

Об одновременном взрыве одной системы уравнений Шредингера

Гинтарас ПУРЮШКИС (VU)
e-mail: gintaras.puriuskis@maf.vu.lt

Рассматривается система нелинейных уравнений Шредингера

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= i\Delta u + i\frac{p}{2}|u|^{p-2}|v|^\alpha u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= i\Delta v + i\frac{\alpha}{2}|u|^p|v|^{\alpha-2}v, \quad t > 0.\end{aligned}$$

Получены условия, при которых происходит коллапс.

Рассмотрим систему нелинейных уравнений Шредингера

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = i\Delta u + i\frac{p}{2}|u|^{p-2}|v|^\alpha u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = i\Delta v + i\frac{\alpha}{2}|u|^p|v|^{\alpha-2}v, \quad t > 0 \end{cases} \quad (1)$$

с начальными условиями

$$u(0, x) = u_0(x), \quad v(0, x) = v_0(x). \quad (2)$$

Здесь $u(t, x)$ и $v(t, x)$ - неизвестные функции, достаточно быстро стремящиеся к нулю вместе со своими производными при $|x| \rightarrow \infty$, $x \in R^n$, Δ - оператор Лапласа.

Рассматривается вопрос о взрыве (коллапсе) решения задачи (1), (2). Доказано, если $p + \alpha \geq 2 + 4/n$, то при некоторых начальных данных существует сингулярное решение, т. е. существует $T < \infty$ такое, что

$$\lim_{t \rightarrow T} \|u\|_{H_1} = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow T} \|v\|_{H_1} = \infty, \quad (3)$$

$$\lim_{t \rightarrow T} \|u\|_{L_\infty} = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow T} \|v\|_{L_\infty} = \infty. \quad (4)$$

Отметим, что u и v взрывается в тот же самый момент времени T . Системе (1) обобщает система

$$\frac{\partial w_k}{\partial t} = ia_k \Delta w_k + f_k(w, w^*),$$

рассмотренная в работе [1]. Здесь $w = (w_1, \dots, w_m)$ – неизвестная вектор функция, $a_k, k = 1, \dots, m$ отличные от нуля действительные постоянные, w^* – комплексно сопряженная функция к функции w , f_k – функция $2m$ переменных.

f_k удовлетворяют следующим условиям

1)

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^m f_k w_k^*\right) = 0,$$

2)

$$\operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^m a_k f_k \nabla_{t,x} w_k^*\right) = \nabla_{t,x} \phi(w, w^*),$$

здесь $\nabla_{t,x} = (\partial/\partial t, \partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$, $\phi(w, w^*)$ – действительная функция $2m$ переменных такая, что

$$a_k f_k = i \frac{\partial \phi}{\partial w_k^*}, \quad a_k f_k^* = -i \frac{\partial \phi}{\partial w_k}, \quad k = 1, \dots, m,$$

3) функция ϕ является однородной степени s , т.е.

$$\phi(\lambda w, \lambda w^*) = \lambda^s \phi(w, w^*).$$

ϕ дважды непрерывно дифференцируема функция. В статье [1] доказаны следующие равенства

$$\|w(t, x)\|_{L_2} = \|w(0, x)\|_{L_2}, \quad (5)$$

$$I_2(t) \equiv \int_{R^n} \left(\sum_{k=1}^m a_k^2 |\nabla w_k|^2 - \phi(w, w^*) \right) dx = I_2(0), \quad (6)$$

$$\frac{d^2 F}{dt^2} = 2n(s-2)I_2 + 2(4-n(s-2)) \sum_{k=1}^m \int_{R^n} a_k^2 |\nabla w_k|^2 dx. \quad (7)$$

