalumo teoremos sudėtinėms funkcijomis buvo gautos [8] ir [9] darbuose. Primename kai kurias iš jų. Tegul

$$S = \{g \in H(D) : g(s) \neq 0 \text{ arba } g(s) \equiv 0\}.$$

I teorema. *Tarkime, kad $F : H(D) \to H(D)$ yra toks tolydusis operatorius, kad su kiekviena atvirąja aibe $G \subset H(D)$ aibė $(F^{-1}G) \cap S$ yra netuščia. Tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H(K)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$ ir $h > 0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas}\Big\{\tau \in [0, T] : \sup_{s\in K} \Big|F\Big(\zeta(s + i\tau)\Big) - f(s)\Big| < \varepsilon\Big\} > 0.$$

Tegul $a_1, ..., a_r$ yra skirtingi kompleksiniai skaičiai, o $F : H(D) \to H(D)$ yra operatorius. Apibrėžiame aibe

$$H_{a_1,...,a_r;F}(D) = \{g \in H(D) : g(s) \neq a_j, j = 1, ..., r\} \cup \{F(0)\}.$$

Tuomet žinomas toks tvirtinimas [9].

J teorema. *Tarkime, kad $F : H(D) \to H(D)$ yra toks tolydusis operatorius, kad $F(S) \supset H_{a_1,...,a_r;F}(D)$. Kai $r = 1$, tegul $K \in \mathcal{K}$, $f(s) \in H(K)$ ir $f(s) \neq a_1$ on K. Kai $r \geq 2$, tegul $K \subset D$ yra bet kuri kompaktinė aibė ir $f(s) \in H_{a_1,...,a_r;F}(D)$. Tuomet yra teisingas I teoremos tvirtinimas.*

Iš J teoremos išplaukia kai kurių elementariųjų funkcijų, pavyzdžiui, $\sin(\zeta(s))$, universalumas.

Sudetinės funkcijos $F(\zeta(s, \alpha))$ buvo nagrinėjamas [10] darbe. Pavyzdžiui, buvo gauta tokia universalumo teorema.

K teorema. *Tarkime, kad α yra transcendentusis skaičius, o F: H(D) $\to$ $H(D)$ yra toks tolydusis operatorius, kad su kiekvienu polinomu $p = p(s)$, aibė $F^{-1}\{p\}$ yra netuščia. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$ ir $h > 0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas}\Big\{\tau \in [0, T] : \sup_{s\in K} \Big|F\Big(\zeta(s + i\tau, \alpha)\Big) - f(s)\Big| < \varepsilon\Big\} > 0.$$

Diskretus K teoremos analogas ir kitos diskrečiosios universalumo teoremos funkcijoms $F(\zeta(s, \alpha))$ buvo gautos [16] straipsnyje.

Dabar formuluojame universalumo teoremas sudėtinėms funkcijoms $F\big(\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})\big)$, kurios yra gautos disertacijoje. Pirmoji iš jų yra I teoremos analogas.

3.1 teorema. *Tarkime, kad aibė $L(\alpha)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$, o $F : H(D) \to H(D)$ yra toks tolydusis operatorius, kad su kiekviena atvirąja aibe $G \subset H(D)$ aibė $F^{-1}G$ yra netuščia. Tegul $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H(K)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$ ir $h > 0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas}\Big\{\tau \in [0, T] : \sup_{s\in K} \Big|F\Big(\zeta(s + i\tau, \alpha; \mathfrak{a})\Big) - f(s)\Big| < \varepsilon\Big\} > 0.$$

3.1 teoremos sąlyga, kad aibė $F^{-1}G$ netuščia yra bendra, tačiau, iš kitos pusės, šią sąlygą patikrinti sudėtinga. Kitoje teoremoje 3.1 teoremos sąlyga, kad aibė $F^{-1}G$ yra netuščia, yra pakeičiama stipresne, bet paprastesne sąlyga. Taigi, yra gautas K teoremos analogas periodinei Hurvico dzeta funkcijai.

