Liet. matem. rink., T. 40, spec. nr., 61–67

Analizinis kombinatorinių struktūrų uždavinys

Eugenijus MANSTAVIČIUS (VU), Rimantas SKRABUTĖNAS (VPU)
el. paštas: eugenijus.manstavicius@maf.vu.lt

1. Įžanga ir rezultatai

Daugelis kombinatorinių n didumo struktūrų suskaičiavimo bei funkcijų, apibrėžtų tokiose struktūrose, sumavimo uždavinių susiveda į funkcijos, turinčios specifinį pavidalą

$$F(y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n y^n = H(y) \exp\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{j} y^j \right\} =: H(y) \exp\left\{L(y)\right\},$$

n-ojo Tayloro koeficiento f_n asimptotikos tyrimą. Čia $H(y)$ bei $L(y)$ – analizinės srityje $|y| < 1$ funkcijos. Be to, kai $|y| = 1$, funkcija $H(y)$ yra ir tolygiai diferencijuojama (vadinkime tai „sąlyga (H)“), o $L(y)$ turi ypatingųjų taškų. Uždavinys nėra sudėtingas, jei abi funkcijos yra analiziškai pratęsiamos šio apskritimo išorėje. [2] ir vėliau publikuotuose darbuose galima rasti panašių šios problemos sprendimo variantų. Kai $|y| = 1$ yra natūrali pratęsimo riba, tenka ieškoti kitų metodų. Kai kuriais atvejais galima taikyti tauberines teoremas [4]. Deja, jose, kaip ir B.L.J. Braaksmos ir D. Starko [1] pagrindiniame rezultate nebuvo liekamųjų narių įverčių. Minėtą uždavinį, keldamas individualias sąlygas koeficientams a_j su visais pakankamai dideliais j, neseniai nagrinėjo H.-K. Hwangas [3]. Jis nepastebėjo mūsų [6] straipsnio, kuriame buvo atskleista bendrų vidurkinių sąlygų panaudojimo galimybė. Dabar, plėtodami šią pastarojo darbo idėją, mes ištiriame, kaip a_j pasiskirstymas aritmetinėse progresijose įtakoja koeficientų f_n elgesį. Taikydami gautą analizinį rezultatą, apibendriname ir patiksliname kartotinių n svorio aibių skaičiaus asimptotiką, gautą [5] straipsnyje.

Tarkime, kad egzistuoja tokios kompleksinės konstantos $\gamma_s \in \mathbb{R}$, $s = 0, \ldots, m-1$, kad koeficientai a_j tenkina sąlygą

$$\sum_{s=0}^{m-1} \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \equiv s(m)}} q^j (a_j - \gamma_s) =: \rho(n), \quad |\rho(n)| \leqslant q^n r(n). \tag{1}$$

Čia $q > 1$ – konstanta. Nykstamai mažėjanti funkcija $r(n)$ yra tokia, kad $\int_1^\infty \frac{r(u)}{u} du \leqslant c_1 < \infty$. Pažymėkime:

$$L(y) =: \sum_{s=0}^{m-1} \gamma_s \sum_{\substack{j \geqslant 1 \\ j \equiv s(m)}} \frac{y^j}{j} + \sum_{s=0}^{m-1} P_s(y), \quad G(y) := H(y) \exp\left\{ \sum_{s=0}^{m-1} P_s(y) \right\},$$

$$W(y) := \prod_{l=0}^{m-1} \left(1 - y\xi^l\right)^{-\vartheta_l}, \quad W_k(y) := (1 - y\xi^k)^{\vartheta_k} W(y),$$

$$\vartheta_k := \frac{1}{m} \sum_{s=0}^{m-1} \gamma_s \xi^{-sk}, \quad \xi(m) := \xi = \mathrm{e}^{2\pi i/m}, \quad m \in \mathbb{N},$$

$$R(n) := \max\left\{r(n), \frac{1}{n}\int_1^n r(u)\,\mathrm{d}u, \int_n^\infty \frac{r(u)}{u}\,\mathrm{d}u\right\}, \quad a^+ := \begin{cases} a, & \text{kai} \quad a \geqslant 0, \\ 0, & \text{kai} \quad a < 0. \end{cases}$$

Tegu, be to, $\max_{|y|\leqslant 1}\left(|H(y)| + |H'(y)|\right) =: c_2$, o $\max_{0\leqslant k\leqslant m-1} |\vartheta_k| =: c_3$.

