VILNIAUS UNIVERSITETAS

Eglė
JAUNĖ

Sunkiauodegių skirstinių sumos asimptotika rizikos teorijoje

DAKTARO DISERTACIJOS SANTRAUKA

Fiziniai mokslai,
matematika 01P

VILNIUS 2018

Disertacija rengta 2014–2018 metais Vilniaus universitete.

Mokslinis vadovas:

prof. habil. dr. Jonas Šiaulys

Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P

Mokslinis konsultantas:

prof. habil. dr. Remigijus Leipus

Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P

Gynimo taryba:

Pirmininkas – **prof. habil. dr. Kęstutis Kubilius**

Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Nariai:

prof. habil. dr. Vydas Čekanavičius

Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas

Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

prof. habil. dr. Vigirdas Mackevičius

Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

prof. habil. dr. Yuliya Mishura

Nacionalinis Kijevo Taraso Ševčenkos universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P

Disertacija ginama viešame Gynimo tarybos posėdyje 2018 m. gruodžio 14 d. 15 val. 30 min. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto Jono Kubiliaus vardo (102) auditorijoje. Adresas: Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius, Lietuva.

Disertaciją galima peržiūrėti Vilniaus universiteto bibliotekoje ir VU interneto svetainėje adresu: www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius.

VILNIUS UNIVERSITY

Eglė
JAUNĖ

Tail asymptotics of a sum of heavy-tailed distributions with application to risk theory

SUMMARY OF DOCTORAL DISSERTATION

Physical sciences,
mathematics 01P

VILNIUS 2018

This dissertation was written between 2014 and 2018 (Vilnius University).

Academic supervisor:

Prof. Habil. Dr. Jonas Šiaulys (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

Academic adviser:

Prof. Habil. Dr. Remigijus Leipus (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

The doctoral dissertation will be defended in a public meeting of the Dissertation Defence Panel:

Chairman – Prof. Habil. Dr. Kęstutis Kubilius (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P).

Members:

Prof. Habil. Dr. Vydas Čekanavičius (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P).

Prof. Habil. Dr. Antanas Laurinčikas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P).

Prof. Habil. Dr. Vigirdas Mackevičius (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P).

Prof. Habil. Dr. Yuliya Mishura (Taras Shevchenko National University of Kyiv, Physical sciences, Mathematics – 01P).

The dissertation shall be defended at a public meeting of the Dissertation Defence Panel at 3:30 p.m. on 14 December 2018 in lecture room dedicated to Jonas Kubilius (102) of the Faculty of Mathematics and informatics (Vilnius University).

Address: Naugarduko st. 24, LT-03225 Vilnius, Lithuania.

The text of this dissertation can be accessed at the library of Vilnius University, as well as on the website of Vilnius University: www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius.

1 Tyrimo objektas ir aktualumas

Tarkime, kad $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ yra realieji sunkiauodegiai atsitiktiniai dydžiai (a.d.), vadinami pagrindiniais kintamaisiais, o $\{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n\}$ yra neneigiami ir neišsigimę nulyje a.d., vadinami atsitiktiniais svoriais. A.d. $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ ir $\{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n\}$ yra apibrėžti tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Atsitiktinė svertinė suma

$$S_n^{\theta X} = \sum_{i=1}^{n} \theta_i X_i \tag{1.1}$$

yra pagrindinis tyrimo objektas.

Tokios atsitiktinės svertinės sumos dažnai sutinkamos sprendžiant praktinius aktuarinius ir finansinius uždavinius. Pavyzdžiui, diskretaus laiko rizikos modelyje realusis a.d. X_k, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, gali būti interpretuojamas kaip draudimo bendrovės grynasis nuostolis per k-ąjį laikotarpį, o atsitiktinis svoris θ_k, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, gali būti suprantamas kaip atsitiktinis diskonto faktorius per pirmuosius k laikotarpių. Šiuo atveju suma $S_n^{\theta X}$ yra draudimo bendrovės bendro grynojo nuostolio, patirto per pirmuosius n laikotarpių, dabartinė vertė.

