VILNIAUS UNIVERSITETAS

Gailė
PAUKŠTAITĖ

Apibendrintosios Gryno funkcijos uždaviniams su nelokaliosiomis sąlygomis

DAKTARO DISERTACIJOS SANTRAUKA

Fiziniai mokslai,
Matematika 01P

VILNIUS 2018

Disertacija rengta 2014– 2018 metais Vilniaus universitete.

Mokslinis vadovas:
prof. dr. Artūras Štikonas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).
Mokslinė konsultantė:
prof. dr. Olga Štikonienė (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).

Gynimo taryba:
Pirmininkas – **prof. dr. Konstantinas Pileckas** (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).
Nariai:
prof. habil. dr. Raimondas Čiegis (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).
prof. dr. Pranas Katauskis (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).
prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).
doc. dr. Peeter Oja (Tartu universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).

Disertacija ginama viešame Gynimo tarybos posėdyje 2018 m. gruodžio mėn. 13 d. 14 val. Vilniaus universiteto matematikos ir informatikos fakulteto fakulteto 102 auditorijoje. Adresas: Nauagarduko 24, LT-03225 Vilnius, Lietuva.

tel. +370 5 219 3050 ; el. paštas: mif@mif.vu.lt.

Disertaciją galima peržiūrėti VU interneto svetainėje adresu: *https://www.vu.lt/naujienos/ivykiu-kalendorius*

VILNIUS UNIVERSITY

Gailė
PAUKŠTAITĖ

Generalized Green's functions for problems with nonlocal conditions

SUMMARY OF DOCTORAL DISSERTATION

Physical sciences,
Mathematics 01P

VILNIUS 2018

This dissertation was written between 2014 and 2018 at Vilnius University.

Academic supervisor:
prof. dr. Artūras Štikonas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P).
Academic consultant:
prof. dr. Olga Štikonienė (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P).

This doctoral dissertation will be defended in a public/closed meeting of the Dissertation Defence Panel:

Chairman – prof. dr. Konstantinas Pileckas
(Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P).
Members:
prof. habil. dr. Raimondas Čiegis (Vilnius Gediminas Technical University, Physical sciences, Mathematics - 01P).
prof. dr. Pranas Katauskis (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P).
prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P).
doc. dr. Peeter Oja (Tartu University, Physical sciences, Mathematics - 01P).

The dissertation shall be defended at a public meeting of the Dissertation Defence Panel at 2:00 pm on 13th of December 2018 in Room 102 of the Faculty of Mathematics and Informatics, Vilnius University. Address: Naugarduko 24, LT-03225, Vilnius, Lithuania. Tel. +370 5 219 3050; e-mail: mif@mif.vu.lt.

The text of this dissertation can be accessed on the website of Vilnius University: *https://www.vu.lt/naujienos/ivykiu-kalendorius*

1 Tyrimo objektas

Disertacijoje yra nagrinėjamos paprastosios diferencialinės bei diskrečiosios lygtys su nelokaliosiomis sąlygomis. Tokios lygtys modeliuoja įvairias realaus gyvenimo situacijas, nebesutelpančias į klasininio uždavinio rėmus (pavyzdžiui, 2011 metais šia tema buvo publikuoti 27 straipsniai specialiajame žurnalo *Boundary Value problems* leidinyje [4]). Vis dėlto, nelokaliųjų uždavinių srityje yra neišvengiamai susiduriama su *korektiškumo* problema: praktiniai matematiniai modeliai ir grynai teorinio pobūdžio nelokalieji uždaviniai dažnai neturi vienintelio sprendinio. Todėl šiame darbe nelokalieji uždaviniai yra sprendžiami ne tiesiogiai, bet *mažiausių kvadratų prasme*, o vietoje vienintelio tikslaus sprendinio tiriamas *geriausias apytikslis sprendinys* [1, Ben-Israel and Greville, 2003]. Geriausias apytikslis sprendinys, literatūroje dažnai vadinamas *minimalios normos mažiausiu kvadratu sprendiniu*, yra vienas iš populiariausių tyrimo objektų šiandieniniame fizinių mokslų pasaulyje.

Disertacijoje siekiama minimalios normos mažiausių kvadratų sprendinį aprašyti vieninteliam sprendiniui giminінga forma. Čia yra akcentuojamas *Gryno funkcijos* vaidmuo. Iš tiesų, žinant Gryno funkcijos išraišką, nelokalusis uždavinys yra laikomas kone išspręstu [3, Cabada 2014], [5, Roman 2011]. Todėl šioje disertacijoje pagrindinis dėmesys yra skiriamas *apibendrintajai Gryno funkcijai*, kuri aprašo minimalios normos mažiausių kvadratų sprendinį ir praplečia klasikinę Gryno funkcijos interpretaciją.

2 Tikslas ir uždaviniai

Pagrindinis disertacijos tikslas yra gauti minimalios normos mažiausių kvadratų sprendinio pavidalą diferencialiniams uždaviniams su nelokaliosiomis sąlygomis. Siekiant įgyvendinti šią idėją, buvo sprędžiami tokie uždaviniai:

1) Įsitikinti minimalios normos mažiausių kvadratų sprendinio egzistavimu.
2) Gauti išsprendžiamumo sąlygas, kurios pasako, ar minimalios normos mažiausių kvadratų sprendinys yra tikslus ar, tikrąja žodžio prasme, apytikslis sprendinys.
3) Užrašyti minimalios normos mažiausių kvadratų sprendinį naudojant kito gimininingo uždavinio (angl. *relative problem*) vienintelį tikslų sprendinį.
4) Gauti minimalios normos mažiausių kvadratų sprendinį aprašančios apibendrintosios Gryno funkcijos išraišką.

Kadangi ne visuomet galima išspręsti diferencialinį uždavinį analitiniu būdu, lygiagrečiai buvo nagrinėjami diskretieji uždaviniai su nelokaliosiomis sąlygomis. Todėl buvo sprendžiami dar ir tokie uždaviniai:

5) Gauti išsprendžiamumo sąlygas, kurios pasako, ar diskretusis minimalios normos mažiausių kvadratų sprendinys yra tikslus ar, tikrąja žodžio prasme, apytikslis diskrečiojo uždavinio sprendinys.
6) Užrašyti diskretųjį minimalios normos mažiausių kvadratų sprendinį naudojant kito gimininingo uždavinio vienintelį diskretųjį sprendinį.
7) Gauti minimalios normos mažiausių kvadratų sprendinį aprašančios apibendrintosios diskrečiosios Gryno funkcijos pavidalą.
8) Tirti diskrečiojo minimalios normos mažiausių kvadratų sprendinio kovergavimą į diferencialinio uždavinio minimalios normos mažiausių kvadratų sprendinį bei suformuluoti pakankamas konvergavimo sąlygas.

3 Darbo struktūra ir pagrindiniai rezultatai

Disertaciją sudaro įvadas, šeši skyriai, bendrosios išvados ir literatūros sąrašas. Kiekvienas skyrius pradedamas įvadu ir baigiamas išvadomis. Kadangi visuose skyriuose rezultatai yra panašūs ir jų įrodymai analogiški, todėl išsamūs įrodymai yra pateikti tik pirmajame skyriuje. Kituose skyriuose dauguma analogiškų įrodymų yra praleista. Darbo apimtis yra 240 puslapių.

Toliau bus aprašomi pagrindiniai disertacijos rezultai. Formuluojant teoremas, lemas, išvadas, skliausteliuose bus pateikti disertacijoje naudojami jų pavadinimai anglų kalba. Teiginių numeracija skliausteliuose reiškia disertacijoje naudotą numeraciją „*skyrius.numeris*“.

3.1 Antrosios eilės diferencialinis uždavinys su nelokaliosiomis sąlygomis

Pirmajame skyriuje yra nagrinėjamas antrosios eilės diferencialinis uždavinys su nelokaliosiomis sąlygomis

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}u := u'' + a(x)u' + b(x)u = f(x), \quad x \in [0,1], \\ &\langle L_k, u\rangle = g_k, \ k = 1,2. \end{aligned} \tag{1}$$

Čia $u \in H^2[0,1]$, $a, b \in C[0,1]$, $f \in L^2[0,1]$, bet $L_k \in \big(C^1[0,1]\big)^*$ ir $g_k \in \mathbb{R}$. Apibrėžus operatorių $\boldsymbol{L} := (\mathcal{L}, L_1, L_2)^\top$, (1) uždavinys užrašomas ekvivalenčiu vektoriniu pavidalu $\boldsymbol{L}u = \boldsymbol{f}$ su dešiniąja puse $\boldsymbol{f} = (f, g_1, g_2)^\top$. Šis uždavinys turi vienintelį sprendinį, kai specialusis determinantas

$$\Delta := \begin{vmatrix} \langle L_1, z^1\rangle & \langle L_1, z^2\rangle \\ \langle L_2, z^1\rangle & \langle L_2, z^2\rangle \end{vmatrix}$$

yra nelygus nuliui [5, Roman 2011]; čia $z^1, z^2 \in N(\mathcal{L})$ yra bet kuri (1) homogeninės lygties fundamentalioji sistema. Be to, vienintelis sprendinys aprašomas pavidalu

$$u = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{f} = \int_0^1 G(x,y)f(y)\,dy + g_1v^1 + g_2v^2 \tag{2}$$

panaudojant atvirkštinį operatorių $\boldsymbol{L}^{-1} : L^2[0,1]\times\mathbb{R}^2 \to H^2[0,1]$, kuris apibūdinamas (1) uždavinio *Gryno funkcija* $G(x,y)$ ir *biortogonaliąja fundamentaliąja sistema* v^1, v^2.

Disertacijoje yra gauta tokia informacija apie vektorinio operatoriaus nulių aibę $N(\boldsymbol{L})$ ir defektą $d := \dim N(\boldsymbol{L})$:

1) $d = 0 \Leftrightarrow \Delta \neq 0$. Tuomet $N(\boldsymbol{L})$ yra trivialus.
2) $d = 2 \Leftrightarrow \Delta = 0$ ir visi $\langle L_k, z^l\rangle = 0$, $k,l = 1,2$. Tuomet $N(\boldsymbol{L}) = \operatorname{span}\{z^1, z^2\}$. Taigi lygties $\boldsymbol{L}u = \boldsymbol{0}$ sprendimas yra ekvivalentus lygties $\mathcal{L}u = 0$ sprendimui.
3) $d = 1 \Leftrightarrow \Delta = 0$ ir egzistuoja bent vienas nelygus nuliui skaičius $\langle L_k, z^l\rangle \neq 0$. Tegu tai būna $\langle L_{k_2}, z^l\rangle \neq 0$ pabrėžiant funkcionalo numerį k_2. Šiuo atveju $\boldsymbol{L}u = \boldsymbol{0}$ sprendimas ekvivalentus $\mathcal{L}u = 0$, $\langle L_{k_2}, u\rangle = 0$ sprendimui (atmetama lygtis $\langle L_{k_1}, u\rangle = 0$ su funkcionalo numeriu $k_1 := 3 - k_2$).