3.2 teorema. *Tarkime, kad aibė $L(\alpha)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$, o $F : H(D) \to H(D)$ yra toks tolydusis operatorius, kad su kiekvienu polinomu $p = p(s)$ aibė $F^{-1}\{p\}$ yra netuščia. Tegul $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H(K)$. Tuomet yra teisingas 3.1 teoremos tvirtinimas.*

Nesunku matyti, kad kiekvieną polinomą $p(s)$ atitinka toks kitas polinomas, kad su visais $r \in \mathbb{N}$ ir $c_1, ..., c_r \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ teisinga lybybė

$$c_1 q'(s) + ... + c_r q^{(r)}(s) = p(s).$$

Todėl pagal 3.2 teoremą funkcija

$$c_1 \zeta'(s, \alpha; \mathfrak{a}) + ... + c_r \zeta^{(r)}(s, \alpha; \mathfrak{a})$$

yra universali 3.2 teoremos prasme.

Operatoriaus F tolydumo reikalavimas 3.2 teoremoje gali būti pakeistas Lipšico (Lipschitz) sąlygos analogu analizinių funkcijų erdvėje. Taigi, yra teisinga tokia teorema.

3.3 teorema. *Tarkime, kad aibė $L(\alpha)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$, o $F : H(D) \to H(D)$ yra toks tolydusis operatorius, kad su kiekvienu polinomu $p = p(s)$ aibė $F^{-1}\{p\}$ yra netuščia, ir kad su kiekviena aibe $K \in \mathcal{K}$ egzistuoja tokios teigiamos konstantos c ir β, ir $K_1 \in \mathcal{K}$, kad*

$$\sup_{s \in K} |F(g_1(s)) - F(g_2(s))| \leq \sup_{s \in K_1} |g_1(s) - g_2(s)|^{\beta}$$

su visomis $g_1, g_2 \in H(D)$. Tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H(K)$. Tuomet yra teisingas 3.1 teoremos tvirtinimas.

Lengva patikrinti, kad iš Koši integralinės teoremos išplaukia, jog operatorius

$$F(g) = g^{(r)}, r \in \mathbb{N}, g \in H(D),$$

tenkina 3.3 teoremos sąlygą su $\beta = 1$.

Dabar apribosime aproksimuojamų analizinių funkcijų klasę ir formuluojame J teoremos analogą periodinei Hurvico dzeta funkcijai, įrodytą disertacijos 3 skyriuje. Skirtingiems kompleksiniams skaičiams $a_1, ..., a_r$ apibrėžiame aibę

$$H_{a_1,...,a_r}(D) = \{g \in H(D) : g(s) \neq a_j, j = 1, ..., r\}.$$

3.4 teorema. *Tarkime, kad aibė $L(\alpha)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$, o $F : H(D) \to H(D)$ yra toks tolydusis operatorius, kad $F(H(D)) \supset H_{a_1,...,a_r}(D)$. Kai $r = 1$, tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H(K)$ ir $f(s) \neq a_1$ aibėje K. Kai $r \geq 2$, tegul $K \subset D$ yra bet kuri kompaktinė aibė ir $f(s) \in H_{a_1,...,a_r}(D)$. Tuomet yra teisingas 3.1 teoremos tvirtinimas.*

Matome, kad aibė $H_{a_1,\dots,a_r}(D)$ skiriasi šiek tiek nuo analogiškos aibės J teoremoje. Šis skirtumas atsiranda dėl to, kad J teoremoje naudojama sąlyga aibei $F(S)$, tuo tarpu, 3.4 teoremoje ši sąlyga pakeičiama sąlyga aibei $F(H(D))$. Tai yra susiję su analizinių funkcijų aproksimavimu iš klasės $H_0(K), K \in \mathcal{K}$, tuo tarpu 1.1 teoremoje aproksimuojamos funkcijos priklauso klasei $H(D), K \in \mathcal{K}$.

Spręsdami lygtį

$$\sin(g) = f, g \in H(D),$$

lengvai randame, kad jei $f \in H_{-1,1}(D)$, tuomet pagal 3.4 teoremą su $r = 2$ funkcija $f(s)$ gali būti aproksimuojama postūmiais $\sin(\zeta(s + i\tau, \alpha; \mathfrak{a}))$. Panašus tvirtinimas galioja ir postūmiams $\cos(\zeta(s + i\tau, \alpha; \mathfrak{a}))$.

Be 3.1 – 3.4 teoremų disertacijoje gauta dar tokia bendra teorema.

3.5 teorema. *Tarkime, kad aibė $L(\alpha)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$, o $F : H(D) \to H(D)$ yra tolydusis operatorius. Tegul $K \subset D$ yra bet kuri kompaktinė aibė ir $f(s) \in F(H(D))$. Tuomet yra teisingas 3.1 teoremos tvirtinimas.*

3 skyriaus rezultatai su transcendenčiuoju paramteru α buvo gauti [15] straipsnyje. Taigi, disertacijos rzultatai yra bendresni už publikuotus [15] darbe.

