VILNIAUS UNIVERSITETAS

Olga
NAVICKIENĖ

# Rizikos matų rekursinis skaičiavimas diskretaus laiko rizikos modelyje su nehomogeniniais ieškiniais

**DAKTARO DISERTACIJOS SANTRAUKA**

Fiziniai mokslai,
matematika 01P

VILNIUS 2018

Disertacija rengta 2013–2017 metais Vilniaus universitete.

**Mokslinis vadovas:**
prof. dr. Jonas Šiaulys (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P).

Gynimo taryba:

**Pirmininkas – prof. habil. dr. Kęstutis Kubilius** (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P),

**Nariai:**

**prof. dr. Paulius Drungilas** (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P),
**prof. dr. Dalė Dzemydienė** (Vilniaus universitetas, technologijos mokslai, informatikos inžinerija – 07T),
**prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas** (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P),
**prof. dr. Yuliya Mishura** (Kijevo nacionalinis Taraso Ševčenkos universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P).

Disertacija ginama viešame Gynimo tarybos posėdyje 2018 m. gruodžio 14 d. 16 val. 45 min. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultete, 102 auditorijoje. Adresas: Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius, Lietuva.

Disertaciją galima peržiūrėti Vilniaus universiteto bibliotekoje ir VU interneto svetainėje adresu: https://www.vu.lt/naujienos/ivykiu-kalendorius.

VILNIUS UNIVERSITY

Olga
NAVICKIENĖ

# Recursive calculation of risk measures in discrete time risk model with inhomogeneous claims

**SUMMARY OF DOCTORAL DISSERTATION**

Physical sciences,
Mathematics 01P

VILNIUS 2018

Doctoral dissertation was written in 2013–2017 at Vilnius University

**Academic supervisor:**

Prof. Dr. Jonas Šiaulys (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P).

This doctoral dissertation will be defended in a public meeting of the Dissertation Defence Panel:

**Chairman – Prof. Habil. Dr. Kęstutis Kubilius** (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P).

**Members:**

**Prof. Dr. Paulius Drungilas** (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P),

**Prof. Dr. Dalė Dzemydienė** (Vilnius University, Technological sciences, Informatics Engineering – 07T),

**Prof. Habil. Dr. Antanas Laurinčikas** (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P),

**Prof. dr. Yuliya Mishura** (Taras Shevchenko National University of Kyiv, Physical sciences, Mathematics – 01P).

The dissertation will be defended at a public meeting of the Dissertation Defence Panel at 16.45 p.m. on 14 December 2018 in room 102 of the Faculty of Mathematics and informatics. Address: Naugarduko street, house No. 24, Room No. 102, Vilnius, Lithuania

The text of this dissertation can be accessed at the libraries of Vilnius University, as well as on the website of Vilnius University: www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius.

# 1 Disertacinio darbo aprašymas

## 1.1 Disertacijos mokslinė problema ir tyrimo objektas

Disertacijos tyrimo objektas yra rizikos matų skaičiavimas diskretaus laiko nehomogeniniuose draudimo rizikos modeliuose su nepriklausomais bei priklausomais ieškiniais.

## 1.2 Darbo mokslinis aktualumas

Disertacijoje, kuri pristatoma šioje santrumpoje, nagrinėjamos rizikos teorijos problemos. Šios srities pradininku galima laikyti švedų aktuarą F. Lundberg, kuris 1903 metų darbe [8] pristatė Cramér-Lundberg modelį, dar vadinamą klasikiniu rizikos modeliu. Šį modelį apibrėžia tolydaus laiko realias reikšmes įgyjantis stochastinis procesas, kuris modeliuoja draudiko kapitalo kitimą bėgant laikui. Modelis turi tris komponentes: draudiko pradinį kapitalą, pastovų įmokų srautą bei atsitiktinio skaičiaus nepriklausomų ir vienodai pasiskirsčiusių ieškinių sumą. Žalų skaičius yra modeliuojamas Puasono procesu. Bendresnis modelis, dar žinomas kaip rizikos atstatymo modelis, buvo pristatytas 1957 metais E. Sparre Andersen darbe [9]. Šiame modelyje žalų skaičius yra modeliuojamas atstatymo procesu. 1988 metais H. Gerber [6] pristatė klasikinį diskretaus laiko rizikos modelį, kuris yra sveikareikšmis aukščiau paminėtų modelių analogas.

Pagrindinis rizikos teorijos tyrimo objektas yra bankroto tikimybė. Šis rizikos matas yra apibrėžiamas kaip tikimybė, kad draudiko kapitalas taps nulinis arba neigiamas kažkuriuo metu ateityje. Bankroto tikimybė yra laikoma funkcija nuo draudiko pradinio kapitalo. Tolydaus laiko rizikos modeliuose nėra lengva gauti analizines formules bankroto tikimybės skaičiavimui, ir daugeliu atveju įmanoma išvesti tik šio rizikos mato asimptotines formules ar viršutinius įverčius. Tuo tarpu diskretaus laiko rizikos modeliuose bankroto tikimybių skaičiavimas yra žymiai paprastesnis uždavinys. Jam spręsti dažniausiai taikomi rekursiniai metodai, išvedant sąryšius tarp bankroto tikimybių su skirtingu pradiniu kapitalu reikšmių. Rekursiniai bankroto tikimybių skaičiavimo metodai pirmąkart buvo nagrinėti darbuose [3] ir [5].