Priklausomai nuo defekto d reikšmės, skiriasi ir vaizdo $R(\boldsymbol{L})$ struktūra. Ji pateikta toliau suformuluotoje lemoje (1) uždaviniui, kuris neturi vienintelio sprendinio ($\Delta = 0$).

1 lema. *(Lemma 1.3)*

1) Jei $d = 2$*, tuomet su kiekvienu* $f \in L^2[0,1]$ *turime*

$$R(\boldsymbol{L}) = \left\{ \left(f; \int_0^1 \langle L_1, G^c(\cdot,y)\rangle f(y)\,dy; \int_0^1 \langle L_2, G^c(\cdot,y)\rangle f(y)\,dy \right)^\top \right\}.$$

2) Jei $d = 1$ *ir* $k_1 = 1$*, tai su* $\forall\ f \in L^2[0,1]$ *ir* $g_2 \in \mathbb{R}$ *turime*

$$R(\boldsymbol{L}) = \left\{ \left(f; g_2\langle L_1, v^2\rangle + \int_0^1 \langle L_1, G^a(\cdot,y)\rangle f(y)\,dy; g_2 \right)^\top \right\}.$$

3) Jei $d = 1$ *ir* $k_1 = 2$*, tai su* $\forall\ f \in L^2[0,1]$ *ir* $g_1 \in \mathbb{R}$ *turime*

$$R(\boldsymbol{L}) = \left\{ \left(f; g_1; g_1\langle L_2, v^1\rangle + \int_0^1 \langle L_2, G^a(\cdot,y)\rangle f(y)\,dy \right)^\top \right\}.$$

Čia $G^c(x,y)$ yra Koši uždavinio Gryno funkcija; $G^a(x,y)$ ir v^1, v^2 atitinkamai yra Gryno funkcija ir biortogonalioji fundamentalioji sistema pagalbiniam uždaviniui su ta pačia lygtimi $\mathcal{L}u = f$, sąlyga $\langle L_{3-k_1}, u\rangle = 0$ ir kita sąlyga $\langle \ell, u\rangle = 0$, kuri pakeičia sąlygą $\langle L_{k_1}, u\rangle = 0$. Sąlygą $\langle \ell, u\rangle = 0$ parenkame taip, kad šis pagalbinis uždavinys turėtų vienintelį sprendinį ($\Delta \neq 0$).

Iš šios lemos yra gaunamos dvi išvados. Pirmoje pateikta jungtinio uždavinio nulių aibės struktūra.

2 išvada. *(Corollary 1.4) Yra teisingi tokie tvirtinimai:*

1) *jei $d = 2$, tuomet $N(\boldsymbol{L}^*)$ yra lygus*
$\operatorname{span}\left\{\big(-\langle L_1, G^c(\cdot,x)\rangle; 1; 0\big)^\top,\ \big(-\langle L_2, G^c(\cdot,x)\rangle; 0; 1\big)^\top\right\}$;
2) *jei $d = 1$ ir $k_1 = 1$, tuomet*
$N(\boldsymbol{L}^*) = \operatorname{span}\left\{\big(-\langle L_1, G^a(\cdot,x)\rangle; 1; -\langle L_1, v^2\rangle\big)^\top\right\}$;
3) *jei $d = 1$ ir $k_1 = 2$, tuomet*
$N(\boldsymbol{L}^*) = \operatorname{span}\left\{\big(-\langle L_2, G^a(\cdot,x)\rangle; -\langle L_2, v^1\rangle; 1\big)^\top\right\}$.

Kitoje išvadoje pateiktos išsprendžiamumo sąlygos uždaviniui, kuris neturi vienintelio sprendinio ($\Delta = 0$).

3 išvada. *(Corollary 1.5)* (1) *uždavinys su $\Delta = 0$ yra išsprendžiamas tada ir tik tada, jei galioja tokios sąlygos:*

1) $\int\limits_0^1 \langle L_k, G^c(\cdot,y)\rangle f(y)\,dy = g_k,\ k = 1,2,$ *kai $d = 2$;*

2) $g_2\langle L_1, v^2\rangle + \int\limits_0^1 \langle L_1, G^a(\cdot,y)\rangle f(y)\,dy = g_1$, *kai $d = 1$ ir $k_1 = 1$;*

3) $g_1\langle L_2, v^1\rangle + \int\limits_0^1 \langle L_2, G^a(\cdot,y)\rangle f(y)\,dy = g_2$, *kai $d = 1$ ir $k_1 = 2$.*

Toliau šiame skyriuje Roman rezultatai [5, 2011] ($u \in C^2[0,1]$ ir $f \in C[0,1]$) yra pritaikomi užrašyti vienintelio sprendinio $u \in H^2[0,1]$ išraiškoms ir jį aprašančios Gryno funkcijos pavidalams, kai $f \in L^2[0,1]$. Po to yra įrodoma, kad (1) uždaviniui, kuris turi vienintelį sprendinį ($\Delta \neq 0$) ar jo neturi ($\Delta = 0$), visuomet egzistuoja minimalios normos mažiausių kvadratų sprendinys u^o. Tai yra vienintelė funkcija, kuri minimizuoja netiktį

$$\|\boldsymbol{L}u^o - \boldsymbol{f}\| = \inf_{u \in H^2[0,1]} \|\boldsymbol{L}u - \boldsymbol{f}\|$$

ir yra „mažiausia“ tarp visų kitų šią netiktį minimizuojančių funkcijų u^g, t.y.,

$$\|u^o\| < \|u^g\|, \qquad \forall u^g \neq u^o.$$

Be to, $u^o = \boldsymbol{L}^\dagger \boldsymbol{f}$ aprašomas *Moore ir Penrose atvirkštiniu operatoriumi* $\boldsymbol{L}^\dagger : L^2[0,1] \to H^2[0,1]$, kuris yra vienintelis operatorinių Penrose lygčių

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^\dagger\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}, \quad \boldsymbol{L}^\dagger\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^\dagger = \boldsymbol{L}^\dagger, \quad (\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^\dagger)^* = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^\dagger, \quad (\boldsymbol{L}^\dagger\boldsymbol{L})^* = \boldsymbol{L}^\dagger\boldsymbol{L}$$

sprendinys. Kai egzistuoja įprastas atvirkštinis operatorius $\boldsymbol{L}^{-1}$, jis sutampa su Moore ir Penrose atvirkštiniu operatoriumi $\boldsymbol{L}^{-1} = \boldsymbol{L}^\dagger$, o (2) vienintelis sprendinys su funkcija

$$u^o = \boldsymbol{L}^\dagger \boldsymbol{f} = \int_0^1 G^g(x,y) f(y)\, dy + g_1 v^{g,1} + g_2 v^{g,2}.$$

Čia esantis branduolys $G^g(x,y)$ yra vadinamas (1) nelokaliojo uždavinio *apibendrintąja Gryno funkcija*, o funkcijos $v^{g,1}, v^{g,2}$ – *apibendrintąja biortogonaliąja fundamentaliąja sistema.*

Panaudojant $\boldsymbol{L}^\dagger$ savybes, išvedami minimalios normos mažiausių kvadratų sprendinio pavidalai ir gaunamos apibendrintosios Gryno funkcijos išraiškos. Pavyzdžiui, Roman savo darbe [5, 2011] užrašė (1) antrosios eilės diferencialinio uždavinio vienintelį sprendinį

$$u = u^c + (g_1 - \langle L_1, u^c \rangle) v^1 + (g_2 - \langle L_2, u^c \rangle) v^2$$

panaudodama Koši uždavinio ((1) lygtis su sąlygomis $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$) vienintelį sprendinį u^c. Čia v^1, v^2 yra (1) uždavinio biortogonalioji fundamentalioji sistema. Bendruoju atveju, kai uždavinys turi vienintelį sprendinį ar jo neturi, gauname analogišką minimalios normos mažiausių kvadratų sprendinio išraišką.

4 išvada. *(Corollary 1.20)* (1) *diferencialinio uždavinio minimalios normos mažiasusių kvadratų sprendinys yra lygus*

$$u^o = u^c - P_{N(\boldsymbol{L})}u^c + (g_1 - \langle L_1, u^c\rangle)v^{g,1} + (g_2 - \langle L_2, u^c\rangle)v^{g,2}.$$

Čia $v^{g,1}$, $v^{g,2}$ yra (1) *uždavinio apibendrintoji biortogonalioji fundamentalioji sistema, $P_{N(\boldsymbol{L})}$ – ortogonalusis projektorius į $N(\boldsymbol{L})$.*

Panašus sąryšis tarp geriausio apytikslio sprendinio ir vienintelio tikslaus sprendinio galioja bet kuriems uždaviniams

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}u = f, && \mathcal{L}v = f, \\ &\langle \widetilde{L}_k, u\rangle = \widetilde{g}_k, \quad k = 1, 2, && \langle L_k, v\rangle = g_k, \quad k = 1, 2, \end{aligned} \tag{3}$$

su vienoda dešiniąja puse $f \in L^2[0,1]$, $u, v \in H^2[0,1]$, bet skirtingais erdvės $(C^1[0,1])^*$ funkcionalais $\widetilde{L}_k$ ir $L_k,\ k = 1, 2$.

5 teorema. *(Theorem 1.19) Jeigu pirmasis* (3) *uždavinys turi vienintelį sprendinį u, tai antrojo* (3) *uždavinio minimalios normos mažiausių kvadratų sprendinys yra*

$$u^o = u - P_{N(\boldsymbol{L})}u + (g_1 - \langle L_1, u\rangle)v^{g,1} + (g_2 - \langle L_2, u\rangle)v^{g,2}.$$

Apibendrintosios Gryno funkcijos išraiška taip yra gauta.

6 lema. *(Lemma 1.22)* (1) *uždavinio apibendrintoji Gryno funkcija yra lygi*

$$G^g(x,y) = G^c(x,y) - P_{N(\boldsymbol{L})}G^c(x,y) - \textstyle\sum_{k=1}^{2}\langle L_k, G^c(\cdot,y)\rangle v^{g,k}(x).$$

Analogiškas sąryšis galioja (3) dviem uždaviniam.

7 teorema. *(Theorem 1.24) Jeigu pirmasis* (3) *uždavinys turi Gryno funkciją $G(x,y)$, tuomet antrojo* (3) *uždavinio apibendrintoji Gryno funkcija aprašoma lygybe*

$$G^g(x,y) = G(x,y) - P_{N(\boldsymbol{L})}G(x,y) - \sum_{k=1}^{2}\langle L_1, G(\cdot,y)\rangle v^{g,1}(x),$$

su visais $x \in [0,1]$ *ir beveik visais* $y \in [0,1]$.

