

Геометрия неголономных комплексов трехмерного проективного пространства

Казимерас НАВИЦКИС (VU)
e-mail: kazimieras.navickis@mif.vu.lt

Пусть $Gr(1, 3)$ – четырехмерное многообразие Грассмана всех прямых трехмерного проективного пространства P_3 . Трехмерное подмногообразие $Gr(1, 3, 3)$ многообразия $Gr(1, 3)$ называется комплексом прямых пространства P_3 . Пусть l – образующий элемент многообразия $Gr(1, 3)$. Если $\{A_i\}$ – подвижной репер пространства P_3 , то частичную канонизацию этого репера проведем так, чтобы $l = (A_1 A_2)$. Дифференциальные уравнения комплекса $Gr(1, 3, 3)$ в таком репере запишутся в виде ($p, q, \dots = 1, 2; \alpha, \beta, \dots = 3, 4; i, j, \dots = 1, \dots, 4$)

$$\lambda_\alpha^p \omega_p^\alpha = 0. \quad (1)$$

Множество всех прямых, принадлежащих комплексу $Gr(1, 3, 3)$ и проходящих через произвольную фиксированную точку $M(t) = A_1 + tA_2$, образует конус с вершиной в точке $M(t)$. Касательная плоскость этого конуса определяется уравнением

$$\Pi(t) : (\lambda_\alpha^2 - t\lambda_\alpha^1)x^\alpha = 0. \quad (2)$$

Следовательно, имеем проективитет (основной проективитет комплекса $Gr(1, 3, 3)$)

$$K : M(t) \longleftrightarrow \Pi(t) \quad (3)$$

между точками $M(t)$ прямой l и плоскостями $\Pi(t)$, проходящими через эту прямую.

Неголономным комплексом $NGr(1, 3, 3)$ называется многообразие Грассмана $Gr(1, 3)$ вместе с полем соответствий K ([1]).

Будем предполагать, что

$$I = \lambda_3^1 \lambda_4^2 - \lambda_4^1 \lambda_3^2 \neq 0.$$

Пусть

$$\nabla \lambda_\alpha^p = d\lambda_\alpha^p + \lambda_\alpha^q \omega_q^p - \lambda_\beta^p \omega_\alpha^\beta.$$

Определим 1-формы ϑ_{pq} равенствами:

$$I \cdot \vartheta_{pq} = \sigma_{(p|r|\sigma_q)s} \lambda_\alpha^r \Delta \lambda_\beta^s \sigma^{\alpha\beta};$$

величины σ_{pq} , $\sigma^{\alpha\beta}$, определяемые следующим образом

$$\|\sigma_{pq}\| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \|\sigma^{\alpha\beta}\| = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

будут использоваться для поднятия и опускания индексов. Пусть

$$\varphi_p^q = \frac{1}{I} \lambda_\alpha^q \omega_p^\alpha, \quad \Phi = \frac{1}{I} \lambda_\alpha^p \omega_p^\alpha, \\ \varphi_{pq} = \sigma_{pr} \varphi_q^r, \quad \varphi^{pq} = \sigma^{pr} \sigma^{qs} \varphi_{rs};$$

используемые здесь величины σ^{pq} связаны с величинами σ_{pq} соотношениями $\sigma_{pr} \sigma^{rq} = \delta_p^q$, $\sigma^{pr} \sigma_{rq} = \delta_q^p$. В принятых обозначениях дифференциальные уравнения неголономного комплекса $NGr(1, 3, 3)$ имеют следующий вид:

$$\vartheta_{pq} = a_{pqrs} \varphi^{rs} + 2a_{r(p} \varphi_{q)}^r + a \varphi_{pq} + c_{pq} \Phi;$$

величины a_{pqrs} , a_{pq} , c_{pq} являются симметричными относительно всех индексов.

Будем рассматривать пару (N, Σ) , где $N = \tau^p A_p$ — произвольная точка прямой l , а $\Sigma: \sigma_{pq} t^p \lambda_\alpha^q x^\alpha = 0$ является произвольной плоскостью, проходящей через l . Если точка N и плоскость Σ фиксированы, то

$$\varphi^{pq} = t^{(p} \tau^{q)} \Theta, \quad \Phi = -\tilde{T} \Theta \quad (\Theta \neq 0);$$

здесь $\tilde{T} = \sigma_{pq} t^p \tau^q$. Следовательно, прямая l , вращаясь около точки N в плоскости Σ описывает пучок прямых. Точка $M = t^p A_p$, соответствующая плоскости Σ в проективитете K , описывает кривую, касательной к которой в точке M является прямая $L = (M, P)$, где

$$P = \left(a_{pqrs} t^p t^q t^r \tau^s + \tilde{T} F_{pq} t^p t^q \right) A_2 + \tilde{T} Q,$$

причем

$$F_{pq} = -(a_{pq} + c_{pq}), \\ Q = t^1 [(\lambda_4^1 t^2 - \lambda_4^2 t^1) A_3 + (\lambda_3^2 t^1 - \lambda_3^1 t^2) A_4].$$

Если точки $M = N$ совпадают ($\tau^p = t^p$), прямая L принимает вид

$$(M, a_{pqrst} t^p t^q t^r t^s A_2).$$

Она не определена тогда и только тогда, когда координаты t^p точки M удовлетворяют уравнению

$$a_{pqrst}t^pt^qt^rt^s = 0,$$

определяющем четыре точки на прямой l (инфлекссионные центры).