Здесь

$$F(t) \equiv \int_{R^n} \left(\sum_{k=1}^m |x|^2 |w_k|^2 \right) dx.$$

Для системы (1) имеем $\phi = |u|^p |v|^\alpha$, равенства (5), (6), (7) можно переписать

$$\|u(t, x)\|_{L_2} + \|v(t, x)\|_{L_2} = \|u(0, x)\|_{L_2} + \|v(0, x)\|_{L_2}, \quad (8)$$

$$I_2(t) \equiv \int_{R^n} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 - |u|^p |v|^\alpha) dx = I_2(0),$$

$$\frac{d^2 F}{dt^2} = 2n(p + \alpha - 2)I_2 + 2(4 - n(p + \alpha - 2)) \int_{R^n} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) dx,$$

$$F(t) \equiv \int_{R^n} |x|^2 (|u|^2 + |v|^2) dx.$$

Вместо равенства (8) докажем более сильное равенство

Лемма. Для решения задачи (1), (2) справедливы следующие равенства

$$\|u(t, x)\|_{L_2} = \|u(0, x)\|_{L_2}, \quad \|v(t, x)\|_{L_2} = \|v(0, x)\|_{L_2}.$$

Доказательство. Обозначим $u_1 = \operatorname{Re} u$, $u_2 = \operatorname{Im} u$. Тогда первое уравнение системы (1) можно переписать следующим образом

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -\Delta u_2 - \frac{p}{2}|u|^{p-2}|v|^\alpha u_2,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \Delta u_1 + \frac{p}{2}|u|^{p-2}|v|^\alpha u_1.$$

Первое уравнение умножим на u_1 , второе – на u_2 , сложим и проинтегрируем по R^n . После интегрирования по частям получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \|u(t, x)\|_{L_2} = 0.$$

Отсюда получаем $\|u(t, x)\|_{L_2} = \|u(0, x)\|_{L_2}$. Аналогично доказывается другое равенство. Лемма доказана.

Теорема. Пусть u и v нетривиальное решение задачи (1), (2), $p + \alpha \geq 2 + 4/n$, $p > 1$, $\alpha > 1$, $I_2 < 0$, тогда существует такое $0 < T < \infty$, что справедливы равенства (3), (4).

Замечание. Из результатов статьи [1] следует

$$\lim_{t \rightarrow T} (\|u\|_{H_1} + \|v\|_{H_1}) = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow T} (\|u\|_{L_\infty} + \|v\|_{L_\infty}) = \infty.$$

Теорема настоящей статьи усиливает результат статьи [1].

Доказательство теоремы. В статье [1] доказано

$$\lim_{t \rightarrow T} \int_{R^n} |x|^2 (|u|^2 + |v|^2) dx = 0.$$

Отсюда имеем

$$\lim_{t \rightarrow T} \int_{R^n} |x|^2 |u|^2 dx = 0.$$

Аналогичное равенство и аналогичное доказательство есть для функции v . Для любого $\varepsilon > 0$ верно неравенство

$$\int_{R^n} |x|^2 |u|^2 dx \geq \int_{|x| \leq \varepsilon} |x|^2 |u|^2 dx + \varepsilon^2 \int_{|x| > \varepsilon} |u|^2 dx.$$

Отсюда для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\lim_{t \rightarrow T} \int_{|x| > \varepsilon} |u|^2 dx = 0.$$

По условию теоремы u есть нетривиальное решение, т.е. $\|u\| > 0$. По лемме имеем

$$\lim_{t \rightarrow T} \int_{|x| \leq \varepsilon} |u|^2 dx = \int_{R^n} |u|^2 dx = \|u_0\|_{L_2} > 0.$$

Последнее равенство верно для любого $\varepsilon > 0$, из теоремы о среднем значении интеграла получим, что $|u| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T$. Равенство (4) доказано. Пользуясь леммой и неравенством (см. [1])

$$\int_{R^n} |u|^2 dx \leq \frac{2}{n} \left(\int_{R^n} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{R^n} |x|^2 |u|^2 dx \right)^{1/2}$$

получаем равенство (3). Теорема доказана.

Литература

- [1] А. Домаркас, О разрушении решений системы нелинейных уравнений Шредингера, *Лит. Мат. Сб.*, 35(2), 181-189 (1995).

Apie vienos Šredingerio lygčių sistemos vienalaikį sprogamą

G. Puriuškis

Nagrinėjama netiesinių Šredingerio lygčių sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= i\Delta u + i\frac{p}{2}|u|^{p-2}|v|^{\alpha}u \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= i\Delta v + i\frac{\alpha}{2}|u|^p|v|^{\alpha-2}v, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Gautos sąlygos, kada sprendinys sprogs.