Viena vertus, 6 lemoje yra pateiktas apibendrintosios Gryno funkcijos pavidalas, kuris visuomet gali būti panaudojamas apibendrintajai Gryno funkcijai apskaičiuoti, nes Gryno funkcija $G^c(x,y)$ Koši uždaviniui visuomet egzistuoja. Kita vertus, panaudoti 4 teoremą gali būti praktiškiau. Iš tiesų, apibendrintąją Gryno funkciją galima aspkaičiuoti panaudojant kito pakankamai sudėtingo nelokaliojo uždavinio Gryno funkciją ir atlikti mažiau skaičiavimų. Puikus pavyzdys yra diferencialinis uždavinys su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}u := u''(x) + a(x)u'(x) + b(x)u(x) = f(x), \quad x \in [0,1], \\
&\langle L_k, u\rangle := \langle \kappa_k, u\rangle - \gamma_k\langle \varkappa_k, u\rangle = g_k, \quad k = 1,2.
\end{aligned} \tag{4}$$

Čia $\kappa_k,\ k = 1,2$, yra funkcionalai, aprašantys (4) sąlygų klasikines dalis, t.y.,

$$\langle \kappa_1, u\rangle := \alpha_1 u(0) + \beta_1 u'(0), \qquad \langle \kappa_2, u\rangle := \alpha_2 u(1) + \beta_2 u'(1)$$

su $|\alpha_k| + |\beta_k| \neq 0$, $k = 1,2$. Kiti funkcionalai $\varkappa_k,\ k = 1,2$, aprašo pilnai nelokaliąsias (4) sąlygų dalis. Kai parametrai γ_1, γ_2 lygūs nuliui, uždavinys tampa klasikiniu.

8 išvada. *(Corollary 1.28) Jeigu* (4) *klasikinis uždavinys* ($\gamma_1, \gamma_2 = 0$) *turi Gryno funkciją* $G^{\mathrm{cl}}(x,y)$, *tuomet* (4) *uždavinio su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis* ($\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$) *apibendrintoji Gryno funkcija yra aprašoma lygybe*

$$G^g(x,y) = G^{\mathrm{cl}}(x,y) - P_{N(\boldsymbol{L})}G^{\mathrm{cl}}(x,y) + \sum_{k=1}^{2}\gamma_k\langle \varkappa_k, G^{\mathrm{cl}}(\cdot,y)\rangle v^{g,k}(x),$$

su visais $x \in [0,1]$ *ir beveik visais* $y \in [0,1]$.

Matome, kad tik pilnai nelokaliąsias sąlygas aprašantys funkcionalai $\varkappa_k$ yra panaudojami $G^g(x,y)$ rasti, jei žinoma $G^{\mathrm{cl}}(x,y)$. Ši apibendrintosios Gryno funkcijos aprašymo formulė, panaudojant klasikinio uždavinio Gryno funkciją, yra taikoma atskirame pirmojo skyriaus poskyryje, kuriame pateikta įvairių minimalios normos mažiausių kvadratų sprendinių ir apibendrintųjų Gryno funkcijų konstravimo pavyzdžių.

3.2 m-osios eilės diferencialinis uždavinys su nelokaliosiomis sąlygomis

Pirmojo skyriaus rezultatai yra apibendrinami antrajame skyriuje nagrinėjant m-osios eilės diferencialinį uždavinį

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}u := u^{(m)} + a_{m-1}(x)u^{(m-1)} + \ldots + a_1(x)u' + a_0(x)u = f(x),\ x \in [0,1],\\ &\langle L_k, u\rangle = g_k, \quad k = \overline{1,m}.\end{aligned} \tag{5}$$

Čia $u \in H^m[0,1]$, $a_1,\ldots,a_{m-1} \in C[0,1]$, $f \in L^2[0,1]$, o $L_k \in \big(C^{m-1}[0,1]\big)^*$ ir $g_k \in \mathbb{R}$. Apibrėžus $\boldsymbol{L} := (\mathcal{L}, L_1, \ldots, L_m)^\top : H^m[0,1] \to L^2[0,1] \times \mathbb{R}^m$, (5) uždavinys užrašomas ekvivalenčiu vektoriniu pavidalu $\boldsymbol{L}u = \boldsymbol{f}$ su dešiniąja puse $\boldsymbol{f} = (f, g_1, \ldots, g_m)^\top$.

Šis uždavinys turi vienintelį sprendinį, kai specialusis m-osios eilės determinantas

$$\Delta := \begin{vmatrix} \langle L_1, z^1\rangle & \ldots & \langle L_1, z^m\rangle \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \langle L_m, z^1\rangle & \ldots & \langle L_m, z^m\rangle \end{vmatrix}$$

yra nelygus nuliui [5, Roman 2011]; čia $z^1, \ldots, z^m \in N(\mathcal{L})$ yra bet kuri (5) homogeninės lygties fundamentalioji sistema. Tuomet vienintelis sprendinys yra užrašomas pavidalu

$$u = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{f} = \int_0^1 G(x,y)f(y)\,dy + g_1v^1 + \ldots + g_mv^m \tag{6}$$

panaudojant atvirkštinį operatorių $\boldsymbol{L}^{-1} : L^2[0,1] \times \mathbb{R}^m \to H^m[0,1]$, kuris apibūdinamas (5) uždavinio *Gryno funkcija* $G(x,y)$ ir *biortogonaliąja fundamentaliąja sistema* $v^1, \ldots, v^m$.

Šiame skyriuje yra gaunama vaizdo $R(\boldsymbol{L})$ struktūra (Lemma 2.3), rasta jungtinio uždavinio nulių aibė (Corollary 2.4) ir suformuluotos išsprendžiamumo sąlygos (Corollary 2.5). Šie rezultatai yra analogiški pirmojo skyriaus atitinkamiems rezultatams antrosios eilės lygčiai.

Po to yra pateikiamos vienintelio sprendinio savybės ir Gryno funkcijos išraiškos. Kaip ir pirmajame skyriuje, ši informacija nurodo formą, kuria siekima užrašyti (5) uždavinio minimalios normos mažiausių kvadratų sprendinį u^o ir jį atitinkančią apibendrintąją Gryno funkciją $G^g(x, y)$ tuo atveju, kai $\Delta = 0$.

Toliau yra tiriamas geriausias apytikslis sprendinys u^o. Tai yra vienintelė funkcija, kuri minimizuoja netiktį

$$\|\boldsymbol{L}u^o - \boldsymbol{f}\| = \inf_{u \in H^m[0,1]} \|\boldsymbol{L}u - \boldsymbol{f}\|$$

ir turi mažiausią normą tarp visų kitų šią netiktį minimizuojančių funkcijų u^g:

$$\|u^o\| < \|u^g\|, \qquad \forall u^g \neq u^o.$$

Be to, minimalios normos mažiausių kvadratų sprendinys visada egzistuoja ir yra apibūdinamas (6) analogišku pavidalu

$$u^o = \boldsymbol{L}^\dagger \boldsymbol{f} = \int_0^1 G^g(x, y) f(y)\, dy + g_1 v^{g,1} + \ldots + g_m v^{g,m}.$$

Čia $\boldsymbol{L}^\dagger : L^2[0,1] \times \mathbb{R}^m \to H^m[0,1]$ yra apibendrintasis atvirkštinis operatorius, kuris apibūdinamas (5) uždavinio *apibendrintąja Gryno funkcija* $G^g(x, y)$ ir *apibendrintąja biortogonaliąja fundamentaliąja sistema* $v^{g,1}, \ldots, v^{g,m}$. Kai uždavinys turi (6) vienintelį sprendinį, jis sutampa su funkcija u^o.

Kadangi Koši uždavinys ((5) lygtis su sąlygomis $u^{(k)}(0) = 0$, $k = \overline{0, m-1}$) visada turi vienintelį sprendinį u^c, tai minimalios normos mažiausių kvadratų sprendinį visuomet galima rasti pasinaudojant tokia išvada.

9 išvada. *(Corollary 2.16)* (5) *uždavinio minimalios normos mažiausių kvadratų sprendinys yra lygus*

$$u^o = u^c - P_{N(\boldsymbol{L})}u^c + (g_1 - \langle L_1, u^c\rangle)v^{g,1} + \ldots + (g_m - \langle L_m, u^c\rangle)v^{g,m}.$$

Apibendrintoji Gryno funkcija taip pat yra išreiškiama per Koši uždavinio Gryno funkciją $G^c(x,y)$.

10 lema. *(Lemma 2.18)* (5) *uždavinio apibendrintoji Gryno funkcija yra aprašoma lygybe*

$$G^g(x,y) = G^c(x,y) - P_{N(\boldsymbol{L})}G^c(x,y) - \sum_{k=1}^{m}\langle L_k, G^c(\cdot,y)\rangle v^{g,k}(x).$$

Be to, minimalios normos mažiausių kvadratų sprendinį galime užrašyti panaudoję kito uždavinio vienintelį sprendinį (Theorem 2.15), pavyzdžiui, klasikinio uždavinio sprendinį (Corollary 2.22). Apibendrintajai Gryno funkcijai taip pat galioja panašūs sąryšiai: ją galime išreikšti per kito uždavinio Gryno funkciją (Theorem 2.20), atskiru atveju per klasikinio uždavinio Gryno funkciją (Corollary 2.23). Šie rezultatai yra analogiškai formuluojami kaip pirmajame skyriuje atitinkami rezultatai antrosios eilės lygčiai.

3.3 Antrosios eilės diskretusis uždavinys su nelokaliosiomis sąlygomis

Trečiajame skyriuje nagrinėjamas antrosios eilės diskretusis uždavinys su nelokaliosiomis sąlygomis

$$\begin{aligned}&(\mathcal{L}u)_i := a_i^2u_{i+2} + a_i^1u_{i+1} + a_i^0u_i = f_i, \quad a_i^0, a_i^2 \neq 0, \quad i \in X_{n-2},\\&\langle L_k, u\rangle = g_k, \quad k = 1,2.\end{aligned} \tag{7}$$

Čia $u \in F(X_n)$, $a^0, a^1, a^2, f \in F(X_{n-2})$, $L_k \in F^*(X_n)$ bei skaičiai $g_k \in \mathbb{C}$ ir $n \geqslant 2$. Be to, $F(X_n)$ žymi diskrečiųjų kompleksinių funkcijų, apibrėžtų aibėje $X_n := \{0,1,2,\ldots,n\}$, aibę.

Užrašykime (7) uždavinį matricine forma $\mathbf{Au} = \mathbf{b}$ su dešiniąja puse $\mathbf{b} = (f_0, f_1, \ldots, f_{n-2}, g_1,\ g_2)^\top$. Čia sprendinys tapatinamas su stupleliu matrica $\mathbf{u} = (u_0, u_1, \ldots, u_n)^\top$ arba trumpai $\mathbf{u} = \sum_{i=0}^{n} u_i \mathbf{e}^i$ panaudojus standartinę bazę $\mathbf{e}^i$, $i = \overline{0, n}$. Taip pat bus naudojamas toks žymėjimas $\mathbf{f} = (f_0, \ldots, f_{n-2})^\top$.

Nagrinėjant diskretųjį uždavinį matricine forma, yra gaunami pirmajai disertacijos daliai panašūs rezultatai, kurioje buvo tiriama antrosios eilės diferencialinė lygtis su nelokaliosiomis sąlygomis.