1 teorema. *Jei patenkintos* (H) *ir* (1) *sąlygos ir $n \to \infty$, tai*

$$f_n = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{G(\xi^{-k})W_k(\xi^{-k})}{\Gamma(\vartheta_k)} \xi^{kn} n^{\vartheta_k - 1} + R^*(n),$$
$$R^*(n) = BR(n) \max_k \left\{ n^{(\Re\vartheta_k - 1)^+} \min\left\{\log n, |1 - \Re\vartheta_k|^{-1}\right\}\right\}.$$

Čia ir vėliau dydis B yra aprėžtas konstanta, priklausančia tik nuo c_1, c_2, c_3 ir q.

Nagrinėkime kartotinių n svorio aibių skaičiaus asimptotiką. Tegu $\mathcal{P}$ – aibė elementų su apibrėžta svorių funkcija $\delta : \mathcal{P} \to \mathbb{N}$. Tarkime, jog egzistuoja $m \in \mathbb{N}$, $q > 1$, $\gamma_s \in \mathbb{R}$, $s = 0, \ldots, m-1$ tokie, kad $\pi(j) := |\{p \in \mathcal{P} : \ \delta(p) = j\}| = \gamma_s q^j/j + \eta_s(j)$, jei $j \equiv s(m)$, ir $\eta_s(j)$ patenkina sąlygą

$$\Big| \sum_{s=0}^{m-1} \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ j\equiv s(m)}} j\eta_s(j) \Big| \leqslant q^n r(n). \tag{2}$$

Čia $r : [1, \infty) \to \mathbb{R}^+$ – monotoniškai mažėjanti funkcija, tenkinanti 1 teoremos sąlygą. *Kartotinė n svorio aibė* yra elementų iš $\mathcal{P}$ rinkinys su galimu pasikartojimu toks, kad jo elementų svorių suma yra n. Pažymėkime $p(n)$ tokių aibių skaičių bei $p(0) = 1$. Tiksli formulė

$$p(n) = \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_n \geq 0 \\ 1k_1 + \cdots + nk_n = n}} \prod_{j=1}^{n} \binom{\pi(j) + k_j - 1}{k_j}$$

yra labai nepatogi, todėl reikia ieškoti sekos $p(n)$ asimptotikų, kai žinomos $\pi(j)$ savybės.

Sekų $p(n)$ ir $\pi(j)$ generuojančias funkcijas jungia sąryšis (žr. [5])

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) z^n = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - z^j)^{-\pi(j)} = \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Pi(z^k)}{k}\right\} =: K(z)\mathrm{e}^{\Pi(z)},$$

$$\Pi(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi(j) z^j .$$

Išlaikydami kitus 1 teoremos žymenis ir ją pritaikę, gauname tokį rezultatą.

2 teorema. *Jei* $\pi(j)$ *patenkina* (2) *sąlygą, tai*

$$p(n) = q^n \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\xi^{kn} n^{\vartheta_k - 1} K(q^{-1}\xi^{-k})}{\Gamma(\vartheta_k)} \exp\Bigg\{ \sum_{s=0}^{m-1} \sum_{\substack{j \geqslant 1 \\ j \equiv s(m)}} \eta_s(j)(q\xi^k)^{-j} \Bigg\}$$
$$\times \prod_{\substack{0 \leqslant l \leqslant m-1 \\ l \neq k}} \left(1 - \xi^{l-k}\right)^{-\vartheta_l} + R^*(n).$$

Įrodymui pakanka pritaikyti 1 teoremą su $a_j = jq^{-j}\pi(j)$, $L(y) = \Pi(q^{-1}y)$ ir $H(y) = K(q^{-1}y)$.

Kai $m = 1$, $\gamma_0 \geq 1$, ir $r(n) = n^{-c}$, $c > 0$, tokia asimptotinė formulė išplaukia iš 3 teiginio, suformuluoto [3] H.-K. Hwango darbo 465 psl. Lygindami galime pastebėti, kad mūsų 1 teorema leidžia nagrinėti atvejus, kai $\pi(j)$ reikšmės priklauso nuo argumento buvimo aritmetinėse progresijose. Be to, galime imti žymiai lėčiau nykstamas funkcijas $r(n)$, netgi $(\log n)^{-2-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$.