Moderniojoje rizikos teorijoje nagrinėjami sudėtingesni modeliai bei rizikos matai. Viena iš labiausiai nagrinėjamų modelių klasių yra nehomogeniniai diskretaus laiko rizikos modeliai (t.y. modeliai su nebūtinai vienodai pasiskirsčiusiais ieškiniais). Tačiau tam, kad būtų įmanoma gauti formules bankroto tikimybių skaičiavimui, turi būti daromos papildomos prielaidos dėl ieškinių nehomogeniškumo struktūros. Pavyzdžiui, galima nagrinėti modelius su cikliškai pasiskirsčiusiais ieškiniais. Tokie modeliai dar vadinami sezoniniais diskretaus laiko rizikos modeliais. Taip pat galima nagrinėti modelius su tam tikra ieškinių priklausomybės struktūra. Disertacijoje pirmą kartą nagrinėjamas dviejų sezonų diskretaus laiko rizikos modelis su priklausomais ieškiniais. Šiam modeliui yra išvedamas algoritmas skirtas bankroto tikimybių skaičiavimui.

Kalbant apie rizikos matus, 1998 metais buvo pristatytas naujas rizikos matas – Gerber-Shiu diskontuotos baudos funkcija [7]. Ši funkcija nusako draudiko patirtus nuostolius bankroto momentu, atsižvelgiant ir į pinigų vertės kitimą laike. Disertacijoje yra išvedamas algoritmas skirtas Gerber-Shiu funkcijos reikšmių skaičiavimui dviejų sezonų diskretaus laiko rizikos modelyje.

## 1.3 Tyrimo tikslas ir pagrindiniai uždaviniai

Šio darbo tikslas yra algoritmų kūrimas nehomogeninių diskretaus laiko rizikos modelių kritinių charakteristikų skaičiavimui. Su šiuo tikslu susiję šie uždaviniai:

(i) išvesti algoritmą Gerber-Shiu diskontuotos baudos funkcijos atskiro atvejo reikšmių skaičiavimui dviejų sezonų diskretaus laiko rizikos modelyje;

(ii) sukurti algoritmą bankroto tikimybių skaičiavimui dviejų sezonų diskretaus laiko rizikos modelyje su priklausomais ieškiniais;

(iii) ištirti atvejį, kai dviejų sezonų diskretaus laiko rizikos modelyje su priklausomais ieškiniais nėra tenkinama vadinamoji grynojo pelno sąlyga;

(iv) parodyti gautų algoritmų efektyvumą ir skaitines savybes skaitinių pavyzdžių pagalba;

(v) sukurti metodus algoritmų aproksimavimo paklaidų įvertinimui.

## 1.4 Darbo mokslinis naujumas

- Šio darbo rezultatai praplečia Damaracko ir Šiaulio rezultatus [2]. Šių autorių darbe buvo nagrinėtas bankroto tikimybės skaičiavimas dviejų sezonų diskretaus laiko rizikos modelyje. Disertacijoje nagrinėjamas bendresnis rizikos matas (Gerber-Shiu funkcija) bei bendresnis modelis. Dviejų sezonų diskretaus laiko rizikos modelis su priklausomais ieškiniais literatūroje iki šiol nagrinėtas nebuvo.

- Mokslinėje literatūroje taip pat nebuvo nagrinėtas rekursinis bankroto tikimybių skaičiavimas diskretaus laiko rizikos modelyje su priklausomomis ir nebūtinai vienodai pasiskirsčiusiomis žalomis.

- Disertacijoje pateiktas naujas algoritmas skirtas Gerber-Shiu funkcijos reikšmių skaičiavimui nehomogeniniame diskretaus laiko modelyje, kuris pasižymi didesniu skaičiavimo tikslumu bei greitaveika lyginant su egzistuojančiais algoritmais.

## 1.5 Rezultatų aprobavimas

Disertacijoje gauti rezultatai buvo pristatyti vienoje tarptautinėje konferencijoje, vienoje nacionalinėje konferencijoje bei seminare:

- Navickienė, Olga; Šiaulys, Jonas. Gerber-Shiu Discounted Penalty Function for the Bi-seasonal Discrete Time Risk Model. The 10th Tartu conference on Multivariate Statistics, 28 June - 1 July 2016, Tartu, Estonia: abstracts. Tartu: University of Tartu Press, 2016. ISBN: 9789949771530. p. 40.
- Navickienė, Olga; Šiaulys, Jonas. Gerber-Shiu Discounted Penalty Function for the Bi-seasonal Discrete Time Risk Model with Independent Claims. The LVI Conference of Lithuanian Mathematical Society, 20 June - 21 June 2016, Vilnius, Lithuania, at Vilnius Gediminas Technical University.
- Navickienė, Olga. Rizikos matų rekursinis skaičiavimas diskretaus laiko rizikos modelyje su nehomogeniniais ieškiniais. 2018 m. rugsėjo 25 d. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto Matematikos instituto mokslinis seminaras „Finansų ir draudimo matematika“.