Pirmiausia, diskretusis uždavinys turi vienintelį sprendinį, jeigu $\det \mathbf{A} \neq 0$ arba, dar kitaip pasakius [5, Roman 2011], specialusis determinantas

$$\Delta := \begin{vmatrix} \langle L_1, z^1 \rangle & \langle L_1, z^2 \rangle \\ \langle L_2, z^1 \rangle & \langle L_2, z^2 \rangle \end{vmatrix}$$

yra nelygus nuliui; čia $z^1, z^2 \in N(\mathcal{L})$ yra (7) diskrečiosios homogeninės lygties fundamentalioji sistema. Be to, vienintelis sprendinys aprašomas lygybe

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{G}\mathbf{f} + g_1 \mathbf{v}^1 + g_2 \mathbf{v}^2, \tag{8}$$

panaudojant atvirkštinę matricą $\mathbf{A}^{-1} := (\mathbf{G}\ \mathbf{v}^1\ \mathbf{v}^2)$, arba diskrečiuoju pavidalu

$$u_i = \sum_{j=0}^{n-2} G_{ij} f_j + g_1 v_i^1 + g_2 v_i^2, \quad i \in X_n.$$

Čia esantis branduolys $G \in F(X_n \times X_{n-2})$ yra vadinamas *diskrečiąja Gryno funkcija*, o funkcijos $v^1, v^2 \in F(X_n)$ – *diskrečiąja biortogonaliąja fundamentaliąja sistema* [5, Roman 2011]. Panaudojant atvirkštinę matricą $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$, šias funkcijas visuomet galima surasti

$$G_{ij} = B_{ij},\ i \in X_n,\ j \in X_{n-2}, \qquad v_i^1 = B_{i,n-1},\ v_i^2 = B_{in},\ i \in X_n.$$

Šio skyriaus pagrindinius rezultatus pradėsime formuluoti nuo uždavinio matricos nulių aibės $N(\mathbf{A})$ ir defekto $d := \dim N(\mathbf{A})$ savybių:

1) $d = 0 \Leftrightarrow \Delta \neq 0$. Tuomet $N(\mathbf{A})$ yra trivialus.
2) $d = 2 \Leftrightarrow \Delta = 0$ ir visi $\langle L_k, z^l \rangle = 0$, $k, l = 1, 2$. Tuomet $N(\mathbf{A}) = \operatorname{span}\{\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2\}$. Taigi lygties $\mathbf{Au} = \mathbf{0}$ sprendimas yra ekvivalentus lygties $\mathcal{L}u = 0$ sprendimui.
3) $d = 1 \Leftrightarrow \Delta = 0$ ir egzistuoja bent vienas nelygus nuliui skaičius $\langle L_k, z^l \rangle \neq 0$. Tegu tai būna $\langle L_{k_2}, z^l \rangle \neq 0$ pabrėžiant funkcionalo numerį k_2. Šiuo atveju $\mathbf{Au} = \mathbf{0}$ sprendimas ekvivalentus $\mathcal{L}u = 0$, $\langle L_{k_2}, u \rangle = 0$ sprendimui (atmetama lygtis $\langle L_{k_1}, u \rangle = 0$ su funkcionalo numeriu $k_1 := 3 - k_2$).

Defekto d reikšmė įtakoja ir vaizdo $R(\boldsymbol{L})$ struktūrą. Ji aprašyta toliau suformuluotoje lemoje (1) uždaviniui, kuris neturi vienintelio sprendinio ($\Delta = 0$).

11 lema. *(Lemma 3.1)*

1) Jei $d = 2$, tuomet su visomis $f \in F(X_{n-2})$ turime

$$R(\mathbf{A}) = \left\{ \left(f_0; f_1; \ldots; f_{n-2}; \sum_{j=0}^{n-2} \langle L_1^{\cdot}, G_{\cdot j}^c \rangle f_j; \sum_{j=0}^{n-2} \langle L_2^{\cdot}, G_{\cdot j}^c \rangle f_j \right)^\top \right\}.$$

2) Jei $d = 1$ ir $k_1 = 1$, tuomet su visomis funkcijomis $f \in F(X_{n-2})$ ir $g_2 \in \mathbb{C}$ turime

$$R(\mathbf{A}) = \left\{ \left(f_0; f_1; \ldots; f_{n-2};\ g_2 \langle L_1, v^2 \rangle + \sum_{j=0}^{n-2} \langle L_1^{\cdot}, G_{\cdot j}^a \rangle f_j;\ g_2 \right)^\top \right\}.$$

3) Jei $d = 1$ ir $k_1 = 2$, tuomet su visomis funkcijomis $f \in F(X_{n-2})$ ir $g_1 \in \mathbb{C}$ turime

$$R(\mathbf{A}) = \left\{ \left(f_0; f_1; \ldots; f_{n-2}; g_1; g_1 \langle L_2, v^1 \rangle + \sum_{j=0}^{n-2} \langle L_2^{\cdot}, G_{\cdot j}^a \rangle f_j \right)^\top \right\}.$$

Čia $G^c \in F(X_n \times X_{n-2})$ yra diskrečiojo Koši uždavinio diskrečioji Gryno funkcija; $G^a \in F(X_n \times X_{n-2})$ ir $\{v^1, v^2\}$ atitinkamai yra diskrečioji Gryno funkcija ir biortogonalioji fundamentalioji sistema pagalbiniam uždaviniui su ta pačia lygtimi $\mathcal{L}u = f$, sąlyga $\langle L_{3-k_1}, u \rangle = 0$ ir kita sąlyga $\langle \ell, u \rangle = 0$, kuri pakeičia sąlygą $\langle L_{k_1}, u \rangle = 0$. Sąlygą $\langle \ell, u \rangle = 0$ parenkame taip, kad šis pagalbinis uždavinys turėtų vienintelį sprendinį ($\Delta \neq 0$).

Iš šios lemos gauname dvi išvadas.

12 išvada. *(Corollary 3.2) Yra teisingi tokie tvirtinimai:*

1) kai $d = 2$, tuomet $N(\mathbf{A}^*)$ yra generuojama dviejų vektorių

$$\mathbf{w}^1 = -\sum_{j=0}^{n-2} \overline{\langle L_1^{\cdot}, G_{\cdot j}^c \rangle} \mathbf{e}^j + \mathbf{e}^{n-1}, \ \mathbf{w}^2 = -\sum_{j=0}^{n-2} \overline{\langle L_2^{\cdot}, G_{\cdot j}^c \rangle} \mathbf{e}^j + \mathbf{e}^n;$$

2) kai $d = 1$ ir $k_1 = 1$, tai $N(\mathbf{A}^*)$ yra generuojama vektoriaus

$$\mathbf{w} = -\sum_{j=0}^{n-2} \overline{\langle L_1^{\cdot}, G_{\cdot j}^a \rangle} \mathbf{e}^j + \mathbf{e}^{n-1} - \overline{\langle L_1, v^2 \rangle} \mathbf{e}^n;$$

3) kai $d = 1$ ir $k_1 = 2$, tai $N(\mathbf{A}^*)$ yra generuojama vektoriaus

$$\mathbf{w} = -\sum_{j=0}^{n-2} \overline{\langle L_2^{\cdot}, G_{\cdot j}^a \rangle} \mathbf{e}^j - \overline{\langle L_2, v^1 \rangle} \mathbf{e}^{n-1} + \mathbf{e}^n.$$

Kitoje išvadoje pateiktos išsprendžiamumo sąlygos uždaviniui, kuris neturi vienintelio sprendinio ($\Delta = 0$).

13 išvada. *(Corollary 3.32)* (7) *uždavinys su $\Delta = 0$ yra išsprendžiamas tada ir tik tada, jei galioja tokios sąlygos:*

1) $\sum_{j=0}^{n-2} \langle L_1^{\cdot}, G_{\cdot j}^c \rangle f_j = g_1$, $\sum_{j=0}^{n-2} \langle L_2^{\cdot}, G_{\cdot j}^c \rangle f_j = g_2$, kai $d = 2$;

2) $g_2 \langle L_1, v^2 \rangle + \sum_{j=0}^{n-2} \langle L_1^{\cdot}, G_{\cdot j}^a \rangle f_j = g_1$, kai $d = 1$ ir $k_1 = 1$;

3) $g_1 \langle L_2, v^1 \rangle + \sum_{j=0}^{n-2} \langle L_2^{\cdot}, G_{\cdot j}^a \rangle f_j = g_2$, kai $d = 1$ ir $k_1 = 2$.

Kai $\Delta = 0$, diskretusis uždavinys neturi vienintelio sprendinio. Todėl nagrinėjamas diskretusis minimalios normos mažiausių kvadratų sprendinys $\mathbf{u}^o$, kuris visada egzistuoja [1, Ben-Israel and Greville 2003]. Šis vektorius minimizuoja liekamojo vektoriaus euklidinę normą

$$\|\mathbf{A}\mathbf{u}^o - \mathbf{b}\| \leqslant \|\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{b}\|, \quad \forall \ \mathbf{u} \in \mathbb{C}^{(n+1)\times 1}, \tag{9}$$

ir turi mažiausią normą tarp visų (9) netiktį minimizuojančių vektorių $\mathbf{u}^g \in \mathbb{C}^{(n+1)\times 1}$, t.y.,

$$\|\mathbf{u}^o\| < \|\mathbf{u}^g\| \qquad \forall \ \mathbf{u}^g \neq \mathbf{u}^o. \tag{10}$$

Be to, minimalios normos mažiausių kvadratų sprendinys $\mathbf{u}^o = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{b}$ yra aprašomas Moore ir Penrose atvirkštine matrica $\mathbf{A}^\dagger$. Ji yra vienintelė matrica, tenkinanti visas matricines Penrose lygtis

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A} = \mathbf{A},\ \mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^\dagger,\ (\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger)^* = \mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger,\ (\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A})^* = \mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}.$$

Jeigu matrica $\mathbf{A}$ yra neišsigimusi, tai Moore ir Penrose atvirkštinė matrica sutampa su klasikine atvirkštine matrica $\mathbf{A}^{-1}$, o (8) vienintelis sprendinys – su minimalios normos mažiausių kvadratų sprendiniu

$$\mathbf{u}^o = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{b} = \mathbf{G}^g \mathbf{f} + g_1 \mathbf{v}^{g,1} + g_2 \mathbf{v}^{g,2},$$

kurį galime užrašyti diskrečiuoju pavidalu

$$u_i^o = \sum_{j=0}^{n-2} G_{ij}^g f_j + g_1 v_i^{g,1} + g_2 v_i^{g,2}, \quad i \in X_n.$$

Čia esantis diskretusis branduolys $G^g \in F(X_n \times X_{n-2})$ yra vadinamas *apibendrintąja diskrečiąja Gryno funkcija*, o funkcijos $v^{g,1}, v^{g,2} \in F(X_n)$ – *apibendrintąja diskrečiąja biortogonaliąja fundamentaliąja sistema.* Šias diskrečiąsias funkcijas galima surasti pasinaudojant apibendrintąja atvirkštine matrica $\mathbf{B} = \mathbf{A}^\dagger$:

$$G_{ij}^g = B_{ij},\ i \in X_n,\ j \in X_{n-2}, \quad v_i^{g,1} = B_{i,n-1},\ v_i^{g,2} = B_{in},\ i \in X_n.$$

Minimalios normos mažiausių kvadratų sprendinį taip pat galima užrašyti panaudojant kito uždavinio sprendinį.

