

## Nešo pusiausvyrų konvergavimas viename laiko momento parinkimo lošime

Daina SŪDŽIŪTĖ (VU)

el. paštas: daina.sudziute@maf.vu.lt

Dviejų asmenų nenulinės sumos laiko momento parinkimo lošimuose be pusiausvyrų, analogiškų toms, kurios egzistuoja nulinės sumos lošimuose, būna kitų – „atskirųjų“ – pusiausvyrų. Čia aptariama viena tokia pusiausvyrų su baigtiniais sutampančiais spektrais klasė. Šios pusiausvyros egzistuoja esant netolydiems branduoliams. Esant patenkintoms tam tikroms branduolių tolydumo sąlygoms, tokių pusiausvyrų sekos konverguoja į pusiausvyras.

Dviejų asmenų lošime abiejų lošėjų grynųjų strategijų aibės yra vienetiniai intervalai  $[0, 1]$ , o išlošiai, esant situacijoms  $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$  yra reikšmės funkcijų

$$K_1(x, y) = \begin{cases} L_1(x, y), & \text{kai } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ M_1(x, y), & \text{kai } 0 \leq y < x \leq 1, \end{cases}$$

$$K_2(x, y) = \begin{cases} L_2(x, y), & \text{kai } 0 \leq x < y \leq 1, \\ M_2(x, y), & \text{kai } 0 \leq y \leq x \leq 1, \end{cases}$$

paprastai vadinamų lošimo branduoliais.

Šiame darbe reikalaujame, kad branduoliai tenkintų tokias sąlygas:

- funkcijos  $L_1, M_1$  didėja  $x$ -ui didėjant, kai  $y$ -ko reikšmė fiksuota,
- $L_1(y, y) > M_1(1, y)$  visiems  $y \in [0, 1]$ ,
- funkcijos  $L_2, M_2$  didėja  $y$ -kui didėjant, kai  $x$ -so reikšmė fiksuota,
- $M_2(x, x) > L_2(x, 1)$  visiems  $x \in [0, 1]$ .

Taip apibrėžtame lošime egzistuoja be galo daug (kontinuumas) pusiausvyrų grynųjų strategijomis. Tiksliau kalbant, bet kokia sutampančių grynųjų strategijų pora  $x_0 = a$ ,  $y_0 = a$ ,  $a \in [0, 1]$  yra Nešo pusiausvyra, nes nelygybės

$$K_1(a, a) \geq K_1(x, a), \quad \text{kai } x \in [0, 1],$$

$$K_2(a, a) \geq K_2(a, y), \quad \text{kai } y \in [0, 1],$$

yra teisingos, kai sąlygos a), b), c), d) yra išpildytos.

Esant tokiai pusiausvyrai I-ojo lošėjo išlošis yra  $K_1(a, a) = L_1(a, a)$ , o II-ojo išlošis yra  $K_2(a, a) = M_2(a, a)$ . Galimi atvejai, kai vienam lošėjui geresnė pusiausvyra  $(a, a)$  negu pusiausvyra  $(b, b)$ , o kitam atvirkščiai. Ieškant būdo derinti lošėjų interesus, natūralu ištyrinėti tokias Nešo pusiausvyras, kuriose abu lošėjai su teigiamomis tikimybėmis

naudotų tas dvi grynąsias strategijas. Žinoma, jeigu tokios pusiausvyros egzistuoja. Tokių mišrių strategijų spektrai  $S_1$  ir  $S_2$  abiemis lošėjams sutaptų:  $S_1 = S_2 = \{a, b\}$ .

Nustatysime būtinas ir pakankamas tokių pusiausvyrų egzistavimo sąlygas.

Ieškomos pusiausvyros  $(X, Y)$  strategijas pažymėkime  $X = (\alpha, 1 - \alpha)$ ,  $Y = (\beta, 1 - \beta)$ . Čia  $\alpha, \beta$  yra tikimybės, su kuriomis I ir II lošėjas renkasi grynąją strategiją  $a$ , o  $1 - \alpha, 1 - \beta$  yra tikimybės, su kuriomis jie renkasi strategiją  $b$ .