2. 1 teoremos įrodymas

1 lema.

$$\exp\Bigg\{ \sum_{s=0}^{m-1} \gamma_s \sum_{\substack{n \geqslant 1 \\ n \equiv s(m)}} \frac{y^n}{n} \Bigg\} = \prod_{k=0}^{m-1} \left(1 - y\xi^k\right)^{-\vartheta_k} = W(y).$$

Įrodymas. Pakanka pasinaudoti lygybe

$$\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \exp\left\{ 2\pi i \frac{k}{m}(n-s) \right\} = \begin{cases} 1, & \text{kai} \quad n \equiv s(m), \\ 0, & \text{kai} \quad n \not\equiv s(m). \end{cases}$$

Lema įrodyta.

2 lema. *Iš* (1) *sąlygos srityje* $|y| \leqslant 1$ *išplaukia lygybė*

$$\sum_{s=0}^{m-1} P_s(y) = L(y) - \sum_{s=0}^{m-1} \gamma_s \sum_{\substack{j \geqslant 1 \\ j \equiv s(m)}} \frac{y^j}{j}$$

$$= \left(\log\frac{q}{y}\right)\int_1^\infty \rho(u)\frac{y^u\,\mathrm{d}u}{uq^u} + \int_1^\infty \rho(u)\frac{y^u\,\mathrm{d}u}{u^2q^u}. \tag{3}$$

Lema įrodoma taikant dalinį sumavimą.

Pažymėkime $r = \exp\{-n^{-1}\}$, $\tau = \arg y$.

3 lema. *Tarkime, kad yra patenkintos* (H) *ir* (1) *sąlygos. Tada:*

1. *$G(y)$ yra analizinė srityje $|y| < 1$.*
2. *Kai $|y| = r$, tai $G(y) = B$ ir $G'(y) = BnR(n)$.*
3. *Kai $|y| = r$ ir $|\tau + 2\pi k/m| \leqslant \varepsilon < \pi/m$, tai $G(y) = G(\xi^{-k}) + B|1 - y\xi^k|nR(n) + BR(n)$.*

Įrodymas. 1–2. Pirmieji du lemos tvirtinimai išplaukia iš funkcijos $G(y)$ išraiškos (3) formulės pagalba, (H) sąlygos ir 2 lemos išvados. Nagrinėdami išvestinę, pasinaudojame įverčiais:

$$\exp\left\{\sum_{s=0}^{m-1} P_s(y) - \sum_{s=0}^{m-1} P_s(\xi^{-k})\right\},$$

$$\sum_{s=0}^{m-1} P_s(y) = B\int_1^n |\rho(u)|\frac{y^u\mathrm{d}u}{q^u} + Bnr(n) = BnR(n).$$

3. Pasinaudoję (3), nagrinėjame skirtumą

$$\sum_{s=0}^{m-1} P_s(y) - \sum_{s=0}^{m-1} P_s(\xi^{-k}) =: \log\frac{\xi^{-k}}{y}\cdot M_0 + \log\frac{q}{\xi^{-k}}\cdot M_1 + M_2 + \log\frac{\xi^{-k}}{y}\cdot\Sigma(n).$$

Čia

$$M_0 = \int_1^n \rho(u)\frac{y^u}{uq^u}\,\mathrm{d}u = B, \quad M_1 = \int_1^n \rho(u)\frac{y^u - \xi^{ku}}{uq^u}\,\mathrm{d}u = B|1 - y\xi^k|nR(n),$$

$$M_2 = \int_1^n \rho(u)\frac{y^u - \xi^{ku}}{u^2q^u}\mathrm{d}u = B|1 - y\xi^k|,$$

$$\Sigma(n) = \int_n^\infty \rho(u)\frac{y^u}{uq^u}\,\mathrm{d}u + \int_n^\infty \rho(u)\frac{y^u - \xi^{-ku}}{uq^u}\,\mathrm{d}u + \int_n^\infty \rho(u)\frac{y^u - \xi^{-ku}}{u^2q^u}\,\mathrm{d}u = BR(n).$$

Kadangi $H(y) = H(\xi^{-k}) + B|1 - y\xi^k|$, tai iš pastarųjų samprotavimų išplaukia paskutinis lemos tvirtinimas. 3 lema įrodyta.

