

Konkurencinio dviejų asmenų lošimo su tiesine pelno funkcija sprendimas

Jolanta DRANSEIKIENĖ, Daina SŪDŽIŪTĖ (VU)
el. paštas: jolanta@media-house.com

Dviejų asmenų nulinės sumos lošimas su pelno funkcija $kx + 1$, kai $k \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, – yra išspręstas šiame darbe (jo sprendimas, kai $k = 0$ yra literatūroje [1]).

Išreikštine forma pateikiamos optimaliosios lošėjų strategijos X^* , Y^* , lošimo vertė v . Jų parametrai a , α , C_0 , C_1 yra neišreikštinių lygčių sistemos sprendiniai.

Parametrų a , α , C_0 , C_1 skaitinės vertės įvairioms k reikšmėms suskaičiuotos Microsoft Excel programa, a reikšmės radimui panaudojant „Goal Seek“ funkciją. Atitinkamos parametrų reikšmės ir jų priklausomybė nuo k pateikti prieduose.

Tarkime, kad firma A gamina prekę, kuri yra paklausi laiko intervale $[0, 1]$. Kita firma, B, didelio koncerno D dukterinė įmonė, gamina analogišką prekę. Abi šios firmos savo prekes parduoda toje pačioje rinkoje, tačiau siekia skirtingų tikslų: firma A siekia gauti maksimalų pelną, o firmos B tikslas yra sužlugdyti įmonę A, t. y. minimizuoti jos pelną ir perimti visą rinką. Siekdama šio tikslo, antroji įmonė visiškai neatsižvelgia į galimus savo finansinius nuostolius, kadangi perėmus visą rinką, juos bus galima padengti ateityje. Firma B savo tikslą pasiekti gali tik vieninteliu teisėtu būdu – pasirinkdama tinkamą momentą savo produkcijos pateikimui į rinką.

Tarkime, kad konkuruojančių prekių kokybė priklauso nuo jų pateikimo į rinką momento: kuo vėliau prekė pateikiama, tuo aukštesnė jos kokybė, o realizuojama tik kokybiškesnė prekė.

Šis konfliktas yra modeliuojamas nulinės sumos lošimu vienetiniame kvadrato. Tariaime, kad firma A yra I lošėjas, o firma B – II lošėjas. Taigi I lošėjo išlošio funkcija bus apibrėžiama taip:

$$H = \begin{cases} (kx + 1)(y - x), & x < y, \\ \frac{1}{2}(kx + 1)(1 - x), & x = y, \\ (kx + 1)(1 - x), & x > y, \end{cases} \quad (1)$$

kai $k \in (-1, \infty)$, $x, y \in [0, 1]$.

Ieškosime šio lošimo sprendimo: lošimo vertės bei abiejų lošėjų optimalių strategijų. Taip pat stebėsime, kaip kinta lošimo sprendinio parametrai priklausomai nuo koeficiento k . Atvejis, kai $k = 0$, yra išnagrinėtas knygoje [1]. Rastas šio lošimo sprendinys: I ir II lošėjų optimalios mišriosios strategijos, kurių spektras yra intervalas $[0, a]$, bei lošimo vertė. Šiame darbe ieškosime analogiško pavidalo sprendinio, kai $k \in (-1, 0) \cup (0, \infty)$.

Tarkime, kad II lošėjo optimali strategija Y^* apibrėžiama tikimybinu pasiskirstymu su tankio funkcija g_a , kuri yra nelygi nuliui tik intervale $[0, a]$, $a < 1$, ir i šios strategijos spektrą įeina visi intervalo $[0, a]$ taškai, o I lošėjo optimali strategija X^* - tikimybinu pasiskirstymu su tankio funkcija f_a , kuri tašką 0 naudoja su teigiama tikimybe (taške 0 daro šuolį, lygų α) ir yra lygi nuliui už intervalo $[0, a]$, $a < 1$, ribų, ir i šios strategijos spektrą įeina visi intervalo $[0, a]$ taškai. Taip apibrėžtos abiejų lošėjų optimalios strategijos tenkintų tapatybes:

$$\begin{aligned}
 H(X^*, y) &= \alpha y + \int_0^y (kx + 1)(y - x)f_a(x) dx \\
 &\quad + \int_y^a (kx + 1)(1 - x)f_a(x) dx = v, \quad (\text{pažymime}) \quad \forall y \in [0, a], \\
 H(x, Y^*) &= \int_0^x (kx + 1)(1 - x)g_a(y) dy \\
 &\quad + \int_x^a (kx + 1)(y - x)g_a(y) dy = v, \quad (\text{pagal pažymėjimą}) \quad \forall x \in [0, a],
 \end{aligned}$$

kadangi $H(x, Y^*)$ yra tolydi pagal x , o $H(X^*, y)$ yra tolydi pagal y .