Tuomet būtinos ir pakankamos sąlygos, kad  $(X_0, Y_0)$  būtų Nešo pusiausvyra lošimo plėtinyje, kai strategijos mišrios, yra šios:

$$K_1(a, Y_0) = K_1(b, Y_0) = v \quad (\text{pažymime}), \quad (1)$$

$$K_1(x, Y_0) \leq v, \quad \text{kai } x \in [0; 1], \quad (2)$$

$$K_2(X_0, a) = K_2(X_0, b) = w \quad (\text{pažymime}), \quad (3)$$

$$K_2(X_0, y) \leq w, \quad \text{kai } y \in [0, 1]. \quad (4)$$

(čia  $v$  ir  $w$  yra atitinkamai I-ojo ir II-ojo lošėjų išlošiai situacijoje  $(X_0, Y_0)$ ).

**1 teorema.** *Kokie bebūtų  $a \in [0, 1]$ ,  $b \in [0, 1]$ ,  $a < b$ , egzistuoja ir yra vienintelė mišrių strategijų pora  $(X_0, Y_0)$ , tenkinanti (1) ir (3) sąlygas.*

*Irodymas.* Išspręsimė lygtį

$$K_1(a, Y) = K_1(b, Y),$$

t.y.

$$\beta \cdot L_1(a, a) + (1 - \beta) \cdot L_1(a, b) = \beta \cdot M_1(b, a) + (1 - \beta)L_1(b, b).$$

Kadangi, esant patenkintom a), b) sąlygoms yra teisingos nelygybės

$$L_1(b, b) - L_1(a, b) > 0, \quad L_1(a, a) - M_1(b, a) > 0,$$

tai ši lygtis turi vienintelį sprendinį

$$\beta_0 = \frac{L_1(b, b) - L_1(a, b)}{L_1(b, b) - L_1(a, b) + L_1(a, a) - M_1(b, a)},$$

tenkinanti ir sąlygą  $0 < \beta_0 < 1$ . Taigi, vienintelė strategija

$$Y_0 = (\beta_0, 1 - \beta_0) = \left( \frac{L_1(b, b) - L_1(a, b)}{L_1(b, b) - L_1(a, b) + L_1(a, a) - M_1(b, a)}, \frac{L_1(a, a) - M_1(b, a)}{L_1(b, b) - L_1(a, b) + L_1(a, a) - M_1(b, a)} \right) \quad (5)$$

tenkina (1) sąlygą.

Analogiškai, esant patenkintoms c), d) sąlygoms, lygtis

$$K_2(X, a) = K_2(X, b)$$

turi vienintelį sprendinį

$$\alpha_0 = \frac{M_2(b, b) - M_2(b, a)}{M_2(b, b) - M_2(b, a) + M_2(a, a) - L_2(a, b)}.$$

Tas sprendinys tenkina sąlygą  $0 < \alpha_0 < 1$ . Taip parodome, kad strategija

$$X_0 = (\alpha_0, 1 - \alpha_0) = \left( \frac{M_2(b, b) - M_2(b, a)}{M_2(b, b) - M_2(b, a) + M_2(a, a) - L_2(a, b)}, \frac{M_2(a, a) - L_2(a, b)}{M_2(b, b) - M_2(b, a) + M_2(a, a) - L_2(a, b)} \right) \quad (6)$$

yra vienintelė mišrioji strategija, tenkinanti (3) sąlygą. Teorema įrodyta.

**2 teorema.** Tarkime, kad  $a \in [0, 1]$ ,  $b \in [0, 1]$ ,  $a < b$  ir branduoliai  $K_1$ ,  $K_2$  tenkina a), b), c), d) sąlygas.

Tuomet 1 teoremoje surastos mišriosios strategijos  $X_0 = (\alpha_0, 1 - \alpha_0)$ ,  $Y_0 = (\beta_0, 1 - \beta_0)$  tenkina (2) ir (4) sąlygas tada ir tik tada, kai

$$\frac{L_1(a, a) - M_1(b, a)}{L_1(b, b) - L_1(a, b)} \geq \frac{M_1(1, a) - M_1(b, a)}{L_1(b, b) - M_1(1, b)}, \quad (7)$$

$$\frac{M_2(a, a) - L_2(a, b)}{M_2(b, b) - M_2(b, a)} \geq \frac{L_2(a, 1) - L_2(a, b)}{M_2(b, b) - L_2(b, 1)}. \quad (8)$$