## 1.6 Pagrindinės publikacijos

Pristatomos disertacijos rezultatai publikuojami moksliniuose straipsniuose:

- O. Navickienė, J. Sprindys, J. Šiaulys. Gerber-Shiu discounted penalty function for the bi-seasonal discrete time risk model. *Informatica* (accepted).
- O. Navickienė, J. Sprindys, J. Šiaulys. Ruin probability for the bi-seasonal discrete time risk model with dependent claims. *Modern Stochastics: Theory and Applications*, https://doi.org/10.15559/18-VMSTA118.

## 1.7 Tyrimų metodika

Pagrindiniai disertacijos teiginiai įrodyti naudojant klasikinius tikimybių teorijos ir matematinės analizės metodus bei diskretų diferencijavimą.

## 1.8 Disertacijos struktūra

Pirmoje disertacijos dalyje yra pateiktas įvadas, kuriame yra aprašytas darbo mokslinis aktualumas; disertacijos tikslas ir pagrindiniai uždaviniai; darbo mokslinis naujumas bei aprobuoti moksliniai rezultatai.

Antroje disertacijos dalyje yra pateikta svarbiausių diskrečiosios rizikos teorijos rezultatų apžvalga.

Pagrindiniai darbo rezultatai pateikiami trečioje bei ketvirtoje dalyje. Trečiame skyriuje nagrinėjamas diskretaus laiko dviejų sezonų rizikos modelis. Šiame modelyje ieškiniai pasikartoja kas antrą periodą, t.y. ieškinių skirstiniai sutampa visais lyginiais ir nelyginiais momentais. Gautas algoritmas Gerber-Shiu diskontuotos baudos funkcijos reikšmių rekursiniam skaičiavimui. Teoriniai rezultatai yra iliustruoti ir konkrečiais algoritmo taikymo pavyzdžiais.

Ketvirtame skyriuje nagrinėjamas diskretaus laiko dviejų sezonų rizikos modelis su priklausomomis žalomis. Bankroto tikimybių reikšmių skaičiavimui yra sukurtas rekursinis algoritmas. Taipogi teoriniai rezultatai yra iliustruoti skaitiniais pavyzdžiais.

Galiausiai penktame skyriuje pateikiama trumpa gautų rezultatų santrauka. Prieduose pateikiamas algoritmų kodas R kalba, kuris buvo naudojamas iliustruojantiems pavyzdžiams.

## 1.9 Padėka

Norėčiau išreikšti didžiulę ir nuoširdžią padėką savo moksliniam vadovui prof. dr. Jonui Šiauliui už pagalbą, recenzentams prof. dr. Dalei Dzemydienei ir prof. dr. Pauliui Drungilai už vertingas pastabas bei doc. dr. Hamletui Markšaičiui už palaikymą ir motyvaciją.

# 2 Pagrindiniai disertacijos moksliniai rezultatai

## 2.1 Gerber-Shiu diskontuotos baudos funkcija dviejų sezonų diskretaus laiko rizikos modelyje

*1 apibrėžimas. Sakome, kad draudiko kapitalas $W_u$ kinta pagal dviejų sezonų diskretaus laiko rizikos modelį jei*

$$W_u(n) = u + n - \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

*kiekvienam $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ ir galioja šios prielaidos:*

- *draudiko pradinis kapitalas $u \in \mathbb{N}_0$,*
- *ieškiniai $\{Z_1, Z_2, \ldots\}$ yra neneigiami, sveikareikšmiai ir nepriklausomi a.d.,*
- *egzistuoja a.d. $X$ ir $Y$ tokie, kad $Z_{2k+1} \stackrel{d}{=} X$, $k \in \mathbb{N}_0$, ir $Z_{2k} \stackrel{d}{=} Y$, $k \in \mathbb{N}$.*

Jei $X \stackrel{d}{=} Y$, tuomet dviejų sezonų diskretaus laiko rizikos modelis virsta klasikiniu diskretaus laiko rizikos modeliu.

Gerber-Shiu diskontuotos baudos funkcija $\Psi_{\delta,w}$ yra viena pagrindinių rizikos modelių kritinių charakteristikų. Pagal apibrėžimą pristatytą Gerber ir Shiu [7], diskretaus laiko rizikos modeliui ši funkcija apibrėžiama

$$\Psi_{\delta,w}(u) = \mathbb{E}\Big(\mathrm{e}^{-\delta T_u}\, w\big(W_u(T_u - 1), |W_u(T_u)|\big)\, \mathbb{1}_{\{T_u < \infty\}}\Big),$$

kur palūkanų galia $\delta \geqslant 0$, $w(x, y)$ yra laisvai pasirinkta neneigiamų argumentų funkcija, ir $T_u$ yra bankroto laikas, t.y.

$$T_u = \begin{cases} \min\{n \geqslant 1 : W_u(n) \leqslant 0\}, \\ \infty, \text{ if } W_u(n) > 0 \text{ for all } \; n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Disertacijoje nagrinėjamas atskiras šios funkcijos atvejis, kai $w(x, y) = 1$ visiems neneigiamiems $x$ ir $y$. Tuomet Gerber-Shiu funkcija yra lygi

$$\psi_\delta(u) = \Psi_{\delta,1}(u) = \mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{-\delta T_u} \mathbb{1}_{\{T_u<\infty\}}\big)\big).$$