14 išvada. *(Corollary 3.14) Diskretusis minimalios normos mažiausių kvadratų sprendinys yra aprašomas lygybe*

$$u^o = u^c - P_{N(A)} u^c + (g_1 - \langle L_1, u^c \rangle) v^{g,1} + (g_2 - \langle L_2, u^c \rangle) v^{g,2}.$$

Čia $v^{g,1}$, $v^{g,2}$ yra (7) uždavinio apibendrintoji fundamentalioji sistema.

Ši formulė visuomet yra pritaikoma, nes Koši uždavinys ((7) lygtis su sąlygomis $u_0 = u_1 = 0$) visuomet turi vienintelį sprendinį $u^c \in F(X_n)$ bei diskrečiąją Gryno funkciją $G^c \in F(X_n \times$

X_{n-2}). Panašus sąryšis taip pat galioja ir (3) dviem diskretiesiems uždaviniams.

15 teorema. *(Theorem 3.12) Jei pirmasis* (3) *uždavinys turi vienintelį sprendinį u, tai antrojo uždavinio minimalios normos mažiausių kvadratų sprendinys yra lygus*

$$u^o = u - P_{N(A)}u + v^{g,1}(g_1 - \langle L_1, u\rangle) + v^{g,2}(g_2 - \langle L_2, u\rangle).$$

Apibendrintąją diskrečiąją Gryno funkciją visuomet surasime pasinaudoję išvada.

16 išvada. *(Corollary 3.17)* (7) *uždavinio apibendrintoji Gryno funkcija yra lygi*

$$G^g_{ij} = G^c_{ij} - (P_{N(A)})_{i\cdot}G^c_{\cdot j} - v_i^{g,1}\langle L^{\cdot}_1, G^c_{\cdot j}\rangle - v_i^{g,2}\langle L^{\cdot}_2, G^c_{\cdot j}\rangle$$

su visais $i \in X_n,\ j \in X_{n-2}$.

Panašus sąryšis galioja dviem (3) diskretiesiems uždavinimas, kai pirmasis turi diskrečiąją Gryno funkciją $G \in F(X_n \times X_{n-2})$.

17 teorema. *(Theorem 3.16) Antrojo* (3) *uždavinio apibendrintoji diskrečioji Gryno funkcija aprašoma lygybe*

$$G^g_{ij} = G_{ij} - (P_{N(A)})_{i\cdot}G_{\cdot j} - v_i^{g,1}\langle L^{\cdot}_1, G_{\cdot j}\rangle - v_i^{g,2}\langle L^{\cdot}_2, G_{\cdot j}\rangle$$

su visais $i \in X_n,\ j \in X_{n-2}$.

Pritaikę šią teoremą diskrečiajam uždaviniui su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis, apibendrintąją diskrečiąją Gryno funkciją G^g taip pat galime išreikšti per klasikinio uždavinio diskrečiąją Gryno funkciją G^{cl} (Corollary 3.19).

Pagrindinis šios disertacijos skyriaus tikslas yra gauti diskrečiojo minimalios normos mažiausių kvadratų sprendinio konvergavimą į diferencialinio uždavinio geriausią apytikslį sprendinį. Pavyzdys (Example 3.20) motyvuoja standartinėje euklidinėje erdvėje sprendžiamą (9)–(10) minimizavimo uždavinį praplėsti minimizuojant (9) lygties netiktį vienoje normoje, kai trokštamas minimalus sprendinys turi mažiausią kitą (10) normą tarp visų netiktį minimizuojančių funkcijų. Minėtame pavyzdyje buvo įvesti erdvių $H^2[0,1]$ ir $L^2[0,1]\times\mathbb{R}^2$ diskretieji analogai $H^2(\overline{\omega}^h)$ ir $L^2(\omega^h)\times\mathbb{R}^2$ bei atitinkamos diskrečiosios normos tinklo $\overline{\omega}^h := \{x_i = ih,\ i=\overline{0,n},\ nh=1\}$ taškuose. Pabrėšime, kad taip apibendrinus minimizavimo uždavinį, yra gauti analogiški rezultatai diskrečiajam minimalios normos sprendiniui (Corollaries 3.24–3.26) ir apibendrintajai diskrečiajai Gryno funkcijai (Theorem 3.27 with Corollaries 3.28–3.29).

Pritaikius šiuos rezultatus, yra gaunamos pakankamos konvergavimo sąlygos.

18 teorema. *(Theorem 3.33) Tegu galioja aproksimacijos*

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}(\boldsymbol{\pi}_1 u) = \boldsymbol{\pi}_2 \boldsymbol{L} u + \boldsymbol{\mathcal{O}}(h^\alpha),\\
&\mathbf{P}_{H^2(\overline{\omega}^h),N(A)}(\boldsymbol{\pi}_1 u) = \boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{P}_{N(\boldsymbol{L})}u) + \boldsymbol{\mathcal{O}}(h^\alpha),\\
&\mathbf{P}_{L^2(\omega^h)\times\mathbb{R}^2,R(A)}\mathbf{b} = \boldsymbol{\pi}_2(\boldsymbol{P}_{R(\boldsymbol{L})}\boldsymbol{f}) + \boldsymbol{\mathcal{O}}(h^\alpha)
\end{aligned}$$

su kokiu nors $\alpha > 0$. *Jeigu* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\mathbf{A}^\dagger\|_{H^2(\overline{\omega}^h),\, L^2(\omega^h)\times\mathbb{R}^2} < +\infty$, *tuomet* (7) *uždavinio geriausias apytikslis sprendinys* $\mathbf{u}^o \in H^2(\overline{\omega}^h)$ *konverguoja į* (1) *diferencialinio uždavinio geriausią apykslį sprendinį* $u^o \in H^2[0,1]$, *būtent,*

$$\|\mathbf{u}^o - \boldsymbol{\pi}_1 u^o\|_{C(\overline{\omega}^h)} = \max_{x_i\in\overline{\omega}^h} |u_i^o - u^o(x_i)| \to 0, \qquad \textit{kai} \quad n\to\infty.$$

Šioje teoremoje pažymėjome $\boldsymbol{O}(h^\alpha) := \big(O(h^\alpha),\dots,O(h^\alpha)\big)^\top$ ir naudojome projektavimo operatorių $\boldsymbol{\pi}_1 : H^2[0,1] \to H^2(\overline{\omega}^h)$, kuris diskretizuoja funkciją $u \in H^2[0,1]$ pataškiui tinklo $\overline{\omega}^h$ taškuose, t.y., $\boldsymbol{\pi}_1 u = \big(u(x_0), u(x_1), \dots, u(x_n)\big)^\top$. Kito projektavimo operatoriaus $\boldsymbol{\pi}_2 : L^2[0,1]\times\mathbb{R}^2 \to L^2(\omega^h)\times\mathbb{R}^2$ forma nėra svarbi.

Skaitytojui gali iškilti klausimas, kodėl yra nagrinėjami kompleksiniai diskretieji uždaviniai, nors diferencialiniu atveju buvo tiriami vien realūs uždaviniai. Pirma, negalima ignoruoti fakto, kad diferencialinis uždavinys gali būti aproksimuojamas kompleksiniu diskrečiuoju uždaviniu. Antra, susidaro įspūdis, kad kompleksinių matricų teorija yra plačiau išvystyta nei kompleksinių operatorių teorija, ji paprasčiau taikoma. Trečia, dauguma autorių nagrinėja kompleksines matricas, o ne tiktai realiąsias.

3.4 m-osios eilės diskretusis uždavinys su nelokaliosiomis sąlygomis

Trečiojo skyriaus rezultatai yra apibendrinami ketvirtajame skyriuje nagrinėjant m-osios eilės diskretųjį uždavinį su nelokaliosiomis sąlygomis

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{L}u)_i := a_i^m u_{i+m} + \ldots + a_i^1 u_{i+1} + a_i^0 u_i = f_i, \quad i \in X_{n-m},\\
&\langle L_k, u\rangle = g_k, \quad k = \overline{1, m}.
\end{aligned}
$$

Čia $u \in F(X_n)$, $a^0, \ldots, a^m, f \in F(X_{n-m})$, $a_i^0, a_i^m \neq 0$ su visais $i \in X_{n-m}$, bet $L_k \in F^*(X_n)$, $g_k \in \mathbb{C}$ ir $n \geqslant m$.

Visi šio skyriaus rezultatai yra panašiai formuluojami kaip ankstesniame skyriuje. Pavyzdžiui, pateikta vaizdo $R(\mathbf{A})$ struktūra (Lemma 4.1), užrašyta jungtinio uždavinio nulių aibės išraiška (Corollary 4.2) ir suformuluotos išsprendžiamumo sąlygos (Corollary 4.3). Be to, yra pateikti diskretaus minimalios normos mažiausių kvadratų sprendinio pavidalai (Theorem 4.11, Corollaries 4.12 and 4.16) bei apibendrintosios diskrečiosios Gryno funkcijos išraiškos (Theorem 4.14, Corollaries 4.15 and 4.17).

Šie rezultatai yra apibendrinti minimizavimo uždaviniui su dviem skirtingomis diskrečiosiomis normomis vietoje standartinės euklidinės normos abiejuose (9)–(10) minimizavimo žingsniuose. Minimalios normos mažiausių kvadratų sprendiniui (Corollaries 4.21–4.23) bei apibendrintajai diskrečiajai Gryno funkcijai (Theorem 4.24 with Corollaries 4.25–4.26) yra gautos panašios savybės. Ketvirtojo skryriaus pabaigoje yra pateiktos pakankamos diskrečiojo minimalios normos mažiausių kvadratų sprendinio konvergavimo į (5) diferencialinio uždavinio minimalios normos mažiausių kvadratų sprendinį sąlygos (Theorem 4.32).

3.5 Pirmosios eilės diferencialinių lygčių sistemos su nelokaliosiomis sąlygomis

Penktajame skyriuje tiriamos pirmosios eilės diferencialinių lygčių sistemos su nelokaliosiomis sąlygomis

$$\begin{aligned}
&\frac{d\,u^k}{dx} = \sum_{l=1}^{m} a^{kl}(x)u^l + f^k(x), \quad x \in [0,1], \\
&\sum_{l=1}^{m} \langle L_{kl}, u^l \rangle = g_k, \quad k = \overline{1,m},
\end{aligned} \tag{11}$$

pateikiamas trumpesne forma $\boldsymbol{\mathcal{L}u} = \boldsymbol{f}$, $\langle \boldsymbol{L}_k, \boldsymbol{u} \rangle = g_k$, $k = \overline{1,m}$. Čia imami realūs skaičiai g_k ir funkcijos $\boldsymbol{u} = (u^1, \ldots, u^m)^\top \in (H^1[0,1])^m$, $\boldsymbol{f} = (f^1, \ldots, f^m)^\top \in (L^2[0,1])^m$, $a^{kl} \in C[0,1]$ bei funkcionalai $\boldsymbol{L}_k = (L_{k1}, L_{k2}, \ldots, L_{km})$ su $L_{kl} \in C^*[0,1]$.

Uždavinys užrašomas vektoriniu pavidalu $\boldsymbol{Lu} = \boldsymbol{b}$ ir tiriamas panašiai kaip prieš tai buvę uždaviniai. Taigi gaunami analogiški rezultatai: operatoriaus $\boldsymbol{L}$ vaizdo charakterizacija (Lemma 5.3), jungtinio uždavinio nulių aibės pavidalas (Corollary 5.4) bei uždavinio išsprendžiamumo sąlygos (Corollary 5.5).