Kita sumos (1.1) interpretacija susijusi su investicinio portfelio konstravimu. Tarkime, kad investicinis portfelis susideda iš n priklausomų rizikos šaltinių (vertybinių popierių, rizikos faktorių, verslo sričių ar kt.) su nuostoliais X_k ir svoriais θ_k, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, per tam tikrą laikotarpį ateityje. Jei portfelis yra aktyviai valdomas, svoriai ateityje ir jų priklausomybės struktūra yra nežinoma. Šiuo atveju suma (1.1) gali būti naudojama modeliuojant galimus bendrus portfelio nuostolius ateityje.

Suma (1.1) pastaruoju metu buvo plačiai nagrinėjama literatūroje. Daugumoje darbų nagrinėjamas uodegos tikimybės $\mathbb{P}(S_n^{\theta X} > x)$ asimptotinis elgesys. Tang ir Tsitsiashvili [17] įrodė, kad nepriklausomiems vienodai pasiskirsčiusiems pagal subeksponentinį skirstinį (žr. apibrėžimą 5.2) atsitiktiniams dydžiams $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ ir atsitiktiniams svoriams $\{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n\}$ (nepriklausomiems nuo $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$), įgyjantiems reikšmes intervale $[a, b]$, $0 < a < b < \infty$, galioja asimptotinės lygybės

$$\mathbb{P}\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant n} S_k^{\theta X} > x\Big) \underset{x\to\infty}{\sim} \mathbb{P}(S_n^{\theta X} > x) \underset{x\to\infty}{\sim} \mathbb{P}\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant n} \theta_k X_k > x\Big) \underset{x\to\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\theta_k X_k > x).$$

Vėliau buvo pradėtas nagrinėti sąlyginio uodegos vidurkio $\mathbb{E}(S_n^{\theta X}|S_n^{\theta X}>x)$ ir su juo susijusių dydžių $\mathbb{E}S_n^{\theta X}\mathbb{1}_{\{S_n^{\theta X}>x\}}$, $\mathbb{E}\theta_l X_l \mathbb{1}_{\{S_n^{\theta X}>x\}}$, $l\in\{1,2,\ldots,n\}$, asimptotinis elgesys kai $x\to\infty$, siekiant išvesti asimptotines rizikos kapitalo paskirstymo formules riziką matuojant sąlyginiu uodegos vidurkiu (angl. *Conditional Tail Expectation* (CTE)). Prisiminkime, kad, jei $S_n^Z := \sum_{i=1}^n Z_i$, tuomet su pasikliovimo lygmeniu q bendras rizikos kapitalo dydis yra

$$\mathrm{CTE}_q(S_n^Z) = \mathbb{E}\big(S_n^Z \mid S_n^Z > \mathrm{VaR}_q(S_n^Z)\big),$$

o rizikos kapitalo dalis, skirta rizikai $l\in\{1,\ldots,n\}$, remiantis Eulerio principu (žr., pvz., [6] arba 6.3.2 skyrių šaltinyje [16]) yra

$$\mathrm{AC}_{ql}\left(S_n^Z\right) = \mathbb{E}\left(Z_l|S_n^Z > \mathrm{VaR}_q\left(S_n^Z\right)\right).$$

Čia $\mathrm{VaR}_q(Z) = F_Z^{-1}(q)$.

Asimptotinis šių rizikos matų elgesys, kai $q\uparrow 1$, gali padėti suprasti ribines bendros rizikos ir jos sudedamųjų dalių savybes. Įvairios pristatytų matų savybės pateikiamos šaltiniuose [1], [2], [4], [6], [10], [15], [16] ir juose esančiose nuorodose. Detalią asimptotinio VaR ir CTE sąryšio analizę sunkiauodegių skirstinių atveju galima rasti, pvz., straipsniuose Fougère ir Mercadier [7], Joe and Lei [9] bei Li ir Zhu [13].