Jei be to palūkanų galia $\delta = 0$, tuomet Gerber-Shiu funkcija yra lygi bankroto tikimybei

$$\psi(u) = \psi_0(u) = \Psi_{0,1}(u) = \mathbb{P}(T_u < \infty).$$

Disertacijoje pristatomas rekursiniais metodais paremtas algoritmas, skirtas Gerber-Shiu funkcijos atskiro atvejo reikšmių skaičiavimui dviejų sezonų diskretaus laiko rizikos modelyje. Algoritmo veikimas iliustruojamas skaitinių eksperimentų pagalba. Konstruojant algoritmą buvo remtasi rezultatais, gautais Bieliauskienės ir Šiaulio [1], Damaracko ir Šiaulio [2], De Vylder ir Goovaerts [3], Dickson ir Waters [5].

Nagrinėjame dviejų sezonų diskretaus laiko rizikos modelį generuotą neneigiamų, sveikareikšmių ir nepriklausomų a.d. $X$ ir $Y$. Pažymėkime

$$x_k = \mathbb{P}(X = k),\ y_k = \mathbb{P}(Y = k),\ q_k = \mathbb{P}(Q = k),\ k \in \mathbb{N}_0,$$

kur $Q = X + Y$. Šių a.d. pasiskirstymo funkcijas žymėsime

$$\begin{aligned} F_X(u) &= \mathbb{P}(X \leqslant u) = \sum_{k=0}^{\lfloor u \rfloor} x_k, \\ F_Y(u) &= \mathbb{P}(Y \leqslant u) = \sum_{k=0}^{\lfloor u \rfloor} y_k, \\ F_Q(u) &= \mathbb{P}(Q \leqslant u) = \sum_{k=0}^{\lfloor u \rfloor} q_k, \end{aligned}$$

visiems realiems $u$. Taip pat pažymėkime $\overline{F}$ pasiskirstymo funkcijos $F$ uodegą, t.y. $\overline{F}(u) = 1 - F(u)$ visiems $u \in \mathbb{R}$.

Žemiau pateiktos dvi teoremos leidžia konstruoti algoritmą funkcijos $\psi_\delta(u)$ reikšmių skaičiavimui dviejų sezonų diskretaus laiko rizikos modelyje.

**2.1.1 teorema.** *Nagrinėkime dviejų sezonų diskretaus laiko rizikos modelį generuotą neneigiamų, sveikareikšmių ir nepriklausomų a.d.* $X$ *ir* $Y$. *Jei* $\mathbb{E}X + \mathbb{E}Y < 2$, *tada* $\lim\limits_{u\to\infty} \psi_\delta(u) = 0$ *kiekvienam fiksuotam* $\delta \geqslant 0$. *Jei be to* $\max\{\mathbb{E}\mathrm{e}^{hX}, \mathbb{E}\mathrm{e}^{hY}\} < \infty$ *kažkuriems teigiamiems* $h$, *tuomet* $\sum\limits_{l=0}^{\infty} \psi_\delta(l) < \infty$ *kiekvienam fiksuotam* $\delta \geqslant 0$.

**2.1.2 teorema.** *Tarkime, kad yra patenkintos visos Teoremos 2.1.1 sąlygos. Taip pat laikykime, kad* $\delta > 0$, *ir pažymėkime* $\psi_\delta$ *Gerber-Shiu funkciją su* $w(x, y) = 1$ *visiems neneigiamiems* $x$ *ir* $y$. *Taip pat žymėkime* $\mathcal{S}_\delta := \sum\limits_{l=0}^{\infty} \psi_\delta(l)$.

- *Jei* $q_0 = \mathbb{P}(X + Y = 0) > 0$, *tada*

$$\psi_\delta(n) = a_n\psi_\delta(0) + b_n\mathcal{S}_\delta + d_n \tag{1}$$

*kiekvienam* $n \in \mathbb{N}_0$, *kur* $a_n$, $b_n$, $d_n$ *yra realiųjų skaičių sekos, apibrėžtos tokiomis rekursinėmis lygtimis:*

$$a_0 = 1,\ a_1 = -\frac{1}{y_0},\ a_n = \frac{1}{q_0}\Big(\mathrm{e}^{2\delta}a_{n-2} - \sum_{i=1}^{n-1} q_i a_{n-i} - x_{n-1}\Big),$$

$$b_0 = 0,\ b_1 = -\frac{\mathrm{e}^{2\delta} - 1}{y_0},$$

$$b_n = \frac{1}{q_0}\Big(\mathrm{e}^{2\delta}b_{n-2} - \sum_{i=1}^{n-1} q_i b_{n-i} - x_{n-1}(\mathrm{e}^{2\delta} - 1)\Big),$$

$$d_0 = 0,\ d_1 = \frac{\mathrm{e}^{\delta}\mathbb{E}X + y_0 + \mathbb{E}Y - 1}{y_0},$$

$$d_n = \frac{1}{q_0}\Big(\mathrm{e}^{2\delta} d_{n-2} - \sum_{i=1}^{n-1} q_i d_{n-i} + x_{n-1} y_0 d_1 - \mathrm{e}^{\delta}\overline{F}_X(n-2)$$
$$- \sum_{i=0}^{n-2} x_i \overline{F}_Y(n-1-i)\Big),$$
$n \in \{2, 3, \ldots\}$.