Po to nagrinėjamas uždavinio vienintelis sprendinys

$$\boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{b} = \int_0^1 \boldsymbol{G}(x,y)\boldsymbol{f}(y)\,dy + g_1\boldsymbol{v}^1(x) + \ldots + g_m\boldsymbol{v}^m(x),$$

čia $\boldsymbol{G} = \big(G^{kl}(x,y)\big)$, $k,l = \overline{1,m}$, yra (11) uždavinio *Gryno matrica*, o funkcijos $\boldsymbol{v}^1, \ldots, \boldsymbol{v}^m$ – *biortogonalioji fundamentalioji sistema.* Gautos vienintelio sprendinio (Lemma 5.7) bei Gryno matricos (Lemma 5.9) išraiškos. Be to, yra nagrinėjamas ryšys tarp

m-osios eilės (5) diferencialinės lygties su nelokaliosiomis sąlygomis ir ją atitinkančios pirmosios eilės diferencialinių lygčių sistemos. Pirmiausia, yra gauta Gryno funkcijos išraiška panaudojant ekvivalenčios sistemos Gryno matricą.

19 išvada. *(Corollary 5.12)* (5) *skaliarinio uždavinio Gryno funkcija yra išreiškiama per ekvivalančios* (11) *sistemos Gryno matricą taip* $G(x,y) = G^{1m}(x,y)$.

Po to Gryno matrica yra užrašoma per Gryno funkciją.

20 lema. *(Lemma 5.14) Gryno matrica gali būti išreikšta per ekvivalentaus skaliarinio uždavinio Gryno funkciją tokiu būdu*

$$G^{kl}(x,y) = -\frac{\partial^{m+k-l-1}}{\partial x^{k-1}\partial y^{m-l}}G(x,y) - \sum_{i=0}^{m-l-1}(-1)^i \frac{\partial^i}{\partial y^i}\left(a_{l+i}(y)\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}G(x,y)\right)$$

su visais $k, l = \overline{1,m}$.

Vis dėlto, šios disertacijos tikslas yra tirti uždavinius, kurie neturi vienintelio sprendinio, taigi ir Gryno funkcijos. Todėl (11) sistema yra sprendžiama mažiausių kvadratų prasme ir nagrinėjama minimalios normos mažiausių kvadratų sprendinio

$$\boldsymbol{u}^o = \boldsymbol{L}^\dagger \boldsymbol{b} = \int_0^1 \boldsymbol{G}^g(x,y)\boldsymbol{f}(y)\,dy + g_1\boldsymbol{v}^{g,1} + \ldots + g_m\boldsymbol{v}^{g,m},$$

išraiška. Čia $\boldsymbol{G}^g = \left(G^{g,kl}(x,y)\right)$, $k, l = \overline{1,m}$, yra (11) uždavinio *apibendrintoji Gryno matrica*, o funkcijos $\boldsymbol{v}^{g,1}, \ldots, \boldsymbol{v}^{g,m}$ – *apibendrintoji biortogonalioji fundamentalioji sistema.*

21 išvada. *(Corollary 5.19)* (11) *sistemos minimalios normos mažiausių kvadratų sprendinys yra lygus*

$$\boldsymbol{u}^o = \boldsymbol{u}^c - \boldsymbol{P}_{N(\boldsymbol{L})}\boldsymbol{u}^c + (g_1 - \langle \boldsymbol{L}_1, \boldsymbol{u}^c\rangle)\boldsymbol{v}^{g,1} + \ldots + (g_m - \langle \boldsymbol{L}_m, \boldsymbol{u}^c\rangle)\boldsymbol{v}^{g,m}.$$

Šia formule visuomet galima pasinaudoti, nes Koši uždavinys ((11) sistema su sąlygomis $u^k(0) = 0$, $k = \overline{1,m}$) visuomet turi vienintelį sprendinį $\boldsymbol{u}^c$. Koši uždaviniui visada egzistuoja ir Gryno matrica $\boldsymbol{G}^c(x, y)$. Todėl apibendrintąją Gryno matricą galima analogiškai aprašyti.

22 lema. *(Lemma 5.21)* (11) *uždavinio apibendrintoji Gryno matrica yra lygi*

$$\boldsymbol{G}^g(x, y) = \boldsymbol{G}^c(x, y) - \boldsymbol{P}_{N(\boldsymbol{L})}\boldsymbol{G}^c(x, y) - \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{v}^{g,k}(x)\langle \boldsymbol{L}_k, \boldsymbol{G}^c(\cdot, y)\rangle.$$

Panašūs sąryšiai galioja dviem (3) sistemom.

23 teorema. *(Theorem 5.18) Jeigu uždavinys* $\boldsymbol{\mathcal{L}u} = \boldsymbol{f}$, $\langle \widetilde{\boldsymbol{L}}_k, \boldsymbol{u}\rangle = \widetilde{g}_k$, $k = \overline{1, m}$, *turi vienintelį sprendinį* $\boldsymbol{u}$, *tuomet* (11) *uždavinio minimalios normos mažiausių kvadratų sprendnys yra aprašomas lygybe*

$$\boldsymbol{u}^o = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{P}_{N(\boldsymbol{L})}\boldsymbol{u} + \sum_{k=1}^{m}(g_k - \langle \boldsymbol{L}_k, \boldsymbol{u}\rangle)\boldsymbol{v}^{g,k}.$$

Apibendrintajai Gryno matricai galioja analogiškas teiginys.

24 teorema. *(Theorem 5.23) Jeigu uždavinys* $\boldsymbol{\mathcal{L}u} = \boldsymbol{f}$, $\langle \widetilde{\boldsymbol{L}}_k, \boldsymbol{u}\rangle = \widetilde{g}_k$, $k = \overline{1, m}$, *turi Gryno matricą* $\boldsymbol{G}(x, y)$, *tuomet* (11) *uždavinio apibendrintoji Gryno matrica yra lygi*

$$\boldsymbol{G}^g(x, y) = \boldsymbol{G}(x, y) - \boldsymbol{P}_{N(\boldsymbol{L})}\boldsymbol{G}(x, y) - \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{v}^{g,k}(x)\langle \boldsymbol{L}_k, \boldsymbol{G}(\cdot, y)\rangle$$

su visais $x \in [0, 1]$ *ir beveik visais* $y \in [0, 1]$.

Ši teorema yra pritaikoma (11) sistemai su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis $\langle \boldsymbol{L}_k, \boldsymbol{u}\rangle := \langle \boldsymbol{\kappa}_k, \boldsymbol{u}\rangle - \gamma_k\langle \boldsymbol{\varkappa}_k, \boldsymbol{u}\rangle = g_k$, $k = \overline{1, m}$. Čia funkcionalai $\boldsymbol{\kappa}_k$ aprašo klasikines, $\boldsymbol{\varkappa}_k$ – pilnai nelokaliąsias sąlygų dalis. Kai klaskinis uždavinys (visi $\gamma_k = 0$ (11) uždavinyje) turi Gryno matricą $\boldsymbol{G}^{\mathrm{cl}}$, tuomet gauname dar vieną apibendrintosios Gryno matricos formulę.

25 lema. *(Lemma 5.24)* (11) *uždavinio su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis apibendrintoji Gryno matrica turi pavidalą*

$$\boldsymbol{G}^g(x,y) = \boldsymbol{G}^{\mathrm{cl}}(x,y) - \boldsymbol{P}_{N(\boldsymbol{L})}\boldsymbol{G}^{\mathrm{cl}}(x,y) + \sum_{k=1}^{m} \gamma_k \boldsymbol{v}^{g,k}(x)\langle \varkappa_k, \boldsymbol{G}^{\mathrm{cl}}(\cdot,y)\rangle$$

su visais $x \in [0,1]$ ir beveik visais $y \in [0,1]$.

3.6 Pirmosios eilės diskrečiųjų lygčių sistemos su nelokaliosiomis sąlygomis

Šeštajame skyriuje nagrinėjamos pirmosios eilės diskrečiųjų lygčių sistemos su nelokaliosiomis sąlygomis

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{L}U)_i^k := u_{i+1}^k - \sum_{l=1}^{m} a_i^{kl} u_i^l = f_i^k, \quad i \in X_{n-1}, \\
&\sum_{l=1}^{m} \langle L_{kl}, u^l \rangle = g_k, \quad k = \overline{1,m},
\end{aligned} \tag{12}$$

kurios pateikiamos trumpesne forma $\boldsymbol{\mathcal{L}U} = \boldsymbol{F}$, $\langle \boldsymbol{L}_k, \boldsymbol{U}\rangle = g_k$, $k = \overline{1,m}$. Čia funkcijos $\boldsymbol{U} = (u^1,\dots,u^m)^\top \in F^m(X_n)$, $\boldsymbol{F} = (f^1,\dots,f^m)^\top \in F^m(X_{n-1})$, $a^{kl} \in F(X_{n-1})$, $g_k \in \mathbb{C}$ ir $L_{kl} \in F^*(X_n)$.

Šis uždavinys tiriamas jį perrašius ekvivalenčia matricine forma $\boldsymbol{AU} = \boldsymbol{B}$. Gaunamas vaizdo $R(\boldsymbol{A})$ pavidalas (Lemma 6.1), pateikta jungtinio uždavinio nulių aibė (Corollary 6.2) bei suformuluojamos išsprendžiamumo sąlygos (Corollary 6.3).

Visi gauti rezultatai savo forma primena ankstesniuose disertacijos skyriuose aptartus rezultatus tiek tuo atveju, kai (12) uždavinys turi vienintelį sprendinį ar jo neturi. Pavyzdžiui, geriausias apytikslis sprendinys $\boldsymbol{U}^o = \boldsymbol{A}^\dagger \boldsymbol{B}$ visada gali būti rastas panaudojus Koši uždavinio ((12) sistema su sąlygomis $u_0^k = 0$, $k = \overline{1,m}$) vienintelį sprendinį $\boldsymbol{U}^c$, nes šis visuomet egzistuoja.

26 išvada. *(Corollary 6.12)* (12) *sistemos geriausias apytikslis sprendinys yra lygus*

$$\boldsymbol{U}^o = \boldsymbol{U}^c - \boldsymbol{P}_{N(\boldsymbol{A})}\boldsymbol{U}^c + \sum_{k=1}^{m} (g_k - \langle \boldsymbol{L}_k, \boldsymbol{U}^c\rangle)\boldsymbol{V}^{g,k}.$$

Čia $\boldsymbol{V}^{g,k}$, $k = \overline{1,m}$, *yra* (12) *uždavinio apibendrintoji biortogonalioji fundamentalioji sistema.*

Dabar pateiksime šios formulės apibendrinimą.

