Liet. matem. rink., T. 40, spec. nr., 11–17

Kubiliaus nelygybės analogas polinomų pusgrupėje

Gintautas BAREIKIS (VU)
el. paštas: gintautas.bareikis@maf.vu.lt

Įvadas

Raidėmis $\mathcal{N}, \mathcal{R}, \mathcal{C}$ žymėsime natūraliųjų, realiųjų ir kompleksinių skaičių aibes. Simboliais $c_i, i = 0, 1, \ldots,$ žymėsime absoliučias konstantas. Aibės A elementų skaičių žymėsime $|A|$.

Sakysime, kad polinomas yra normuotas, jeigu jo vyriausias koeficientas lygus 1. F_q yra baigtinis skaičių kūnas, čia $q = p^{\alpha}$, p yra pirminis, $\alpha \in \mathcal{N}$. Raide $\mathcal{M}$ mes žymime normuotų polinomų, virš baigtinio skaičių kūno F_q, pusgrupę, kurioje apibrėžta polinomų daugybos operacija. Vienetinis šios pusgrupės elementas yra nulinio laipsnio polinomas $f \equiv 1$. Simboliu $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{M}$, $n \in \mathcal{N}$ žymėsime normuotų neredukuojamų n-ojo laipsnio polinomų, aibę, P – normuoti neredukuojami polionomai.

Polinomo $a \in \mathcal{M}$ laipsnį žymėsime simboliu $\partial(a)$.

Kiekvienas $a \in \mathcal{M}$ vieninteliu būdu užrašomas taip:

$$a = \prod_{p} p^{\alpha(p)},$$

čia p yra neredukuojamas normuotas polinomas, $\alpha(p)$ polinomo p kartotinumas a skaidinyje. Žinoma, kad kokie bebūtų $a, b \in \mathcal{M}$, yra teisingas sąryšis:

$$\partial(ab) = \partial(a) + \partial(b), \quad \forall a, b \in \mathcal{M}.$$

Be to

$$\left|\{a \in \mathcal{M}; \partial(a) = n\}\right| = q^n.$$

Normuotus pusgrupės $\mathcal{M}$ polinomus žymėsime raidėmis a, b, e, d.

Sakysime, kad polinomas a lygsta polinomui e moduliu b ($a \equiv e \mod b$), jeigu egzistuoja polinomas d toks, kad teisinga lygybė: $a = e + db$. Simboliu $\pi(m; b, a)$ žymėsime normuotų, neredukuojamų polinomų, kurių laipsnis $\partial(p) = m \in \mathcal{N}$ ir kurie lygsta polinomui a moduliu b, skaičių.

Pažymėkime:

$$\varphi(a) = \#\{b \in \mathcal{M}; \partial(a) = \partial(b),\ (a, b) = 1\}.$$

Yra žinoma, kad jeigu $p \in \mathcal{P}$, tai $\varphi(p) = q^{\partial(p)} - 1$. Be to, kiekvienam $a \in \mathcal{M}$ teisinga lygybė:

$$\varphi(a) = q^{\partial(a)} \prod_{p|a} \left(1 - \frac{1}{q^{\partial(p)}}\right).$$

Aišku, kad $\varphi(a)$, $a \in \mathcal{M}$ yra multiplikatyvi funkcija.

Pažymėkime:

$$Q_m = \{p+1; p \in \mathcal{P}_m\}.$$

M. Car [1] įrodė tokį teiginį:

1 lema. *Tarkime, kad $a, b \in \mathcal{M}$, $(a,b) = 1$. Tada*

$$\left|\pi(m; b, a) - \frac{1}{\varphi(b)} \cdot \frac{q^m}{m}\right| \leqslant (1 + \partial(b)) q^{\frac{m}{2}}.$$

Be to

$$\frac{q^m}{m} - \frac{2q^{m/2}}{m} \leqslant |Q_m| \leqslant \frac{q^m}{m}, \tag{1}$$

kai $m \in \mathcal{N}$.

Rezultatas

Bet kokiam $a \in Q_m$ apibrėžkime

$$f(a) = \sum_{p|a} f(p), \quad A(l) = \sum_{\partial(p) \leqslant l} \frac{f(p)}{q^{\partial(p)} - 1}, \quad B^2(l) = \sum_{\partial(p) \leqslant l} \frac{f^2(p)}{q^{\partial(p)} - 1}.$$

Be to $S(m) = q^m/m$.

Teisinga tokia

Teorema. *Tarkime, kad $\alpha \in [0, 2)$. Tada egzistuoja realus skaičius $c = c(\alpha)$, su kuriuo teisinga nelygybė:*

$$\left(\frac{1}{S(m)} \sum_{a \in Q_m} |f(a) - A(m)|^{\alpha}\right)^{1/\alpha} \leqslant cB(m), \tag{2}$$

tolygiai visoms funkcijoms $f : Q_m \to C$.