- *Jei* $x_0 = \mathbb{P}(X = 0) = 0$ *ir* $y_0 = \mathbb{P}(Y = 0) \neq 0$, *tada*

$$\psi_\delta(n) = \tilde{a}_n \psi_\delta(0) + \tilde{b}_n \mathcal{S}_\delta + \tilde{d}_n \tag{2}$$

*kiekvienam* $n \in \mathbb{N}_0$, *kur* $a_n$, $b_n$, $d_n$ *yra realiųjų skaičių sekos, apibrėžtos tokiomis rekursinėmis lygtimis:*

$$\tilde{a}_0 = 1,\ \tilde{a}_1 = -\frac{1}{y_0},\ \tilde{a}_n = \frac{1}{q_1}\Big(\mathrm{e}^{2\delta}\tilde{a}_{n-1} - \sum_{i=1}^{n-1} q_{i+1}\tilde{a}_{n-i} - x_n\Big),$$
$$\tilde{b}_0 = 0,\ \tilde{b}_1 = -\frac{\mathrm{e}^{2\delta} - 1}{y_0},$$
$$\tilde{b}_n = \frac{1}{q_1}\Big(\mathrm{e}^{2\delta}\tilde{b}_{n-1} - \sum_{i=1}^{n-1} q_{i+1}\tilde{b}_{n-i} - x_n(\mathrm{e}^{2\delta} - 1)\Big),$$
$$\tilde{d}_0 = 0,\ \tilde{d}_1 = \frac{\mathrm{e}^{\delta}\mathbb{E}X + y_0 + \mathbb{E}Y - 1}{y_0},$$
$$\tilde{d}_n = \frac{1}{q_1}\Big(\mathrm{e}^{2\delta}\tilde{d}_{n-1} - \sum_{i=1}^{n-1} q_{i+1}\tilde{d}_{n-i} + x_n y_0 \tilde{d}_1 - \mathrm{e}^{\delta}\overline{F}_X(n-1)$$
$$- \sum_{i=0}^{n-2} x_{i+1}\overline{F}_Y(n-1-i)\Big),$$
$n \in \{2, 3, \ldots\}$.

- *Jei* $x_0 \neq 0$ *ir* $y_0 = 0$, *tada*

$$\psi_\delta(n) = \hat{b}_n \mathcal{S}_\delta + \hat{d}_n \tag{3}$$

*kiekvienam $n \in \mathbb{N}_0$, kur $a_n$, $b_n$, $d_n$ yra realiųjų skaičių sekos, apibrėžtos tokiomis rekursinėmis lygtimis:*

$$\hat{b}_0 = -(\mathrm{e}^{2\delta} - 1), \ \hat{b}_n = \frac{1}{q_1}\Big(\mathrm{e}^{2\delta}\hat{b}_{n-1} - \sum_{i=1}^{n-1} q_{i+1}\hat{b}_{n-i}\Big),$$

$$\hat{d}_0 = \mathrm{e}^{\delta}\mathbb{E}X + \mathbb{E}Y - 1,$$

$$\hat{d}_n = \frac{1}{q_1}\Big(\mathrm{e}^{2\delta}\hat{d}_{n-1} - \sum_{i=1}^{n-1} q_{i+1}\hat{d}_{n-i} - \mathrm{e}^{\delta}\overline{F}_X(n-1) - \sum_{i=0}^{n-1} x_i\overline{F}_Y(n-i)\Big), \ n \in \mathbb{N}.$$

**Algoritmas funkcijos $\psi_\delta$ reikšmių skaičiavimui**

Žemiau aprašomas algoritmas, skirtas funkcijos $\psi_\delta$ reikšmių skaičiavimui dviejų sezonų diskretaus laiko rizikos modelyje. Čia pateikiame algoritmą tinkantį atvejui, kai $x_0y_0 > 0$. Atvejai $\{x_0 = 0, y_0 > 0\}$ ir $\{x_0 > 0, y_0 = 0\}$ gali būti nagrinėjami analogiškai.

**Žingsnis 1:** Pasirinkti $N \in \{10, 20, 30, ..., 100\}$ ir $K \in \{1, ..., 5\}$.

**Žingsnis 2:** Apskaičiuoti koeficientus $a_n$, $b_n$, $d_n$ visiems $n \in \{0, 1, ..., N\}$ naudojant formules iš Teoremos 2.1.2.