27 teorema. *(Theorem 6.11) Jeigu uždavinys* $\boldsymbol{\mathcal{L}U} = \boldsymbol{F}$, $\langle \widetilde{\boldsymbol{L}}_k, \boldsymbol{U} \rangle = \widetilde{g}_k$, $k = \overline{1,m}$, *turi vienintelį sprendinį* $\boldsymbol{U}$, *tuomet* (12) *uždavinio geriausias apytikslis sprendinys yra aprašomas lygybe*

$$\boldsymbol{U}^o = \boldsymbol{U} - \boldsymbol{P}_{N(\boldsymbol{A})}\boldsymbol{U} + \sum_{k=1}^{m} (g_k - \langle \boldsymbol{L}_k, \boldsymbol{U} \rangle)\boldsymbol{V}^{g,k}.$$

Minimalios normos mažiausių kvadratų sprendinį taip pat galima užrašyti pavidalu $\boldsymbol{U}^o = \boldsymbol{G}^g \boldsymbol{F} + g_1 \boldsymbol{V}^{g,1} + \ldots + g_m \boldsymbol{V}^{g,m}$ naudojant apibendrintojo atvirkštinio operatoriaus išdėstymą $\boldsymbol{A}^\dagger = (\boldsymbol{G}^g,\ \boldsymbol{V}^{g,1},\ \ldots,\ \boldsymbol{V}^{g,m})$, arba diskrečiąja forma

$$(u^o)_i^k = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l=1}^{m} G_{ij}^{g,kl} f_j^l + g_1 v_i^{g,1;k} + \ldots + g_m v_i^{g,m;k}$$

su visais $k = \overline{1,m}$ ir $i \in X_n$. Čia esantis diskretusis branduolys $\boldsymbol{G}^g = (G_{ij}^{g,kl}) \in F^{m\times m}(X_n \times X_{n-1})$ yra vadinamas *apibendrintąja diskrečiąja Gryno matrica*, diskrečiosios funkcijos $\boldsymbol{V}^{g,l} = (v_i^{g,l;k}) \in F^m(X_n)$ – *apibendrintąja diskrečiąja fundamentaliąja sistema*. Kai diskretusis uždavinys turi vienintelį sprendinį $\boldsymbol{U}$, tai jis sutampa su minimalios normos mažiausių kvadratų sprendiniu $\boldsymbol{U}^o$, o diskrečioji Gryno matrica $\boldsymbol{G} = (G_{ij}^{kl}) \in F^{m\times m}(X_n \times X_{n-1})$ su apibendrintąja diskrečiąja Gryno matrica $\boldsymbol{G}^g = (G_{ij}^{g,kl})$. Be to, yra teisingas toks tvirtinimas.

28 lema. *(Lemma 6.15)* (12) *uždavinio apibendrintoji diskrečioji matrica yra lygi*

$$G_{ij}^{g,kl} = G_{ij}^{c,kl} - \left(P_{N(\boldsymbol{A})} G^c\right)_{ij}^{kl} - \sum_{\ell=1}^{m} v_i^{g,\ell;k} \langle \boldsymbol{L}_\ell, \boldsymbol{G}_{\cdot j}^{c,\cdot l} \rangle$$

su visais $i \in X_n$, $j \in X_{n-1}$ *ir* $k, l = \overline{1,m}$.

Lemoje pasinaudota Koši uždavinio diskrečioji Gryno matrica $\boldsymbol{G}^c = (G_{ij}^{c,kl})$, kuri šiam uždaviniui visuomet egzistuoja. Iš tiesų, šios lemos tvirtinimą galima apibendrinti.

29 teorema. *(Theorem 6.16) Jeigu uždavinys $\boldsymbol{\mathcal{L}U} = \boldsymbol{F}$, $\langle \widetilde{\boldsymbol{L}}_k, \boldsymbol{U}\rangle = \widetilde{g}_k$, $k = \overline{1,m}$, turi diskrečiąją Gryno matricą $\boldsymbol{G}$, tuomet* (12) *uždavinio apibendrintoji diskrečioji matrica yra aprašoma lygybe*

$$G_{ij}^{g,kl} = G_{ij}^{kl} - \big(P_{N(\boldsymbol{A})}G\big)_{ij}^{kl} - \sum_{\ell=1}^{m} v_i^{g,\ell;k}\langle \boldsymbol{L}_\ell, \boldsymbol{G}_{\cdot j}^{\cdot l}\rangle.$$

Šią teoremą galima pritaikyti (12) uždaviniui su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis $\langle \boldsymbol{L}_k, \boldsymbol{u}\rangle := \langle \boldsymbol{\kappa}_k, \boldsymbol{u}\rangle - \gamma_k\langle \boldsymbol{\varkappa}_k, \boldsymbol{u}\rangle = g_k$, $k = \overline{1,m}$.

30 išvada. *(Corollary 6.17) Tegu* (12) *klasikinis uždavinys (visi $\gamma_k = 0$) turi diskrečiąją Gryno matricą $\boldsymbol{G}^{\mathrm{cl}}$. Tuomet nelokaliojo kraštinio uždavinio ($\gamma_k \in \mathbb{R}$) apibendrintoji diksrečioji Gryno matrica yra lygi*

$$G_{ij}^{g,kl} = G_{ij}^{\mathrm{cl},kl} - \big(P_{N(\boldsymbol{A})}G^{\mathrm{cl}}\big)_{ij}^{kl} + \sum_{\ell=1}^{m} v_i^{g,\ell;k}\gamma_\ell\langle \boldsymbol{\varkappa}_\ell, \boldsymbol{G}_{\cdot j}^{\mathrm{cl},\cdot l}\rangle.$$

Galiausiai suformuluojamas rezultatas apie diskrečiojo minimalios normos mažiausių kvadratų sprendinio konvergavimą.

30 teorema. *(Theorem 6.19) Tegu galioja aproksimacijos*

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\pi}_1\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\pi}_2\boldsymbol{L}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\mathcal{O}}(h^\alpha),\\
&\boldsymbol{P}_{N(\boldsymbol{A})}(\boldsymbol{\pi}_1\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\pi}_1\boldsymbol{P}_{N(\boldsymbol{L})}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\mathcal{O}}(h^\alpha),\\
&\boldsymbol{P}_{R(\boldsymbol{A})}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\pi}_2\boldsymbol{P}_{R(\boldsymbol{L})}\boldsymbol{f} + \boldsymbol{\mathcal{O}}(h^\alpha)
\end{aligned}$$

su kokiu nors $\alpha > 0$. Jeigu $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|\mathbf{A}^\dagger\| < +\infty$, tuomet diskretusis minimalios normos mažiausių kvadratų sprendinys $\boldsymbol{U}^o$ konverguoja į (11) *diferencialinio uždavinio minimalios normos mažiausių kvadratų sprendinį $\boldsymbol{u}^o \in \big(H^1[0,1]\big)^m$, t.y.,*

$$\max_{x_i\in\overline{\omega}^h,\ k=\overline{1,m}} |(u^o)_i^k - u^{o,k}(x_i)| \to 0, \qquad \textit{kai} \quad n \to \infty.$$

Šioje teoremoje yra naudojamas projektavimo operatorius $\boldsymbol{\pi}_1$, kuris diskretizuoja funkciją $\boldsymbol{u} \in (H^1[0,1])^m$ pataškiui tinklo $\overline{\omega}^h$ taškuose, būtent, $\boldsymbol{\pi}_1 \boldsymbol{u} = \big(u^k(x_i)\big) \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}$. Kito projektavimo operatoriaus $\boldsymbol{\pi}_2$ forma nėra svarbi.

4 Metodai

Disertacijoje buvo naudojami populiarūs tiesinės algebros bei funkcinės analizės metodai (pvz., Ryso teorema apie tiesinio tolydaus funkcionalo išraišką Hilberto erdvėse ar Sobolevo įdėjimo teoremos), taip pat metodai iš diferencialinių lygčių teorijos ir optimizavimo uždavinių sprendimo (pvz., apibendrintojo atvirkštinio operatoriaus, žinomo *Moore ir Penrose vardu*, taikymai optimaliems sprendiniams aprašyti). Be to, įprastu ir apibendrintuoju atvirkštiniais operatoriais buvo išreiškiami įvairūs sprendiniai siekiant tirti sprendinių savybes, panaudojant atvirkštinių operatorių savybes. Pabrėšime Gryno funkcijos metodą, kurio pagalba buvo gautas apibendrintosios Gryno funkcijos pavidalas. Konstantų variavimo metodas buvo taikomas šeštajame disertacijos skyriuje nagrinėjant diskrečiąsias sistemas. Jis padėjo gauti diskrečiosios Gryno matricos išraišką.

Pagrindinis dėmesys šiame darbe buvo skiriamas Moore ir Penrose atvirkštiniam operatoriui, kuris aprašo minimalios normos mažiausių kvadrtų sprendinį analogišku būdu, kaip kad įprastas atvirkštinis operatorius aprašo vienintelį tikslų sprendinį.

5 Aktualumas ir naujumas

Kadangi Moore ir Penrose atvirkštinis operatorius turi daugybę taikymų ir yra itin plačiai nagrinėjamas mokslinėje literatūroje [1, Ben-Israel and Greville 2003], todėl kai kurie šioje disertacijoje gauti rezultatai yra gimininingi kitų autorių gautiems rezultatams (pavyzdžiui, [2, Boichuk and Samoilenko 2004]). Vis dėlto, dauguma šioje disertacijoje gautų rezultatų yra originalūs ir nėra kitų autorių publikuoti. Pateikta informacija yra aktuali fizikoje, mechanikoje, biologijoje, ekonomikoje ir kitose ne tik teorinėse, bet ypač taikomosiose mokslo šakose, kuriose kone neišvengiamai tenka susidurti su realaus gyvenimo situacijas modeliuojančio uždavinio geriausiu apytiksliu sprendiniu.

Gautos išsprendžiamumo sąlygos gali atsakyti, ar gautasis minimalios normos mažiausių kvadrtatų sprendinys yra tikslus sprendinys ar ne. Be to, šioje disertacijoje praktiškai visi rezultatai yra tiriami lygiagrečiai diferencialiniams ir diskretiems uždaviniams. Čia gautos išraiškos ir savybės yra pateiktos patogia palyginimui forma, kai uždavinys turi vienintelį sprendinį ir jo neturi. Akcentuojame, kad gauta informacija gali būti panaudota, kaip pagrindas gilesniam diskrečiojo minimalios normos mažiausių kvadratų sprendinio konvergavimo tyrimui į diferencialinio uždavinio minimalios normos mažiausių kvadratų sprendinį (kas atrodo iki šiol sistemingai dar nenagrinėta). Išreikštinės apibendrintosios Gryno funkcijos išraiškos gali būti naudojamos silpnai netiesiniams uždaviniams spręsti ar tirti sprendinių egzistavimą.