4 skyriuje pateikiami universalumo teoremų, įrodytų ankstesniuose skyriuose, taikymai funkcijos $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})$ nulių skaičiaus įverčiams.

Voroninas pritaikė jungtinį Dirichlė L funkcijų universalumą Hurvico dzeta funkcijos $\zeta(s, \alpha)$ su racionaliuoju parametru nulių skaičiaus įverčiui iš apačios gauti. Jo teorema turi tokį pavidalą.

L teorema. *Tarkime, kad $\alpha = \frac{a}{b}$, $(a, b) = 1$, $0 < a < b$. Tada su visais σ_1, σ_2, $\frac{1}{2} < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$, egzistuoja tokia konstanta $c = c(\alpha, \sigma_1, \sigma_2) > 0$, kad su pakankamai dideliu T funkcija $\zeta(s, \alpha)$ turi daugiau negu cT nulių stačiakampyje $\{s \in \mathbb{C} : \sigma_1 < \sigma < \sigma_2, |t| < T\}$.*

Disertacijoje gaunami L teoremos apibendrinimai. Sakome, kad kuriai nors funkcijai $f(s)$ yra teisingas tvirtinimas $A(\sigma_1, \sigma_2; c, T)$, jei su visais σ_1, σ_2, $\frac{1}{2} < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$, egzistuoja tokia konstanta $c > 0$, kad su pakankamai dideliu T, funkcija $f(s)$ turi daugiau negu cT nulių stačiakampyje $\{s \in \mathbb{C} : \sigma_1 < \sigma < \sigma_2, 0 < t < T\}$.

4.1 teorema. *Tarkime, kad aibė $L(\alpha)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$. Tuomet funkcijai $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})$ yra teisingas tvirtinimas $A(\sigma_1, \sigma_2; c, T)$.*

Kai $a_m \equiv 1$, 4.1 teorema išplečia L teoremą Hurvico dzeta funkcijai.

4.2 teorema. *Tarkime, kad $\alpha = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{N}, a < b, (a, b) = 1, b \neq 2$ ir $\operatorname{rad}(q)$ dalija b. Tuomet funkcijai $\zeta\big(s, \frac{a}{b}; \mathfrak{a}\big)$ yra teisingas tvirtinimas $A(\sigma_1, \sigma_2; c, T)$.*

Kitos teoremos yra diskretaus tipo. Sakome, kad kuriai nors funkcijai yra teisingas tvirtinimas $B(\sigma_1, \sigma_2; c, \varphi, k_0, N)$, jei su visais σ_1, σ_2, $\frac{1}{2} < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$, egzistuoja tokia konstanta $c > 0$, kad su pakankamai dideliu N, funkcija $f\big(s+i\varphi(k)\big)$ turi nulį skritulyje

$$\Big|s-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\Big|\le\frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}$$

su daugiau negu cN sveikųjų skaičių $k, k_0\le k\le N$.

Disertacijoje gauta tokia teorema.

4.3 teorema. *Tarkime, kad aibė* $L(\alpha,h,\pi)$ *yra tiesiškai nepriklausoma virš* $\mathbb{Q}$. *Tuomet funkcijai* $\zeta(s,\alpha;\mathfrak{a})$ *yra teisingas tvirtinimas* $B(\sigma_1,\sigma_2;c,kh,0,N)$.

Kita teorema yra 4.2 teoremos diskretusis analogas su racionaliuoju parametru α.

4.4 teorema. *Tarkime, kad* $\alpha=\frac{a}{b}, a,b\in\mathbb{N}, a<b, (a,b)=1, b\ne 2$ *ir* $\mathrm{rad}(q)$ *dalija* b. *Tuomet funkcijai* $\zeta\big(s,\frac{a}{b};\mathfrak{a}\big)$ *yra teisingas tvirtinimas* $B(\sigma_1,\sigma_2;c,kh,0,N)$.

Disertacija baigiasi 4.3 teoremos apibendrinimu.