**Žingsnis 3:** Rasti $\hat{\psi}_\delta(0)$ ir $\hat{\mathcal{S}}_\delta$ tenkinančius lygčių sistemą

$$\begin{cases} a_{N-K}\hat{\psi}_\delta(0) + b_{N-K}\hat{\mathcal{S}}_\delta + d_{N-K} = 0, \\ a_N\hat{\psi}_\delta(0) + b_N\hat{\mathcal{S}}_\delta + d_N = 0. \end{cases} \tag{4}$$

- *Iš Teoremos 2.1.2 pagrindinės formulės* (1) *gauname, kad $\psi_\delta(0)$ ir $\mathcal{S}_\delta$ tenkina sistemą*

$$\begin{cases} a_{N-K}\psi_\delta(0) + b_{N-K}\mathcal{S}_\delta + d_{N-K} = \psi_\delta(N-K), \\ a_N\psi_\delta(0) + b_N\mathcal{S}_\delta + d_N = \psi_\delta(N). \end{cases} \tag{5}$$

- *Be to, pagal Teoremą 2.1.1 turime, kad* $\psi_\delta(N-K)$ *ir* $\psi_\delta(N)$ *yra artimi nuliui pakankamai dideliems* $N$. *Sistemą* (4) *gauname iš* (5) *pakeičiant* $\psi_\delta(N-K)$ *ir* $\psi_\delta(N)$ *reikšmes į nulį.*

**Žingsnis 4:** Įvertinti aproksimavimo paklaidą $|\psi_\delta(0)-\hat{\psi}_\delta(0)|$.

*Pritaikę Kramerio formules tiesinių lygčių sistemoms* (4), (5) *ir pastebėję, kad* $|\psi_\delta(n)| \leqslant 1$, $n \in \mathbb{N}_0$ *gauname, kad*

$$|\psi_\delta(0) - \hat{\psi}_\delta(0)| \leqslant \frac{e^{-\delta}\big(|b_{N-K}| + |b_N|\big)}{|a_{N-K}b_N - b_{N-K}a_N|}.$$

**Žingsnis 5:** Jei 4 žingsnyje gautas paklaidos dydis yra tinkamas, tada eiti į 6 žingsnį. Kitu atveju, grįžti į 1 žingsnį pasirenkant kitus parametrus $N$ ir $K$.

**Žingsnis 6:** Apskaičiuoti $\psi_\delta(1)$ pagal formulę (1) laikant, kad $\psi_\delta(0) = \hat{\psi}_\delta(0)$ ir $\mathcal{S}_\delta = \hat{\mathcal{S}}_\delta$.

**Žingsnis 7:** Apskaičiuoti $\psi_\delta(u)$ reikšmes, kai $u \geqslant 2$ pagal formulę (1) iš Teoremos 2.1.2.

## 2.2 Bankroto tikimybė dviejų sezonų diskretaus laiko rizikos modelyje su priklausomais ieškiniais

*2 apibrėžimas. Sakome, kad draudiko kapitalas $W_u$ kinta pagal dviejų sezonų diskretaus laiko rizikos modelį su priklausomais ieškiniais jei*

$$W_u(n) = u + n - \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

*kiekvienam $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ ir galioja šios prielaidos:*

- *draudiko pradinis kapitalas $u \in \mathbb{N}_0$,*
- *egzistuoja atsitiktinis vektorius $(X, Y)$ toks, kad $(Z_{2k-1}, Z_{2k}) \stackrel{d}{=} (X, Y)$, $k \in \mathbb{N}$,*
- *atsitiktiniai vektoriai $(Z_{2k-1}, Z_{2k})$, $k \in \mathbb{N}$, yra nepriklausomi,*
- *generuojantis atsitiktinis vektorius $(X, Y)$ turi skirstinį apibrėžtą matricoje žemiau, kur $h_{ij} = \mathbb{P}(X = i, Y = j), i, j \in \mathbb{N}_0$:*

| | 0 | 1 | 2 | 3 | ... |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $h_{0,0}$ | $h_{0,1}$ | $h_{0,2}$ | $h_{0,3}$ | ... |
| 1 | $h_{1,0}$ | $h_{1,1}$ | $h_{1,2}$ | $h_{1,3}$ | ... |
| 2 | $h_{2,0}$ | $h_{2,1}$ | $h_{2,2}$ | $h_{2,3}$ | ... |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |

Jei $X$ ir $Y$ yra nepriklausomi a.d., tuomet modelis virsta ankstesniame skyriuje nagrinėtu modeliu. Jei be to $X$ ir $Y$ yra vienodai pasiskirstę, tuomet dviejų sezonų diskretaus laiko rizikos modelis su priklausomais ieškiniais tampa klasikiniu diskretaus laiko rizikos modeliu.

Bankroto laikas ir bankroto tikimybė dviejų sezonų diskretaus laiko rizikos modelyje su priklausomais ieškiniais apibrėžiami analogiškai kaip ir ankstesniame skyriuje. Disertacijoje pristatomas rekursiniais metodais paremtas algoritmas, skirtas bankroto tikimybių $\psi(u)$ reikšmių skaičiavimui šiame rizikos modelyje. Algoritmo veikimas iliustruojamas skaitinių simuliacijų pagalba. Konstruojant algoritmą buvo remtasi rezultatais, gautais Damaracko ir Šiaulio [2], De Vylder ir Goovaerts [3], Dickson ir Waters [5].