Įrodymas. Strategija  $Y_0$  tenkina (2) nelygybę, jei

$$\begin{aligned} & \beta_0 \cdot L_1(x, a) + (1 - \beta_0) \cdot L_1(x, b) \\ & \leq \beta_0 \cdot L_1(a, a) + (1 - \beta_0)L_1(a, b), \quad \text{kai } x \in [0, a), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \beta_0 \cdot M_1(x, a) + (1 - \beta_0)L_1(x, b) \\ & \leq \beta_0 \cdot M_1(b, a) + (1 - \beta_0)L_1(b, b), \quad \text{kai } x \in (a, b), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \beta_0 \cdot M_1(x, a) + (1 - \beta_0)M_1(x, b) \\ & \leq \beta_0 \cdot M_1(b, a) + (1 - \beta_0)L_1(b, b), \quad \text{kai } x \in (b, 1]. \end{aligned} \quad (11)$$

Nelygybės (9) ir (10) yra teisingos, nes funkcijos  $L_1$  ir  $M_1$  atitinkamuose intervaluose didėja (sąlyga a)).

Kad būtų teisinga (11) nelygybė, būtina, kad nelygybė būtų teisinga, kai  $x = 1$ , t.y.

$$\beta_0 \cdot (M_1(1, a) - M_1(b, a)) \leq (1 - \beta_0)(L_1(b, b) - M_1(1, b)).$$

Ši sąlyga yra ir pakankama, kad būtų patenkinta nelygybė (11), nes  $M_1(x, a)$  ir  $M_1(x, b)$  intervale  $(b, 1]$  didėja. Įrašę atitinkamas  $\beta_0$  ir  $1 - \beta_0$  reikšmes, gauname

$$\begin{aligned} & \frac{(L_1(b, b) - L_1(a, b))(M_1(1, a) - M_1(b, a))}{L_1(b, b) - L_1(a, b) + L_1(a, a) - M_1(b, a)} \\ & \geq \frac{(L_1(a, a) - M_1(b, a))(L_1(b, b) - M_1(1, b))}{L_1(b, b) - L_1(a, b) + L_1(a, a) - M_1(b, a)}. \end{aligned}$$

Pastaroji nelygybė, kadangi  $L_1(b, b) - L_1(a, b) > 0$ ,  $L_1(a, a) - M_1(b, a) > 0$ ,  $M_1(1, a) - M_1(b, a) > 0$ ,  $L_1(b, b) - M_1(1, b) > 0$  (sąlyga b)) ekvivalenti (7). Panašiai, remdamiesi sąlygomis c), d), gauname, kad nelygybės

$$\alpha_0 K_2(a, b) + (1 - \alpha_0) M_2(b, b) \geq \alpha_0 \cdot L_2(a, 1) + (1 - \alpha_0) L_2(b, 1) \quad (12)$$

išpildymas yra būtina ir pakankama sąlyga, kad  $X_0$  tenkintų (4) sąlygą. O nelygybei (12) yra ekvivalenti (8). Teorema įrodyta.

Taigi, esant patenkintoms sąlygoms a), b), c), d) ir (7), (8), egzistuoja ir yra vienintelė Nešo pusiausvyra  $X_0, Y_0$  su spektrais  $S_1 = S_2 = \{a, b\}$ . Pusiausvyros strategijų išraiškos pateiktos (5) ir (6) formulėse. Pasinaudodami (1) ir (3) lygybėmis, apskaičiuojame lošėjų išlošius esant šiai pusiausvyrai:

$$v = \frac{L_1(a, a) \cdot L_1(b, b) - L_1(a, b) \cdot M_1(b, a)}{L_1(b, b) - L_1(a, b) + L_1(a, a) - M_1(b, a)}, \quad (13)$$

$$w = \frac{M_2(a, a) \cdot M_2(b, b) - M_2(b, a) \cdot L_2(a, b)}{M_2(b, b) - M_2(b, a) + M_2(a, a) - L_2(a, b)}. \quad (14)$$

Aptarsime tokių pusiausvyrų sekų konvergavimą.

Sakykime, kad skaičių poroms  $(a_n, b_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ; tokioms, kad  $a_n \in [0, 1]$ ,  $b_n \in [0, 1]$ ,  $a_n < b_n$ , yra patenkintos ir (7), (8) nelygybės. Tarkime, kad  $\lim a_n = a$ ,  $\lim b_n = b$ . Kadangi tuomet kiekvienai porai  $(a_n, b_n)$  pagal 1, 2 teoremas atitinka vienintelė Nešo pusiausvyra  $(X_n, Y_n)$  bei išlošiai  $v_n, w_n$ :