4.5 teorema. *Tarkime, kad aibė* $L(\alpha)$ *yra tiesiškai nepriklausoma virš* $\mathbb{Q}$, *ir kad* β_1, $0<\beta_1<1$, *and* $\beta_2>0$ *yra fiksuoti skaičiai. Tuomet funkcijai* $\zeta(s,\alpha;\mathfrak{a})$ *yra teisingas tvirtinimas* $B(\sigma_1,\sigma_2;c,k^{\beta_1}\log^{\beta_2}k,2,N)$.

Išvados

1. Periodinė Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})$ su parametru α, kuriam aibė $\{\log(m+\alpha) : m \in \mathbb{N}_0\}$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$ turi tolydžiąją universalumo savybę.

2. Periodinė Hurvico dzeta funkcija su parametru α, kuriam aibė $\big\{\big(\log(m+\alpha) : m \in \mathbb{N}_0\big), \frac{2\pi}{h}\big\}$, $h > 0$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$ turi diskrečiąją universalumo savybę.

3. Periodinė Hurvico dzeta funkcija turi diskrečiąją universalumo savybę apie analizinių funkcijų aproksimavimą postūmiais
   $\zeta(s + ihk^{\beta_1} \log^{\beta_2} k, \alpha; \mathfrak{a})$, $0 < \beta_1 < 1$, $\beta_2 > 0$.

4. Kai kurioms operatorių F analizinių funkcijų erdvėje klasėms sudėtinės funkcijos $F\big(\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})\big)$ turi tolydžiąją ir diskrečiąją universalumo savybes.

5. Iš periodinės Hurvico dzeta funkcijos universalumo išplaukia jos nulių skaičiaus įverčiai iš apačios.

Summary

In the thesis, universality theorems on the approximation of analytic functions defined in the strip $D=\{s\in\mathbb{C}:\frac{1}{2}<\sigma<1\}$ by shifts of the periodic Hurwitz zeta-function are obtained.

Let $\alpha, 0<\alpha\leq 1$, be a fixed parameter, and $\mathfrak{a}=\{a_m : m\in\mathbb{N}_0\}, \mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$, be a periodic sequence of complex numbers with minimal period $q\in\mathbb{N}$. The periodic Hurwitz zeta-function $\zeta(s,\alpha;\mathfrak{a})$ is defined, for $\sigma>1$, by the Dirichlet series

$$\zeta(s,\alpha;\mathfrak{a})=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m}{(m+\alpha)^s},$$

and is meromorphically continued to the whole complex plane with the possible simple pole at the point $s=1$.

Let $\mathcal{K}$ be the class of compact subsets of the strip D with connected complements, and $H(K)$, $K\in\mathcal{K}$, be the class of continuous functions on K that are analytic in the interior of K.

In the thesis, it is proved that if the set $L(\alpha)=\{\log(m+\alpha):m\in\mathbb{N}_0\}$ is linearly independent over the field of rational numbers $\mathbb{Q}$, then, for every $K\in\mathcal{K}$, $f(s)\in H(K)$ and $\varepsilon>0$,

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\operatorname{meas}\left\{\tau\in[0,T]:\sup_{s\in K}\left|\zeta(s+i\tau,\alpha;\mathfrak{a})-f(s)\right|<\varepsilon\right\}>0.$$

If $\alpha=\frac{a}{b}, a,b\in\mathbb{N}, a<b, (a,b)=1, b\neq 2$ and that $\operatorname{rad}(q)$ divides b, then the above equality is true for the shifts $\zeta(s+i\tau,\frac{a}{b};\mathfrak{a})$.

The above results have their discrete analogues. If the set $L(\alpha,h,\pi)=\left\{\Big(\log(m+\alpha):m\in\mathbb{N}_0\Big),\frac{2\pi}{h}\right\}, h>0$, is linearly independent over $\mathbb{Q}$, then, for every $K\in\mathcal{K}$, $f(s)\in H(K)$ and $\varepsilon>0$,

$$\liminf_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\#\left\{0\leq k\leq N:\sup_{s\in K}\left|\zeta(s+ikh,\alpha;\mathfrak{a})-f(s)\right|<\epsilon\right\}>0.$$

The latter inequality is true for the rational parameter α satisfying the same hypothesis as in the case of continuous shifts.

In Chapter 2, the shifts $\zeta(s+ikh,\alpha;\mathfrak{a})$ are replaced by more complicated shifts $\zeta(s+ihk^{\beta_1}\log^{\beta_2}k,\alpha;\mathfrak{a})$ with fixed $0<\beta_1<1$ and $\beta_2>0$.