Если точки M и N находятся в соответствии

$$a_{pqrst}t^pt^qt^r\tau^s = 0,$$

из прямой L получаем прямую

$$(M, F_{pq}t^pt^qA_2 + Q).$$

Если $t^1 : t^2$ является переменным параметром, то эта прямая описывает поверхность второго порядка

$$I \cdot (\lambda_\alpha^2 x^1 - \lambda_\alpha^1 x^2) x^\alpha - F_{pq} \lambda_\alpha^p \lambda_\beta^q x^\alpha x^\beta = 0.$$

Прямая L , когда $t^1 : t^2$ является переменным параметром, а $\tau^1 : \tau^2$ – постоянное, описывает линейчатую поверхность третьего порядка

$$[I \cdot (x^1 X^2 - x^2 X^1) - F_{pq} X^p X^q] \cdot (X^2 \tau^1 - X^1 \tau^2) - a_{pqrs} X^p X^q X^r \tau^s = 0, \quad (4)$$

где положено $X^p = \lambda_\alpha^p x^\alpha$. При переменном $\tau^1 : \tau^2$ уравнение (4) определяет пучок поверхностей третьего порядка. Все точки плоскости $\sigma_{\alpha\beta} T^\alpha x^\beta = 0$, проходящей через прямую l , принадлежат поверхности (4) тогда и только тогда, когда

$$q^2 \tau^1 - q^1 \tau^2 = 0, \quad a_{pqrs} q^p q^q q^r \tau^s = 0,$$

где $q^p = \lambda_\alpha^p T^\alpha$.

Будем рассматривать такие полярные соответствия

$$A_{ij} u^i x^j = 0, \quad A_{ij} = A_{ji}, \quad \det ||A_{ij}|| \neq 0$$

(u^i и x^i – координаты точек), которым принадлежат проективные соответствия (3) на прямой l и те же соответствия на прямой $l + dl$ вдоль линейчатых поверхностей $\omega_p^\alpha = l_p^\alpha \theta$, $D\theta = 0$ для любого t . Полученное полярное соответствие

$$\sigma_{pq} \lambda_\alpha^q (x^\alpha u^p + u^\alpha x^p) + \frac{2}{I} \lambda_\alpha^p \lambda_\beta^q c_{pq} u^\alpha x^\beta = 0$$

индуцирует квадрику

$$\sigma_{pq} \lambda_\alpha^q x^p x^\alpha + \frac{1}{I} \lambda_\alpha^p \lambda_\beta^q c_{pq} x^\alpha x^\beta = 0.$$

Рассмотрим вдоль линейчатых интегральных поверхностей неголономного комплекса $NGr(1, 3, 3)$, определяемых уравнениями $\omega_p^\alpha = l_p^\alpha \theta$, $l_p^\alpha \lambda_\alpha^p = 0$, $D\theta = 0$, такие касательные корреляции $A_{ij}u^i x^j = 0$, для которых $A_{ij} = -A_{ji}$, $\det \|A_{ij}\| \neq 0$. Положим

$$m = a_{pqrs} a^{pq} a^{rs};$$

$$n = \det \|a_{pq}\|;$$

$$B = 3a_{1122}^2 - 4a_{1112}a_{1222} + a_{1111}a_{2222};$$

$$\Delta = a_{1111}a_{1122}a_{2222} + 2a_{1112}a_{1122}a_{1222} - a_{1111}a_{1222}^2 - a_{1112}^2a_{2222} - a_{1122}^3.$$

Тогда величина $s = a - A_{34}$ удовлетворяет уравнению третьей степени

$$s^3 - (B - 4n)s - 2(\Delta - m) = 0,$$

корни которого $s_v (v = 1, 2, 3)$ определяют три линейные комплексы прямых

$$\lambda_3^1 p^{32} + \lambda_4^1 p^{42} + \lambda_3^2 p^{13} + \lambda_4^2 p^{14} + (a - s_v) p^{34} = 0.$$

Литература

[1] К.И. Гринцевичюс, О неголономном комплексе, *Lietuvos Matem. Rink.*, **8**(4), 85–99 (1969).

Geometry of nonholonomic complexes in threedimensional projective space

K. Navickis

In this article the differential geometry of nonholonomic complexes in threedimensional projective space is considered.