6 Rezultatų sklaida

Disertacijos rezultatai buvo pristatyti 14 mokslinių konferencijų, tarp jų pusė tarptautinės konferencijos:

1) *MMA2013* (Mathematical Modelling and Analysis, 2013 metai), Tartu, Estija, gegužės 27-30, 2013, “Generalized Green’s functions for discrete boundary value problems”;
2) *MMA2014*, Druskininkai, Lietuva, gegužės 26–29, 2014, “Ordinary and generalized Green’s functions for discrete nonlocal problems”;

3) *MMA2015*, Sigulda, Latvija, gegužės 26-29, 2015, "Generalized Greens functions for m-th order discrete nonlocal problems";
4) *MMA2016*, Tartu, Estija, birželio 1-4, 2016, "Generalized Green‘s functions to the differential nonlocal problems";
5) *NUMTA2016* (Numerical Computations: Theory and Algorithms, 2016 metai), Pizzo Calabro, Italija, birželio 19–25, 2016, "The minimum norm least squares solution to the discrete nonlocal problems";
6) *MMA2017*, Druskininkai, Lietuva, gegužės 30–birželio 2, 2017, "Green's matrices for first order differential systems with nonlocal conditions";
7) *MMA2018*, Sigulda, Latvija, gegužės 29–birželio 1, 2018, "The minimum norm least squares solution to differential nonlocal problems".

Kiti rezultatai buvo pristatyti Lietuvos matematikos draugijos organizuojamose konferencijose (LMD):

8) *LMD*, Klaipėda, Lietuva, birželio 11–12, 2012, "Generalized Green's functions for second order discrete problem with nonlocal conditions";
9) *LMD*, Vilnius, Lietuva, birželio 19–20, 2013, "Investigation of matrix nullity for the second order discrete problem with nonlocal conditions";
10) *LMD*, Vilnius, Lietuva, birželio 26–27, 2014, "General classification of the nullity for the second order discrete problems with nonlocal conditions";
11) *LMD*, Kaunas, Lietuva, birželio 16–17, 2015, "Nullity for the second order discrete problem with nonlocal multipoint boundary conditions";
12) *LMD*, Vilnius, Lietuva, birželio 20–21, 2016, "Nullspace of the m-th order discrete problem with nonlocal conditions";

13) *LMD*, Vilnius, Lietuva, birželio 21–22, 2017, “On the convergence of the minimizer for second order discrete nonlocal problems”;
14) *LMD*, Kaunas, Lietuva, birželio 18-19, 2018, “Green's Matrices for Differential Systems with Nonlocal Conditions”.

7 Publikacijų sąrašas

Mokslinio tyrimo rezultatai disertacijos tema yra publikuoti 11 darbų, tarp kurių 5 yra *Clarivate Analytics* duomenų bazės *Web of Science* sąraše. 4 straipsniai yra publikuoti žurnaluose su citavimo indeksu:

1) G. Paukštaitė, A. Štikonas, *Generalized Green's functions for the second-order discrete problems with nonlocal conditions*, Lith. Math. J., **54**(2): 203-219, 2014, https://doi.org/10.1007/s10986-014-9238-8
2) G. Paukštaitė, A. Štikonas, “Ordinary and generalized Green's functions for the second order discrete nonlocal problems”, Bound. Value Probl., **2015**:**207**, 1-19, 2015, https://doi.org/10.1186/s13661-015-0474-6
3) G. Paukštaitė, A. Štikonas, “Green's Matrices for First Order Differential Systems with Nonlocal Conditions”, Math. Model. Anal., **22**(2): 213-227, 2017, https://doi.org/10.3846/13926292.2017.1291456
4) G. Paukštaitė, A. Štikonas, *Generalized Green's functions for mth-order discrete nonlocal problems*, Lith. Math. J., **57**(1):109-127, 2017, https://doi.org/10.1007/s10986-017-9346-3

Vienas darbas pasirodė tarptautinės konferencijos “Numerical Computations: Theory and Algorithms” (NUMTA2016) leidinyje:

5) A. Štikonas, G. Paukštaitė, *The minimum norm least squares solution to the discrete nonlocal problems*, AIP Conf. Proc. **1776**, 090039 (2016), https://doi.org/10.1063/1.4965403

Toliau pateikti darbai pasirodė referuojamame leidinyje “Proceedings of the Lithuanian Mathematical Society” (Lietuvos matematikos draugijois konferencijos darbai):

6) G. Paukštaitė, A. Štikonas, *Generalized Green’s functions for second-order discrete boundary-value problems with nonlocal boundary conditions*, Liet. matem. rink. Proc. LMS, Ser. A, **53**: 96-101, 2012.
7) G. Paukštaitė, A. Štikonas, *Investigation of matrix nullity for the second order discrete nonlocal boundary value problem*, Liet. matem. rink. Proc. LMS, Ser. A, **54**: 49-54, 2013.
8) G. Paukštaitė, A. Štikonas, *Classification of the nullity for the second order discrete nonlocal problems*, Liet. matem. rink. Proc. LMS, Ser. A, **55**: 40-45, 2014.
9) G. Paukštaitė, A. Štikonas, *Nullity of the second order discrete problem with nonlocal multipoint boundary conditions*, Liet. matem. rink. Proc. LMS, Ser A, **56**: 72-76, 2015.
10) G. Paukštaitė, A. Štikonas, *Nullspace of the m-th order discrete problem with nonlocal conditions*, Liet. matem. rink. Proc. LMS, Ser A, **57**: 59-64, 2016.
11) G. Paukštaitė, A. Štikonas, *The minimizer for the second order differential problem with one nonlocal condition*, Liet. matem. rink. Proc. LMS, Ser A, **58**: 28-33, 2017.

8 Išvados

Pagrindinės šios disertacijos išvados yra tokios:

1) Nagrinėti uždaviniai visuomet turi apibendrintąjį atvirkštinį operatorių, apibendrintąją Gryno funkciją/matricą ir vienintelį minimalios normos mažiausių kvadrtų sprendinį.
2) Kai $\Delta \neq 0$, Moore ir Penrose atvirkštinis operatorius sutampa su įprastu atvirkštiniu operatoriumi, minimalios normos mažiausių kvadratų sprendinys sutampa su vieninteliu tiksliu sprendiniu, apibendrintoji Gryno funkcija/matrica sutampa su įprasta Gryno funkcija/matrica, o apibendrintoji fundamentalioji sistema su įprasta fundamentaliąja sistema.
3) Visais atvejais, minimalios normos mažiausių kvadratų sprendinys yra paraidžiui panašiai užrašomas kaip vienintelis sprendinys: jis gali būti išreikštas panaudojant Koši uždavinio ar kito giminingo uždavinio (ta pati lygtis bet kitos nelokaliosios sąlygos) vienintelį sprendinį.
4) Apibendrintoji Gryno funkcija irgi yra paraidžiui panašiai išreiškiama kaip įprasta Gryno funkcija: ji gali būti užrašyta panaudojant Koši uždavinio ar kito giminingo uždavinio (ta pati lygtis bet kitos nelokaliosios sąlygos) įprastą Gryno funkciją. Apibendrintosioms Gryno matricoms galioja analogiška išvada.
5) Gautos diskrečiojo minimalios normos mažiausių kvadratų sprendinio savybės sutampa su atitinkamomis diferencialinio uždavinio minimalios normos mažiausių kvadratų sprendinio savybėmis.
6) Galiojant konkrečioms sąlygoms (Theorems 3.33, 4.32 and 6.19), diskretus minimalios normos mažiausių kvadratų sprendinys konverguoja į diferencialinio uždavinio minimalios normos mažiausių kvadratų sprendinį.

9 Summary

In this thesis, we investigate linear differential and discrete problems with nonlocal conditions of a one variable. Since many mathematical problems, modelling processes and phenomena of the real life or taken for theoretical purposes only, do not have unique solutions, we consider problems in the *least squares sense*, where the existence of a unique *best approximate solution* is possible [1, Ben-Israel and Greville 2003]. This function is often called a *minimum norm least squares solution* and nowadays is one of the most popular objects of investigation.

Our aim is to describe the best approximate solution in a form related to the classical representation of the unique solution. Here the essential role is played by the concept of a *Green's function.* Indeed, if we know a Green's function, then a problem is considered as formally solved [3, Cabada 2014], [5, Roman 2011]. Thus, developing this analogy to a unique best approximate solution, we focus our study on a *generalized Green's function*, which describes a minimum norm least squares solution and extends the classical meaning of an ordinary Green's function.

In this thesis, we derived various expressions of the minimum norm least squares solution using the unique solution of other relative problem (the same equation but different nonlocal conditions). Smoothness properties of this minimizer were studied as well. We also obtained descriptions of a generalized Green's function via ordinary Green's functions of other relative problems, for instance, the Cauchy problem. For discrete problems, there are additionally studied questions of the convergence and formulated sufficient convergence conditions of discrete minimizer to the minimum norm least squares solution of a differential problem.

Moreover, we derived conditions those answer if the minimizer is the exact solution or the approximate solution. The nullspace for the adjoint problem is found and the range representation is given. All chapters are illustrated by examples.

Let us note that obtained results have literally identical representations to corresponding features of other chapters. The information of this thesis seems to be the profitable background for more systematic studies of minimum norm least squares solutions and more detailed convergence analysis.

10 Trumpos žinios apie autorę

Gimimo data ir vieta:

1989 m. gegužės 13 d., Širvintos.

Išsilavimas:

1996–2001 Pradinis išsilavinimas. Bagaslaviškio Igno Šeiniaus pagrindinė mokykla.

2001–2008 Vidurinis išsilavinimas. Širvintų Lauryno Stuokos–Gucevičiaus gimnazija (su pagyrimu).

2008–2012 Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas. Matematikos bakalauras (*Cum Laude* diplomas).

2012–2014 Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas. Matematikos magistras (*Magna Cum Laude* diplomas).

2014–2018 Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas. Matematikos doktorantūros studijos.

Akademinio darbo patirtis:

2012–2014 Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto laborantė.

2014–2015 Vilniaus universiteto Matematikos ir instituto projekto specialistė.

2014–2017 Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto asistentė.

2017–2018 Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto jaunesnioji asistentė.

Stažuotės:

2016 *Second Summer School on Harmonic Analysis and Partial Differential Equations 2016*, liepos 4–8 d., 2016, Bilbao, Ispanija.

Stipendijos ir apdovanojimai:

2011 Vardinė profesoriaus Martyno Yčo stipendija.

2012 Vardinė akademiko Vytauto Statulevičiaus stipendija.

2014 Tikslinė stipendija už mokslo pasiekimus.

Literatūra

[1] A. Ben-Israel and T.N.E. Greville. *Generalized Inverses: Theory and Applications, Second edition.* Springer Verlag, New York, 2003.

[2] A.A. Boichuk and A. M. Samoilenko. *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems.* VSP, Utrecht-Boston, The Netherlands, 2004. Available from Internet: https://doi.org/10.1515/9783110944679.

[3] A. Cabada. *Green's Functions in the Theory of Ordinary Differential Equations.* Springer, New York, 2014. Available from Internet: https://doi.org/10.1007/978-1-4614-9506-2.

[4] D. Franco, G. Infante and F.M. Minhós. Nonlocal boundary value problems. *Boundary Value Problems*, **2012**(Article ID 23):1, 2012. Available from Internet: https://doi.org/10.1186/1687-2770-2012-23.

[5] S. Roman. *Green's functions for boundary-value problems with nonlocal boundary conditions.* PhD thesis, Vilnius University, 2011. Available from Internet: http://www.mii.lt/files/s_roman_mii_disertacija.pdf.

Vilniaus universiteto leidykla
Universiteto g. 1, LT-01513 Vilnius
El. p. info@leidykla.vu.lt,
www.leidykla.vu.lt
Tiražas 40 egz.