Integralą

$$I = \int_0^x (kx + 1)(1 - x)g_a(y) dy + \int_x^a (kx + 1)(y - x)g_a(y) dy = v$$

diferencijuojame pagal x ir gauname tiesinę pirmos eilės diferencialinę lygtį:

$$g'_a(x) + g_a(x) \frac{2k - 3kx - 1}{(kx + 1)(1 - x)} = \frac{2k}{(kx + 1)(1 - x)}. \quad (2)$$

Diferencialinę lygtį (2) spręsimė klasikiniu metodu. Ieškome lygties bendrojo sprendinio – sprendžiam lygtį su dešine puse, lygia 0:

$$\begin{aligned}
 g'_a(x) + g_a(x) \frac{2k - 3kx - 1}{(kx + 1)(1 - x)} &= 0, \\
 g_a(x) &= C(1 - x)^{-1}(kx + 1)^{-2}.
 \end{aligned}$$

Ieškosime atskirojo (2) lygties sprendinio konstantų variavimo metodu. Vadinasi, (2) diferencialinės lygties sprendinys bus:

$$g_a(x) = \frac{k^2 x^2 + 2kx + C_0}{(1 - x)(kx + 1)^2}.$$

Gavome II lošėjo strategijos Y^* tankio funkcijos išraišką, kurioje yra vienas nežinomasis – konstanta C_0 . Įstatome šią išraišką į

$$\int_0^a g_a(x) dx = 1 \quad (3)$$

ir

$$\int_0^x (kx+1)(1-x)g_a(y) dy + \int_x^a (kx+1)(y-x)g_a(y) dy = v. \quad (4)$$

Suskaičiavę integralus bei (4) lygybėje kairės pusės koeficientą prie x prilyginę 0, gauname dviejų lygčių sistemą

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(1 - \frac{k(1-a)(ka+1)}{(k+1)^2}\right) \left(\ln(ka+1) - \frac{k+1}{ka+1} - \ln(1-a) + k+1\right) \\ + \left(-\ln(ka+1) + \frac{k+1}{ka+1} - k - 1\right) = 1, \\ k^2 \left(1 - \frac{k(1-a)(ka+1)}{(k+1)^2}\right) + \left(1 - \frac{k(1-a)(ka+1)}{(k+1)^2}\right) k - k^2 - ak \\ + \left(1 - \frac{k(1-a)(ka+1)}{(k+1)^2}\right) k (\ln(ka+1) - \ln(1-a)) \\ + \left(1 - \frac{k(1-a)(ka+1)}{(k+1)^2}\right) \frac{1}{ka+1} (1+k) \\ - k (\ln(ka+1)) - \frac{1}{ka+1} (1+k) = 0. \end{array} \right.$$

Išsprendę šią sistemą gauname neišreikštinę lygtį a atžvilgiu bei konstantos C_0 ir lošimo vertės v išraišką per a :

$$\begin{aligned} & \frac{1 - k(1-a)(ka+1) + k^2 + 2k}{(k+1)} \ln(ka+1) \\ & - \frac{1 - k(1-a)(ka+1) + k^2 + 2k}{(k+1)} \ln(1-a) \\ & - (k+1) \ln(ka+1) + 1 - k(1-a)(ka+1) - ak = 2, \\ C_0 &= 1 - k(1-a)(ka+1), \\ v &= -\ln(1-a) - a + \frac{-k(1-a)(ka+1)}{(k+1)^2} \ln \frac{ka+1}{1-a} \\ & + \frac{-(1-a)}{k+1} - \frac{-(1-a)(ka+1)}{k+1}. \end{aligned}$$