Patogumo dėlei pažymėkime

$$\begin{aligned} D_k(y) :&= \big(G(y)W_k(y) - G(\xi^{-k})W_k(\xi^{-k})\big)(1 - y\xi^k)^{-\vartheta_k} \\ &= F(y) - G(\xi^{-k})W_k(\xi^{-k})(1 - y\xi^k)^{-\vartheta_k}. \end{aligned}$$

4 lema. 1. *Kai* $|y| = r$ *ir* $|\tau + 2\pi k/m| \leqslant n^{-1}$, *tai* $D_k(y) = BR(n)|1 - y\xi^k|^{-\Re\vartheta_k}$.
2. *Kai* $|y| = r$ *ir* $n^{-1} < |\tau + 2\pi k/m| \leqslant \varepsilon < \pi/m$, *tai* $D_k(y) = B|1 - y\xi^k|^{1-\Re\vartheta_k} nR(n)$ *bei* $D_k'(y) = B|1 - y\xi^k|^{-\Re\vartheta_k} nR(n)$.

Įrodymas. 1. Funkcijos $H(y)$ ir $W_k(y)$ yra analizinės ant kontūro $|y| = r$. Pasinaudoję (H) sąlyga ir 3 lemoje gauta funkcijos $G(y)$ išraiška, kiekvienam k šioje srityje gauname $G(y) = G(\xi^{-k}) + BR(n)$ ir $W_k(y) = W_k(\xi^{-k}) + B|1 - y\xi^k|$. Tai įrodo pirmąjį 4 lemos teiginį.

2. Kai $n^{-1} < |\tau + 2\pi k/m| \leqslant \varepsilon$, vertindami $D_k(y)$, pasinaudojame lygybe $G(y) = G(\xi^{-k}) + B|1 - y\xi^k|nR(n)$. Lieka šioje srityje įvertinti funkciją $D_k'(y)$. Diferencijuodami gauname $D_k(y) = A_1 + A_2 + A_3 := W_k(y)G(y)(1 - y\xi^k)^{-\vartheta_k} + W_k(y)G'(y)(1 - y\xi^k)^{-\vartheta_k} + \big(W_k(y)G(y) - W_k(\xi^{-k})G(\xi^{-k})\big)\xi^k\vartheta_k(1 - y\xi^k)^{-\vartheta_k - 1}$. Iš čia 3 lemos įverčių dėka išplaukia:

$$\begin{aligned} &A_1 = B|1 - y\xi^k|^{-Re\vartheta_k}, \quad A_2 = BnR(n)|1 - y\xi^k|^{-Re\vartheta_k}, \\ &A_3 = BnR(n)|1 - y\xi^k|^{-Re\vartheta_k}. \end{aligned}$$

Lema įrodyta.

Toliau taikysime Koši integralinę formulę. Integravimo kontūrą padalinkime į intervalus

$$\Delta_k = \{y : |y| = r, |\tau + 2\pi k/m| \leqslant \varepsilon < \pi/m\}, \quad \Delta = \{y : |y| = r\} \setminus \cup_{k=0}^{m-1}\Delta_k.$$

Tada

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|y|=r} \frac{F(y)}{y^{n+1}}\,\mathrm{d}y \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Delta_k} \frac{F(y)}{y^{n+1}}\mathrm{d}y + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Delta} \frac{F(y)}{y^{n+1}}\,\mathrm{d}y =: \sum_{k=0}^{m-1} J_k + BR(n), \end{aligned} \tag{4}$$

kadangi, integruodami dalimis ir panaudodami 3 lemos įverčius, gauname

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Delta} \frac{F(y)}{y^{n+1}}\,\mathrm{d}y = \frac{B}{n}\max_{y\in\Delta}|F(y)| + \frac{B}{n}\int\limits_{\Delta_k} |F(y)||\mathrm{d}y| = \frac{B}{n} + \frac{B}{n}nR(n) = BR(n).$$

Dabar, prisiminę funkcijos $D_k(y)$ apibrėžimą, galime užrašyti:

$$J_k = \frac{G(\xi^{-k})W_k(\xi^{-k})}{2\pi i}\int\limits_{\Delta_k}\frac{\mathrm{d}y}{y^{n+1}(1-y\xi^k)^{\vartheta_k}} + \int\limits_{\Delta_k}\frac{D_k(y)\mathrm{d}y}{y^{n+1}} = E_k + E.$$