Įrodymas. Pažymėkime

$$g_1(a) = \sum_{\substack{p|a \\ \partial(p)\leqslant\varepsilon m}} f(p) \quad \text{ir} \quad g_2(a) = \sum_{\substack{p|a \\ \partial(p)>\varepsilon m}} f(p),$$

čia $\varepsilon < 1/2$. Iš pradžių tarkime, kad $\forall a \in Q_m, f(a) \geqslant 0$. Naudodami c_α nelygybę, nagrinėjamą (2) sumą įvertinkime taip:

$$\sum_{a\in Q_m} \left|f(a) - A(m)\right|^\alpha \leqslant c(\alpha) \sum_{a\in Q_m} \left|g_1(a) - A(\varepsilon m)\right|^\alpha$$
$$+ c(\alpha) \sum_{a\in Q_m} \left|g_2(a) - A(m) + A(\varepsilon m)\right|^\alpha =: c(\alpha)(S_1 + S_2), \tag{3}$$

čia $c(\alpha) = \max\{1, 2^{\alpha-1}\}$.

Pastebėsime, kad funkcija $h(\alpha) = \left(1/n \sum_{k=1}^{n} x_k^\alpha\right)^{1/\alpha}$ yra nemažėjanti, $x_k \geqslant 0$, todėl $h(\alpha) \leqslant h(2)$.

Įvertinkime (3) reiškinio pirmąją sumą, naudodami minėtąją $h(\alpha)$ savybę. Turime

$$S_1 \leqslant \sum_{a\in Q_m} \left|g_1(a) - A(\varepsilon m)\right|^2$$
$$= \sum_{a\in Q_m} \left(g_1(a)\right)^2 - 2\sum_{a\in Q_m} g_1(a)A(\varepsilon m) + S(m)A^2(\varepsilon m). \tag{4}$$

Įvertinsime (4) lygybės pirmąjį dėmenį. Remdamiesi 1 lema galime tvirtinti, kad

$$\sum_{a\in Q_m} g_1^2(a) = \sum_{a\in Q_m} \Bigg(\sum_{\substack{p|a \\ \partial(p)\leqslant\varepsilon m}} f(p)\Bigg)^2 \leqslant \sum_{\partial(p)\leqslant\varepsilon m} f^2(p) \sum_{\substack{a\in Q_m \\ a\equiv 0 \bmod p}} 1$$
$$+2\sum_{\substack{\partial(p)\leqslant\varepsilon m \\ \partial(r)\leqslant\varepsilon m \\ p\neq r}} f(p)f(r) \sum_{\substack{a\in Q_m \\ a\equiv 0 \bmod (pr)}} 1 \leqslant S(m)\left\{c_0B^2(\varepsilon m) + A^2(\varepsilon m)\right\}, \quad r,p\in P. \tag{5}$$

Nagrinėsime (4) reiškinio antrąjį dėmenį. Naudodamiesi 1 lema, Koši-Buniakovskio nelygybe, bei 3.1 lema (žr. [3]) gauname, kad

$$A(\varepsilon m) \sum_{a\in Q_m} g_1(a) \geqslant S(m)A^2(\varepsilon m) - S(m)B^2(\varepsilon m)\sqrt{m\varepsilon \ln(\varepsilon m)}\, q^{-m(1-\varepsilon)/2}.$$

Naudodami pastarąją bei (5) nelygybes, (4) reiškinį įvertiname taip:

$$S_1 \leqslant c_1 S(m)B^2(\varepsilon m). \tag{6}$$

Nagrinėsime (3) reiškinio antrąjį dėmenį S_2. Naudodamiesi c_α nelygybe, bei sąryšiu (1) gauname tokį įvertį:

$$\begin{aligned} S_2 &\leqslant c(\alpha)\sum_{a\in Q_m} g_2^\alpha(a) + c(\alpha)\Bigg(\sum_{\varepsilon m<\partial(p)\leqslant m}\frac{f(p)}{\varphi(p)}\Bigg)^\alpha \sum_{a\in Q_m} 1 \\ &\leqslant c(\alpha)\Bigg(\sum_{a\in Q_m} g_2^\alpha(a) + \mathrm{O}\Big(\frac{q^m}{m}B^\alpha(m)\Big)\Bigg). \end{aligned} \tag{7}$$

Įvertinsime paskutiniojo reiškinio sumą, esančią dešinėje pusėje. Iš pradžių parodysime, kad bet kokiam fiksuotam $l \in \mathcal{N}$ ir fiksuotam skaičiui $\varepsilon < 0.5$, teisinga nelygybė:

$$S = \sum_{\varepsilon m<\partial(p)\leqslant m} q^{\partial(p)(l-1)}\pi^l(m;-1,p) < c_2\Big(\frac{q^m}{m}\Big)^l. \tag{8}$$

Tarkime, kad k_i, bet kokie, nenulinio laipsnio polinomai. Pažymėkime

$$N(m;k_1,\dots,k_l) = \sideset{}{^*}\sum q^{\partial(p)(l-1)}, \tag{9}$$

čia simboliu $\sum^*$ žymime sumą, kurioje sumuojama neredukuojamų polinomų p, $k_ip \in Q_m$ visiems $i \in \{1,\dots,l\}$, laipsniais $\partial(p)$ tokiais, kad $\varepsilon m < \partial(p) \leqslant m$.