Iš pirmosios lygties randame a reikšmę. Šią reikšmę įstatę į antrąją ir trečiąją lygtį, gausime C_0 ir v . Suradome II lošėjo strategiją Y^* : tankio funkcija

$$g_a(x) = \frac{k^2 x^2 + 2kx + C_0}{(1-x)(kx+1)^2}.$$

Pagal mūsų darytą prielaidą I lošėjo strategija X^* aprašoma tikimybinio pasiskirstymo su tankio funkcija f_a , kuri tašką 0 naudoja su teigiama tikimybe (taške 0 daro šuolį, lygų a) ir yra lygi nuliui už intervalo $[0, a]$, $a < 1$, ribų (a reikšmė jau žinoma iš II lošėjo strategijos Y^* skaičiavimo). Taip pat

$$I = \int_0^y (kx+1)(y-x)f_a(x) dx + \int_y^a (kx+1)(1-x)f_a(x) dx + ay = v, \quad 0 < y \leq a.$$

Šią integralinę lygybę du kartus diferencijuojame pagal y ir gauname diferencialinę lygtį

$$\frac{f'_a(y)}{f_a(y)} = \frac{2 + 3ky - k}{(ky+1)(1-y)},$$

kurios sprendinys yra

$$f_a(y) = \frac{C_1}{(ky+1)(1-y)^2}.$$

Radome I lošėjo strategijos X^* tankio funkciją.

Irašome gautąją tankio funkcijos išraišką į

$$\int_0^a f_a(x) dx = 1 - \alpha \tag{5}$$

ir

$$\int_0^y (kx+1)(y-x)f_a(x) dx + \int_y^a (kx+1)(1-x)f_a(x) dx + ay = v. \tag{6}$$

Suskaičiavę integralus bei (6) lygybėje kairės pusės koeficientą prie y prilyginę 0 gauname

$$\alpha = C_1 = 1 - \frac{k \ln \frac{ka+1}{1-a} + \frac{a(k+1)}{1-a}}{(k+1)^2 + k \ln \frac{ka+1}{1-a} + \frac{a(k+1)}{1-a}},$$

$$v = - \left(1 - \frac{k \ln \frac{ka+1}{1-a} + \frac{a(k+1)}{1-a}}{(k+1)^2 + k \ln \frac{ka+1}{1-a} + \frac{a(k+1)}{1-a}} \right) \ln(1-a).$$

Radome I lošėjo strategiją X^* , nusakomą tankio funkcija:

$$f_a(x) = \frac{C_1}{(kx + 1)(1 - x)^\alpha}.$$

Būtinios ir pakankamos strategijų X^* ir Y^* optimalumo sąlygos:

$$\begin{aligned} H(X^*, y) &\geq v, \quad \forall y \notin [0, a], \\ H(x, Y^*) &\leq v, \quad \forall x \notin [0, a]. \end{aligned} \quad (7)$$

Skaičiuojame

$$H(X^*, 0) = \frac{1}{2}\alpha - C_1 \ln(1 - a) > v.$$

Skaičiuojame

$$H(X^*, y) = \alpha y + \int_0^a \frac{C_1(y - x)}{(1 - x)^2} dx, \quad a < y \leq 1.$$

Matome, kad funkcija $H(X^*, y)$ yra didėjanti y atžvilgiu, kai $a < y \leq 1$. $H(X^*, a) = v$, taigi

$$H(X^*, y) > v, \quad a < y \leq 1.$$

Taigi pirmoji (7) sąlyga yra patenkinta.

Nagrinėjame $H(x, Y^*)$, kai $a < x \leq 1$:

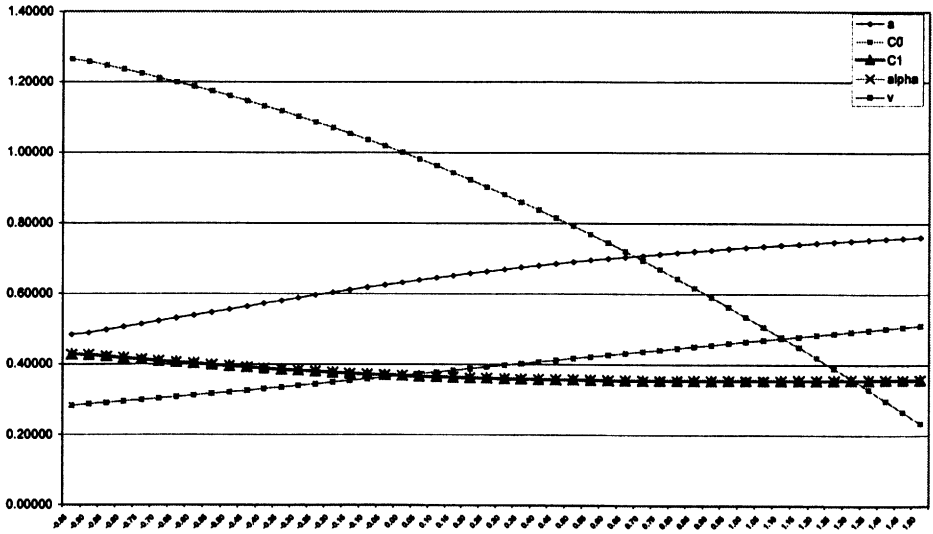
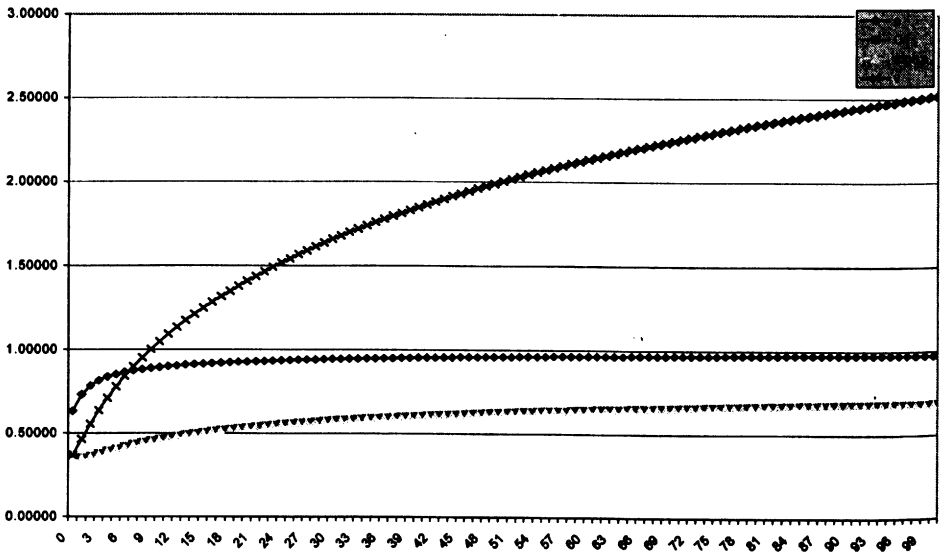
$$H(x, Y^*) = (kx + 1)(1 - x).$$

Tiriame funkciją $h(x) = (kx + 1)(1 - x)$.

Ši funkcija $h(x)$ yra mažėjanti intervale $(a, 1]$ visiems $-1 < k < \infty$ (kai $k = 0$, $h(x) = 1 - x$ yra mažėjanti visame intervale $[0, 1]$), ir

$$H(x, Y^*) < v, \quad a < x \leq 1.$$

Vadinasi, rastos I ir II lošėjų strategijos X^* ir Y^* tenkina būtinias ir pakankamas optimalumo sąlygas, taigi yra optimalios.

1 pav. Lošimo parametrų priklausomybė nuo k (k kinta nuo $-0,95$ iki $1,50$).2 pav. Lošimo parametrų priklausomybė nuo k (k kinta nuo 0 iki 100).

Literatūra

- [1] Г.Н. Дюбин, В.Г. Суздаль, *Введение в прикладную теорию игр*, Наука, Москва (1981).
- [2] С. Карлин, *Математические методы в теории игр, Программировании и Экономике*, Мир, Москва (1964).
- [3] Г. Оуэн, *Теория игр*, Мир, Москва (1971).

Competitive two person zero-sum game with linear increment function

J. Dranseikienė, D. Sūdžiūtė

We analyze the competition of two firms with increment function of the first firm $c(x) = kx + 1$ – an analogue to that in [1] with the increment $c = 1$.

The optimal strategies X^* , Y^* and the value v of the game in explicit form are obtained, their parameters a , α , C_0 , C_1 being the solutions of the equation system.

The values of the game parameters for various k are presented in graphic form.