Chapter 3 of thesis is devoted to the universality of composite functions $F(\zeta(s,\alpha;\mathfrak{a}))$, where F is a certain operator in the space of analytic functions $H(D)$. For example, if the set $L(\alpha)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$, and $F:H(D)\to H(D)$ is a continuous operator such that, for every open set $G\subset H(D)$, the set $F^{-1}G$ is non-empty, then for every $K\in\mathcal{K}$, $f(s)\in H(K)$ and $\varepsilon>0$,

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\operatorname{meas}\left\{\tau\in[0,T]:\sup_{s\in K}\left|F\Big(\zeta(s+i\tau,\alpha;\mathfrak{a})\Big)-f(s)\right|<\varepsilon\right\}>0.$$

In the last chapter of the thesis, lower estimates for number of zeros of the function $\zeta(s,\alpha;\mathfrak{a})$ are obtained. For example, if the set $L(\alpha,h,\pi)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$, then, for every σ_1,σ_2, $\frac{1}{2}<\sigma_1<\sigma_2<1$, there exists a constant $c>0$ such that, for sufficiently large N, the function $\zeta(s+ikh,\alpha;\mathfrak{a})$ has a zero in the disc

$$\left|s-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right|\leq\frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}$$

for more than cN integers $k, 0\leq k\leq N$.

Aprobacija

Pagrindiniai disertacijos rezultatai buvo pristatyti tarptautinėse MMA (Mathematical Modelling and Analysis) konferencijose (MMA 2015, Gegužės 26-29, 2015, Sigulda, Latvija), (MMA 2016, Birželio 1–4, 2016, Tartu, Estija), (MMA 2017, Gegužės 30 - birželio 2, 2017, Druskininkai), (MMA 2018, Gegužės 29 - birželio 1, 2018, Sigulda, Latvija), XV tarptautinėje konferencijoje Algebra, skaičių teorija ir diskrečioji geometrija: šiuolaikinės problemos ir taikymai (Gegužės 28 - 31, 2018, Tula, Rusija), Lietuvos matematikų draugijos konferencijose (2017, 2018) ir Vilniaus universiteto skaičių teorijos seminaruose.

Publikacijų disertacijos tema sąrašas

Straipsniai recenzuojamuose moksliniuose leidiniuose:

1. A. Laurinčikas, R. Macaitienė, D. Mochov, D. Šiaučiūnas, On universality of certain zeta-functions, Izv. Saratovskogo Universiteta, Novaya Seriya, Seriya: Matematika, Mekhanika, Informatika **13**, Issue 4-2 (2013), 67-72.

2. A. Laurinčikas, R. Macaitienė, D. Mochov and D. Šiaučiūnas, Universality of the periodic Hurwitz zeta-function with rational parameter, Sib. Math. J. (submitted).

3. A. Laurinčikas, D. Mochov, A discrete universality theorem for the periodic Hurwitz zeta-functions, Chebysh. sb. **17**, Issue 1 (2016), 148-159.

4. A. Laurinčikas, D. Mochov, Generalizations of universality for periodic Hurwitz zeta-functions, Researches Math. Mech. **21**, Issue 1 (2016), 92-99.

5. A. Laurinčikas, D. Mochov, On the periodic Hurwitz zeta-function with rational parameter, Ann. Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. 47 (2018) (to appear).

6. A. Mincevič, D. Mochov, On the discrete universality of the periodic Hurwitz zeta-function, Šiauliai Math. Semin. **10** (**18**) (2015), 81-89.

7. A. Laurinčikas, D. Mochov, Universality of the periodic Hurwitz zeta-function with rational parameter, in: Algebra, Number Theory and Discrete Geometry: Modern Problems and Appl., XVI intern. Conf., Tula, 2018, TGPU im. L. N. Tolstogo, 2018, pp. 229-231.