Naudodami (9) lygybę, (8) reiškinio kairiosios pusės sumą įvertiname taip:

$$S \leqslant \sum_{1\leqslant\partial(k_1)<\ldots<\partial(k_l)\leqslant(1-\varepsilon)m} N(m;k_1,\dots,k_l). \tag{10}$$

Simboliu $\rho(d)$ pažymėkime liekanų klasių a mod d, kurios yra lyginio

$$t(a) := a\prod_{i=1}^{l}(k_ia-1) \equiv 0(\mathrm{mod}\, d),$$

sprendiniai, skaičių.

Pažymėkime

$$K = \prod_{i=1}^{l} k_i \prod_{1\leqslant i<j\leqslant l}(k_j-k_i).$$

Atkreipsime dėmesį, kad jei p yra neredukuojamas polinomas, turintis savybes $\partial(p) \geqslant l+1 \wedge p \not| K$, tai $\rho(p) = l+1$.

Parinkime $r \in \mathcal{R}$ tokiu būdu: $l+1 < r < \varepsilon m/2$. Tegu

$$P_r = \prod_{\substack{l+1<\partial(p)\leqslant r \\ p \not| K}} p.$$

Kaip paprastai, tuščia sandauga lygi vienetui. Tarkime, kad $a \in \mathcal{M}$, $\partial(a) \leqslant m$. Tada

$$N(m; k_1, \ldots, k_l) \leqslant \sum_{\substack{\partial(a)=m-\partial(k_l) \\ (t(a),P_r)=1}} q^{\partial(a)(l-1)} = q^{(m-\partial(k_l))(l-1)} \sum_{\substack{\partial(a)=m-\partial(k_l) \\ (t(a),P_r)=1}} 1.$$

Pastebėsime, kad

$$A_d := \sum_{\substack{\partial(a)=m \\ t(a)\equiv 0(\bmod d)}} 1 = q^{m-\partial(d)}\rho(d).$$

Pasinaudoję 5.4 lema (žr. [3]), kai $Lr < \varepsilon m$, gauname tokią nelygybę:

$$N(m; k_1, \ldots, k_l) \leqslant \left(\frac{q^m}{q^{\partial(k_l)}m}\right)^l \frac{c_3}{m} \exp\Big\{ \sum_{\substack{p|K \\ l+1<\partial(p)\leqslant r}} \frac{l+1}{q^{\partial(p)}} \Big\}. \tag{11}$$

Pažymėję

$$T(k_l) = \sum_{\partial(k_1)<\ldots<\partial(k_{l-1})\leqslant\partial(k_l)} \exp\Big\{ \sum_{p|K} \frac{l+1}{q^{\partial(p)}} \Big\},$$

(11) nelygybę perrašome tokiu būdu:

$$N(m; k_1, \ldots, k_l) \leqslant c_4 \Big(\frac{q^m}{q^{\partial(k_l)}m}\Big)^l \frac{1}{m} \sum_{\partial(k)\leqslant\varepsilon m} \frac{T(k)}{q^{\partial(k)m}}. \tag{12}$$

Nagrinėsime reiškinį $T(k_l)$. Matome, kad

$$\begin{aligned} T(k_l) \leqslant & \sum_{\partial(k_1)<\ldots<\partial(k_{l-1})\leqslant\partial(k_l)} \exp\Big\{ \sum_{p|(K/D(k_{l-1}))} \frac{l+1}{q^{\partial(p)}} \Big\} \\ & \times \sum_{\partial(k_{l-1})\leqslant\partial(k_l)} \exp\Big\{ \sum_{p|D(k_{l-1})} \frac{l+1}{q^{\partial(p)}} \Big\} =: T_1 \cdot T_2, \end{aligned} \tag{13}$$