Pažymėkime

$$\begin{aligned} x_k &= \mathbb{P}(X = k) = \sum_{j=0}^{\infty} h_{k,j}, \\ y_k &= \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{j=0}^{\infty} h_{j,k}, \\ q_k &= \mathbb{P}(Q = k) = \sum_{l=0}^{k} h_{l,k-l}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \end{aligned}$$

kur $Q = X + Y$. Šių a.d. pasiskirstymo funkcijas žymėsime

$$\begin{aligned} F_X(u) &= \mathbb{P}(X \leqslant u) = \sum_{k=0}^{\lfloor u \rfloor} x_k, \\ F_Y(u) &= \mathbb{P}(Y \leqslant u) = \sum_{k=0}^{\lfloor u \rfloor} y_k, \\ F_Q(u) &= \mathbb{P}(Q \leqslant u) = \sum_{k=0}^{\lfloor u \rfloor} q_k \end{aligned}$$

visiems realiems $u$. Kaip ir praėjusiame skyriuje, $\overline{F}$ žymi pasiskirstymo funkcijos $F$ uodegą, t.y. $\overline{F}(u) = 1 - F(u)$ visiems $u \in \mathbb{R}$.

Taip pat pažymėkime išgyvenimo tikimybę $\varphi(u) = 1 - \psi(u)$ visiems $u \in \mathbb{N}_0$.

**2.2.1 teorema.** *Nagrinėkime dviejų sezonų diskretaus laiko rizikos modelį su priklausomais ieškiniais generuotą atsitiktinio vek-*

*toriaus $(X,Y)$, kur $X$ ir $Y$ yra neneigiami ir sveikareikšmiai a.d. tokie, kad $\mathbb{E}Q = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y < 2$. Tokiu atveju*

$$\lim_{u\to\infty} \varphi(u) = 1. \tag{6}$$

- *Jei $q_0 = h_{0,0} > 0$, tai*

$$\varphi(0) = (2 - \mathbb{E}Q) \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{a_n - a_{n+1}}, \tag{7}$$

$$\varphi(u) = a_u\varphi(0) + b_u(2 - \mathbb{E}Q), \quad u \in \mathbb{N}_0, \tag{8}$$

*kur $a_n$ ir $b_n$ yra realiųjų skaičių sekos, apibrėžtos tokiomis rekursinėmis lygtimis:*

$$a_0 = 1,\ a_1 = -\frac{1}{y_0},\ a_n = \frac{1}{q_0}\Big(a_{n-2} - \sum_{i=1}^{n-1} q_i a_{n-i} + a_1 h_{n-1,0}\Big),$$
$$b_0 = 0,\ b_1 = \frac{1}{y_0},\ b_n = \frac{1}{q_0}\Big(b_{n-2} - \sum_{i=1}^{n-1} q_i b_{n-i} + b_1 h_{n-1,0}\Big),$$
$$n \in \{2, 3, \ldots\}.$$

- *Jei $q_0 = 0$, kai $x_0 \neq 0$ ir $y_0 = 0$, tada*

$$\varphi(0) = 2 - \mathbb{E}Q,$$
$$\varphi(u) = \frac{1}{q_1}\Big(\varphi(u-1) - \sum_{k=2}^{u} q_k\varphi(u-k+1)\Big),\ u \in \mathbb{N}.$$

- *Jei $q_0 = 0$, kur $x_0 = 0$ ir $y_0 \neq 0$, tada*

$$\varphi(0) = 0,$$
$$\varphi(1) = \frac{1}{y_0}(2 - \mathbb{E}Q),$$
$$\varphi(u) = \frac{1}{q_1}\Big(\varphi(u-1) - \sum_{k=2}^{u} q_k\varphi(u-k+1) + h_{u,0}\,\varphi(1)\Big),$$
$$u \in \{2, 3, \ldots\}.$$

**2.2.2 teorema.** *Nagrinėkime dviejų sezonų diskretaus laiko rizikos modelį su priklausomais ieškiniais generuotą atsitiktinio vektoriaus* $(X, Y)$*, kur* $X$ *ir* $Y$ *yra neneigiami ir sveikareikšmiai a.d. tokie, kad nėra tenkinama grynojo pelno sąlyga, t.y.* $\mathbb{E}X + \mathbb{E}Y \geqslant 2$*.*

*Jei* $\mathbb{E}X + \mathbb{E}Y > 2$*, tada* $\varphi(u) = 0$ *visiems* $u \in \mathbb{N}_0$*.*

*Jei* $\mathbb{E}X + \mathbb{E}Y = 2$*, tada turime tokius galimus atvejus:*

- $\varphi(u) = 0,\ u \in \mathbb{N}_0,$ *jei* $q_2 = h_{0,2} + h_{1,1} + h_{2,0} < 1$;
- $\varphi(0) = 0,\ \varphi(u) = 1,\ u \in \mathbb{N},$ *jei* $q_2 = 1$ *ir* $h_{2,0} = 0$;
- $\varphi(0) = \varphi(1) = 0,\ \varphi(u) = 1,\ u \in \{2, 3, \ldots\},$ *jei* $q_2 = 1$ *ir* $h_{2,0} > 0$.