Įrodysime, kad

$$E = BR(n)n^{(\Re\vartheta_k - 1)^+}\min\{\log n, |1-\Re\vartheta_k|^{-1}\}. \tag{5}$$

Iš tikrųjų, vertindami integralą E ta Δ_k kontūro dalimi, kurioje $|\tau + 2\pi k/m| \leqslant 1/n$, panaudodami 4 lemą, po pakeitimo $w = y\xi^k$ gauname įvertį

$$BR(n)\int\limits_{|\Im w|\leqslant 1/n}|1-w|^{-\Re\vartheta_k}|dw| = BR(n)n^{\Re\vartheta_k}\cdot\frac{1}{n} = BR(n)n^{\Re\vartheta_k - 1}.$$

Kai $1/n < |\tau + 2\pi k/m| \leqslant \varepsilon$, tai vėl panaudodami $D_k(y)$ ir $D'_k(y)$ įverčius, gauname

$$\begin{aligned}
&\frac{\max\limits_{|y|\leqslant\varepsilon}|D_k(y)|}{n} + \frac{B}{n}\int\limits_{1/n}^{\varepsilon}|D'_k(y)|\mathrm{d}\tau \\
&\quad = BR(n)n^{(\Re\vartheta_k - 1)^+} + BR(n)\int\limits_{1/n}^{\varepsilon}|1-y|^{-\Re\vartheta_k}\mathrm{d}\tau \\
&\quad = BR(n)n^{(\Re\vartheta_k - 1)^+} + BR(n)\int\limits_{1/n}^{\varepsilon}\tau^{-\Re\vartheta_k}\mathrm{d}\tau \\
&\quad = BR(n)n^{(\Re\vartheta_k - 1)^+} + BR(n)n^{(\Re\vartheta_k - 1)^+}\min\{\log n, |1-\Re\vartheta_k|^{-1}\}.
\end{aligned}$$

Todėl yra teisinga (5) formulė.

Tegu $\overline{\Delta}_k = \{y:\ |y| = r\}\setminus\Delta_k$. Apskaičiuojame integralą

$$\begin{aligned}
E_k &= \frac{G(\xi^{-k})W_k(\xi^{-k})}{2\pi i}\Bigg(\int\limits_{|y|=r} - \int\limits_{\overline{\Delta}_k}\Bigg)\frac{\mathrm{d}y}{y^{n+1}(1-y\xi^k)^{\vartheta_k}} \\
&= \xi^{kn}G(\xi^{-k})W_k(\xi^{-k})\binom{n+\vartheta_k-1}{n} + \frac{B}{n} \\
&= \frac{\xi^{kn}G(\xi^{-k})W_k(\xi^{-k})n^{\vartheta_k - 1}}{\Gamma(\vartheta_k)} + Bn^{\vartheta_k - 2} + \frac{B}{n}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Tad dabar iš (5) ir (6) išplaukia reikalingi J_k įverčiai, kuriuos įstatę į (4) formulę bei sumuodami pagal k, gauname norimą tvirtinimą. Teorema įrodyta.

Literatūra

[1] B.L.J. Braaksma, D. Stark, A Darboux-type theorem for slowly varying functions, *J. Combinatorial Th.*, Ser. A, **77**, 51–66 (1997).
[2] P. Flajolet, A. Odlyzko, Singularity analysis of generating functions, *SIAM J. Discrete Math.*, 3(2), 216–240 (1990).
[3] H. K. Hwang, Asymptotics of Poisson approximation to random discrete distributions: an analytic approach, *Adv. Appl. Probab.*, **31**, 448–491 (1999).
[4] E. Manstavičius, A Tauber theorem and multiplicative functions on permutations, In: *Number Theory in Progress*, K.Györy *et al.* (Eds.), Walter de Gruyter, Berlin, 1025–1038 (1999).
[5] E. Manstavičius, On analytic problems of combinatorial structures, *Lietuvos matematikų draugijos mokslo darbai*, III tomas, 75–80 (1999).
[6] E. Manstavičius and R. Skrabutėnas, Summation of the values of multiplicative functions on semigroups, *Lith. Math. J.*, **33**(3), 330–340 (1993).

An analytic problem in combinatorial structures

E. Manstavičius, R. Skrabutėnas

An asymptotical formula for the Taylor coefficients of the generating series appearing in combinatorics is obtained. It is applied to derive a formula for the number of multisets of increasing weight.