čia

$$D(k_{l-1}) = k_{l-1} \prod_{i=1}^{l-2} \big(k_{l-1} - k_i\big).$$

Visų pirma įvertinsime sumą T_2. Naudodamiesi akivaizdžia nelygybe $t_1 \ldots t_{l-1} \leqslant t_1^{l-1} + \ldots + t_{l-1}^{l-1}$, $t_i \in \mathcal{R}^+, i = 1 \ldots, l-1$, gauname, kad

$$T_2 = \sum_{i=0}^{l-2} \sum_{\partial(k_{l-1})\leqslant\partial(k_l)} \exp\Big\{ \sum_{\substack{p|k_{l-1}\vee \\ p|(k_{l-1}-k_i)}} \frac{l+1}{q^{\partial(p)}} \Big\} \leqslant c_5 q^{\partial(k_l)}. \tag{14}$$

(13) reiškinio sumą T_1 galime įvertinti tokiu būdu:

$$T_1 \leqslant c_6 q^{(l-1)\partial(k_l)} \sum_{d|k_l} \frac{(l+1)^{\omega(d)}}{q^{\partial(d)}}. \tag{15}$$

Remdamiesi (14) ir (15) įverčiais, bei (12) ir (13) nelygybėmis gauname, kad

$$\sum_{1 \leqslant \partial(k_1) < \ldots < \partial(k_l) \leqslant \varepsilon m} N(m; k_1, \ldots, k_l)$$
$$\leqslant c_7 \left(\frac{q^m}{m}\right)^l \frac{1}{m} \sum_{\partial(d)=1}^{\infty} \frac{(l+1)^{\omega(d)}}{q^{\partial(d)}} \sum_{\partial(t) \leqslant \varepsilon m - \partial(d)} \frac{1}{q^{\partial(td)}} \leqslant c_8 \left(\frac{q^m}{m}\right)^l.$$

Iš paskutiniosios nelygybės bei (9) lygybės išplaukia (8) nelygybė.

Nagrinėsime (7) nelygybę. Tarkime, kad $l \in \mathcal{N}$. Pažymėkime $\beta = 2(1 - 1/l)$. Tada, $l - 1 = \beta/(2-\beta)$ ir $l = 2/(2-\beta)$.

Turime, kad

$$\sum_{a \in Q_m} |g_2(a)|^\beta \leqslant c_9 \sum_{\varepsilon m < \partial(p) \leqslant m} f^\beta(p) \pi(m; -1, p) =: S_3.$$

Taikydami Holderio nelygybę su rodikliais $\beta_1 = 2/\beta$ ir $\beta_2 = 2/(2-\beta)$ gauname tokį sumos S_3 įvertį:

$$S_3 \leqslant \left(\sum_{\varepsilon m < \partial(p) \leqslant m} \frac{f^2(p)}{q^{\partial(p)}}\right)^{\beta/2} \sum_{\varepsilon m < \partial(p) \leqslant m} \left(q^{\partial(p)\beta/(2-\beta)} \pi^{2/(2-\beta)}(m; -1, p)\right)^{(2-\beta)/2}$$
$$\leqslant c_{10} B^\beta(m) S^\beta(m).$$

Tarkime, kad $0 < \alpha < 2$ bet koks pasirinktas skaičius. Tuomet egzistuoja skaičius $l \in \mathcal{N}$ toks, kad $\alpha \leqslant \beta$. Bet tada

$$\left(\frac{1}{S(m)} \sum_{a \in Q_m} g_2^\alpha(a)\right)^{1/\alpha} \leqslant \left(\frac{1}{S(m)} \sum_{a \in Q_m} g_2^\beta(a)\right)^{1/\beta} \leqslant c_{11} B(m).$$

Naudodamiesi paskutiniuoju įverčiu, (7) ir (6) nelygybėmis, iš (3) gauname teoremos įrodymą, kai $f(a) \geqslant 0$.

Jeigu funkcija $f \in \mathcal{R}$, įgyja abiejų ženklų reikšmes, mes apibrėžiame funkciją $f^\pm(p) = \max\{\pm f(p), 0\}$. Tada

$$(f(a) - A(m))^2 \leqslant 2(f^+(a) - A^+(m))^2 + 2(f^-(a) - A^-(m))^2.$$

Jeigu funkcija $f \in \mathcal{C}$, tai atskyrę funkcijos realiąsias ir menamąsias dalis elgiamės aukščiau aprašytu būdu.

Literatūra

[1] M. Car, Le théorème de Chen pour $F_q[X]$, *Diss. Math.*, CCXXIII, 95 (1972).
[2] S.D. Cohen, The function field abstract prime number theorem, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **106**, 7–12 (1989).
[3] W.B. Zhang, Probabilistic number theory in additive arithmetic semigroups I, In: *Analytic Number Theory, Prog. Math.*, **138**, Birkhauser, pp. 839–885 (1996).

The Kubilius inequality in tje polynomial semigroup

G. Bareikis

Let $\mathcal{P}$ be a set of primary irreducible polynomials and $Q_m = \{p + 1; p \in \mathcal{P}, \partial(p) = m\}$. Kubilius inequality for additive functions $f : Q_m \to C$ is proved.