## Algoritmas bankroto tikimybių reikšmių skaičiavimui

*Pirmiausiai reikia apskaičiuoti pakankamai daug sekų* $a_u$ *ir* $b_u$ *narių, apibrėžtų Teoremoje 2.2.1. Toliau galime aproksimuoti* $\psi(0)$

$$\psi_N(0) = 1 - (2 - \mathbb{E}Q)\frac{b_{N+1} - b_N}{a_N - a_{N+1}}$$

*su pakankamai dideliu* $N \in \mathbb{N}$*. Remiantis argumentais kurie aprašyti darbo [2] pastaboje 2.1, galime gauti apatinį ir viršutinį* $\psi(0)$ *įverčius apskaičiuodami* $\psi_N(0)$ *ir* $\psi_{N+1}(0)$*. Tuomet* $\psi(0)$ *aproksimavimo paklaidą galime rasti iš*

$$\Delta = |\psi_N(0) - \psi_{N+1}(0)|.$$

*Galiausiai, galime gauti bankroto tikimybių aproksimacijas naudodami formulę* (8) *iš Teoremos 2.2.1*

$$1 - \psi(u) = a_u(1 - \psi_N(0)) + b_u(2 - \mathbb{E}Q), \quad u \in \mathbb{N}.$$

# 3 Išvados

Disertacijoje gauti žemiau pateikti rezultatai:

(i) išvestas algoritmas Gerber-Shiu diskontuotos baudos funkcijos atskiro atvejo reikšmių skaičiavimui dviejų sezonų diskretaus laiko rizikos modelyje;

(ii) sukurtas algoritmas bankroto tikimybių skaičiavimui dviejų sezonų diskretaus laiko rizikos modelyje su priklausomais ieškiniais;

(iii) ištirtas atvejis, kai dviejų sezonų diskretaus laiko rizikos modelyje su priklausomais ieškiniais nėra tenkinama vadinamoji grynojo pelno sąlyga;

(iv) ištirtas gautų algoritmų efektyvumas ir skaitinės savybės skaitinių pavyzdžių pagalba;

(v) sukurti metodai algoritmų aproksimavimo paklaidų įvertinimui.

# 4 Summary

The topic of the thesis is the calculation of risk measures in inhomogeneous discrete time risk models with independent and dependent claims. Firstly, the algorithm for calculating the values of the particular case of the Gerber-Shiu discounted penalty function in bi-seasonal discrete time risk model was derived. Also, the algorithm for computing the values of the ultimate ruin probability in bi-seasonal discrete time risk model with dependent claims was created. In this model, the case when net profit condition is not satisfied was investigated as well. In the practical part of the thesis, the applicability and computational properties of the algorithms were investigated with numerical examples. Furthermore, methods were created for measuring approximation errors of the algorithms.

The results of the thesis extend the results obtained by Damarackas and Šiaulys (2014). In this paper the calculation of ruin probability in the bi-seasonal discrete time risk model was considered. Both more general risk measure (Gerber-Shiu function) and more general model are considered in the thesis. Bi-seasonal model with dependent claims is introduced for the first time in the thesis. Furthermore, with dependent and differently distributed claims, recursive calculation of ruin probability in any kind of discrete time risk model was not considered in the scientific literature before. Besides that, was derived the new algorithm for calculating Gerber-Shiu function values which is both more computationally feasible and less prone to numerical errors than the existing solutions found in the literature.

The main results of the thesis were proved using the classical methods of probability theory and mathematical analysis, with an emphasis on discrete differentiation.

# Literatūra


[1] Bieliauskienė E. and Šiaulys J. Gerber-Shiu function for the discrete inhomogeneous claim case. *Int. J. Comput. Math.* 89 (2012) 1617–1630.

[2] Damarackas J. and Šiaulys J. Bi-seasonal discrete time risk model. *Appl. Math. Comput.* 247 (2014) 930–940.

[3] De Vylder F.E. and Goovaerts M.J. Recursive calculation of finite-time ruin probabilities. *Insur. Math. Econ.* 7 (1988) 1–8.

[4] De Vylder F.E., Goovaerts M.J.: Explicit finite-time and infinite-time ruin probabilities in the continuous case. *Insurance: Mathematics and Economics* 24, 155–172 (1999).

[5] Dickson D.C.M. and Waters H.R. Recursive calculation of survival probabilities. *ASTIN Bull.* 21 (1991) 199–221.

[6] Gerber H.U.: Mathematical fun with the compound binomial process. *ASTIN Bulletin* 18, 161–168 (1988).

[7] Gerber H.U. and Shiu E.S.W. On the time value of ruin. *N. Am. Actuar. J.* 2 (1998) 48–78.

[8] Lundberg F. Approximerad Framställning av Sannolikehetsfunktionen, Återförsäkering av Kollektivrisker. Almqvist och Wiksell, Uppsala (1903).

[9] Sparre Andersen E. On the Collective Theory of Risk in Case of Contagion between Claims. *Transactions on XVth International Congress of Actuaries* (1957) 219–229.

# 5 Trumpos žinios apie disertantą

### Gimimo data ir vieta

1986 m. rugpjūčio 5 d., Vilnius

### Išsilavinimas

2004 – 2008 m. Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas, Matematikos ir taikomosios matematikos studijų programa, matematikos bakalauras

2008 – 2010 m. Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas, Matematinio modeliavimo ir optimizavimo studijų programa, matematikos magistras

2013 – 2017 m. Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas, Fizinių mokslų matematikos kryptis, doktorantūros studijos

UŽRAŠAMS

Vilniaus universiteto leidykla
Universiteto g. 1, LT-01513 Vilnius
El. p. info@leidykla.vu.lt,
www.leidykla.vu.lt
Tiražas 35 egz.