Konferencijų pranešimų tezės

1. D. Mochov, On the discrete universality of the periodic Hurwitz zeta-function, Mathematical Modelling and Analysis (MMA 2015): 20-th Intern. Conf., May 26-29, 2015, Sigulda, Latvia. Abstracts, p. 59.
2. D. Mochov and D. Šiaučiūnas, Discrete universality theorem for the periodic Hurwitz zeta-function, Mathematical Modelling and Analysis (MMA 2016): 21-th Intern. Conf., June 1-4, 2016, Tartu, Estonia. Abstracts, p.53.
3. D. Mochov and A. Laurinčikas, Generalizations of universality theorems for the periodic Huwritz zeta-functions, Mathematical Modelling and Analysis (MMA 2017): 22-th Intern. Conf., May 30 - June 2, 2017, Druskininkai, Lithuania. Abstracts, p.44.
4. D. Mochov and A. Laurinčikas, Universality of the periodic Hurwitz zeta-function with rational parameter: 25-th Intern. Conf. May 28-31, 2018, Tula, Russia.
5. D. Mochov and A. Laurinčikas, On discrete universality of the periodic Hurwitz zeta-function with rational parameter, Abstracts of MMA2018, May 29-June 1, 2018, Sigulda, Latvia, p.53.

Cituota literatūra

1. B. Bagchi, The statistical behaviour and universality properties of the Riemann zeta-function and other allied Dirichlet series, Ph. D. Thesis, Indian Statistical Institute, Calcutta, 1981.

2. J. W. S. Cassels, Footnote to a note of Davenport and Heilbronn, J. London Math. Soc. **36** (1961), 177-189.

3. A. Dubickas, A. Laurinčikas, Distribution modulo 1 and the discrete universality of the Riemann zeta-function, Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg **86** (2016), 79-87.

4. S. M. Gonek, Analytic properties of zeta and L-functions, Thesis, University of Michigan, 1979.

5. A. Javtokas, A. Laurinčikas, Universality of the periodic Hurwitz zeta-function, Integral Transf. Spec. Funct. **17** (2006), 711-722.

6. A. Laurinčikas, Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function, Kluwer, Dordrecht, 1996.

7. A. Laurinčikas, The joint universality for periodic Hurwitz zeta-functions, Analysis **26** (2006), 419-428.

8. A. Laurinčikas, Universality of the Riemann zeta-function, J. Number Theory, **130** (2010), 2323-2331.

9. A. Laurinčikas, Universality of composite functions, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **B39** (2002), 191-204

10. A. Laurinčikas, On the universality of the Hurwitz zeta-function, Int. J. Number Theory **9**(2013), 155-165.

11. A. Laurinčikas, A discrete universality theorem for the Hurwitz zeta-function, J. Number Theory, **143** (2014), 232-247.

12. A. Laurinčikas, Distribution modulo 1 and universality of hte Hurwitz zeta-function, J. Number Theory, **169** (2016), 294-303.

13. A. Laurinčikas, R. Macaitienė, The discrete universality of the periodic Hurwitz zeta function, Integr. Transf. Spec. Func. **20** (2009), 673-686.

14. A. Laurinčikas, R. Macaitienė and D. Šiaučiūnas, Uniform distribution modulo 1 and the joint universality of Dirichlet L-functions, Lith. Math. J. **56** (2016), 529-539.

15. A. Laurinčikas, D. Mochov, Generalizations of universality for periodic Hurwitz zeta-functions, Researches Math. Mech. **21** (2016), 92-99.

16. A. Laurinčikas, J. Rašytė, Generalizations of a discrete universality theorem for Hurwitz zeta-functions, Lith. Math. J. **52** (2012), 172-180.

17. A. Reich, Werteverteilung von Zeta-funktionen, Arch. Math. **34**(1980), 440-451.

18. S. M. Voronin Theorem on the "universality" of the Riemann zeta-function, Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. matem. **39**(1975), 475-486 (in Russian) $\equiv$ Math. USSR Izv. **9** (1975), 443-453.

19. S. M. Voronin, Analytic properties of Dirichlet generating functions of arithmetic objects, Thesis, Steklov Math. Institute, Moscow, 1977 (in Russian).

Trumpos žinios apie autorių

Gimimo data ir vieta:

1988 m. liepos 7 d., Visaginas, Lietuva.

Išsilavinimas:

2011 m. Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas,

Finansų ir draudimo matematika, bakalauras.

2013 m. Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas,

Matematika, magistras.

Darbo patirtis:

2011-07 – 2011-09 – AS Meridian Trade Bank, klientų aptarnavimo specialisto asistentas.

2011-10 – 2016-08 – Finance engineering, finansų analitikas.

2016-09 – 2017-05 – Lindorff Business Services, vyresnysis investicijų analitikas.

2017-06 – 2018-04 – Skandinaviska Enskilda Banken (SEB), vyresnysis finansinių duomenų analitikas.

nuo 2018-04 – If insurance, vyresnysis aktuarinių duomenų analitikas.