$$\begin{aligned} X_n &= (\alpha_n, 1 - \alpha_n) \\ &= \left( \frac{M_2(b_n, b_n) - M_2(b_n, a_n)}{M_2(b_n, b_n) - M_2(b_n, a_n) + M_2(a_n, a_n) - L_2(a_n, b_n)}, \right. \\ & \quad \left. \frac{M_2(a_n, a_n) - L_2(a_n, b_n)}{M_2(b_n, b_n) - M_2(b_n, a_n) + M_2(a_n, a_n) - L_2(a_n, b_n)} \right), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} Y_n &= (\beta_n, 1 - \beta_n) \\ &= \left( \frac{L_1(b_n, b_n) - L_1(a_n, b_n)}{L_1(b_n, b_n) - L_1(a_n, b_n) + L_1(a_n, a_n) - M_1(b_n, a_n)}, \right. \end{aligned}$$

$$\left. \frac{L_1(a_n, a_n) - M_1(b_n, a_n)}{L_1(b_n, b_n) - L_1(a_n, b_n) + L_1(a_n, a_n) - M_1(b_n, a_n)} \right), \quad (16)$$

$$v_n = \frac{L_1(a_n, a_n) \cdot L_1(b_n, b_n) - L_1(a_n, b_n) \cdot M_1(b_n, a_n)}{L_1(b_n, b_n) - L_1(a_n, b_n) + L_1(a_n, a_n) - M_1(b_n, a_n)}, \quad (17)$$

$$w_n = \frac{M_2(a_n, a_n) \cdot M_2(b_n, b_n) - M_2(b_n, a_n) \cdot L_2(a_n, b_n)}{M_2(b_n, b_n) - M_2(b_n, a_n) + M_2(a_n, a_n) - L_2(a_n, b_n)} \quad (18)$$

galima analizuoti atitinkamų sekų  $X_n, Y_n, v_n, w_n$  konvergavimo klausimus. Jeigu jos konverguoja, tai ar ribiniai vektoriai  $\bar{X}, \bar{Y}$  sudaro pusiausvyrą, jos spektras būtų  $\{a, b\}$ ? Ar ribinės  $v_n$  ir  $w_n$  reikšmės yra ribinės pusiausvyros išlošiai?

Kadangi pusiausvyra su spektru  $\{a, b\}$  gali būti tik  $(X_0, Y_0)$  (strategijos  $X_0, Y_0$  yra pateiktos (5), (6) formulėmis), tai būtina, kad būtų  $\lim X_n = X_0, \lim Y_n = Y_0$ . Šios lygybės gali būti teisingos ir esant funkcijoms  $L_1, M_1, L_2, M_2$  netolydžioms. Tuomet tam, kad ribinės strategijos sudarytų Nešo pusiausvyrą, pakaktų, kad taškams  $a, b$  būtų teisingos (7) ir (8) nelygybės. To negalima užtikrinti, kai  $L_1, M_1, L_2, M_2$  nėra tolydžios.

Kita vertus, kai  $L_1, M_1, L_2, M_2$  yra tolydžios funkcijos, pusiausvyros  $(X_n, Y_n)$  ir  $v_n, w_n$  konverguoja atitinkamai į  $(\bar{X}, \bar{Y})$  ir  $v, w$ . Tačiau net tik funkcijos  $M_1(1, y)$  ar  $L_2(x, 1)$  netolydumas gali lemti, kad kuri nors iš sąlygų (7) ar (8) nebus išpildytos ir ribinės strategijos nesudarys Nešo pusiausvyros.

## Literatūra

- [1] Г. Оуэн, *Теория Игр*, Мир, Москва (1971).
- [2] С. Карлин, *Математические методы в теории игр, Программировании и Экономике*, Мир, Москва (1964).
- [3] Г.Н. Любин, В.Г. Суздаль, *Введение в прикладную теорию игр*, Наука, Москва (1981).
- [4] Д. Суджюте, Необходимые и достаточные условия равновесия по Нэшу в играх на единичном квадрате, *Лит. матем. сб.*, 27(2), 178–185 (1983).

## Nash equilibria – existence, uniqueness and convergence – in two person non-zero games of timing

### D. Sūdžiūtė

Special class of Nash equilibria with spectra  $S_1 = S_2 = \{a, b\}$  is investigated in two person non-zero games of timing.

The formulas of the existing and unique equilibria are derived when the kernels satisfy some conditions of monotonicity and boundedness.

Possibilities of convergence of sequences of the equilibria when their spectra  $\{a_n, b_n\}$  converge, are surveyed.