Mūsų žiniomis, pirmosios asimptotinės rizikos kapitalo paskistymo formulės buvo publikuotos straipsnyje Tang ir Yuan [18], kuriame buvo nagrinėti realūs nepriklausomi pagrindiniai kintamieji su reguliariai kintančiais skirstiniais (žr. apibrėžimą 5.4). Vėliau asimptotiniai rezultatai tiek uodegos tikimybei, tiek uodegos vidurkiui, buvo iš dalies apibendrinti neneigiamiems pagrindiniams kintamiesiems arba realiems pagrindiniams kintamiesiems su tam tikromis asimptotinės nepriklausomybės prielaidomis. Realiems pagrindiniams kintamiesiems su asimptotine priklausomybe tik asimptitinė uodegos tikimybė, mūsų žiniomis, buvo nagrinėta straipsnyje Kortschak ir Albrecher [11].

2 Tyrimo tikslas

Disertacijos tikslas yra papildyti nagrinėjamos temos rezultatų aibę realiems atsitiktiniams dydžiams su skirtingomis priklausomybės struktūromis įvairiose sunkiauodegių skirstinių klasėse.

3 Tyrimo metodai

Disertacijoje naudojami tikimybių teorijos, integralų skaičiavimo ir matų konvergavimo metodai. Kompiuteriniai skaičiavimai ir simuliacijos atliktos naudojant programinį paketą MATLAB.

4 Naujumas

Visi rezultatai pateikti 6-ame skyriuje yra nauji.

5 Apibrėžimai

Funkcijoms f ir g žymėsime:

$f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} g(x)$, jei $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 1$;

$f(x) \underset{x\to\infty}{\lesssim} g(x)$, jei $\limsup\limits_{x\to\infty} f(x)/g(x) \leqslant 1$;

$f(x) = o\left(g(x)\right)$, jei $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 0$;

$f(x) = O(g(x))$, jei $\limsup\limits_{x\to\infty} f(x)/g(x) < \infty$;

$f(x) \asymp g(x)$, jei $0 < \liminf\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \limsup\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$.

Toliau pateikiami darbe naudojamų sąvokų apibrėžimai.

Apibrėžimas 5.1. *Realaus kintamojo pasiskirstymo funkcija (p.f.)* $F = 1 - \overline{F}$ *vadinama sunkiauodege* ($F \in \mathcal{K}$), *jei* $\int_0^\infty e^{\varepsilon x} \mathrm{d}F(x) = \infty$ *visiems* $\varepsilon > 0$.

Apibrėžimas 5.2. *Realaus kintamojo p.f.* F *priklauso subeksponentinių skirstinių klasei* ($F \in \mathcal{S}$), *jeigu jos teigiama dalis* $F^+(x) = F(x)\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$ *tenkina sąryšį:* $\lim\limits_{x\to\infty} (F^+ * F^+(x))/F^+(x) = 2$.

Apibrėžimas 5.3. *Realaus kintamojo p.f.* F *priklauso ilgauodegių skirstinių klasei* ($F \in \mathcal{L}$), *jei* $\lim\limits_{x\to\infty} \overline{F}(x+y)/\overline{F}(x) = 1$ *kiekvienam fiksuotam* $y \in \mathbb{R}$.

Apibrėžimas 5.4. *Realaus kintamojo p.f.* F *priklauso dominuojamai kintančių skirstinių klasei* ($F \in \mathcal{D}$), *jei kiekvienam fiksuotam* $0 < y < 1$ $\limsup\limits_{x\to\infty} \overline{F}(xy)/\overline{F}(x) < \infty$.

Kiekviena p.f. $F \in \mathcal{D}$ gali būti charakterizuojama viršutiniu Matuszewska indeksu

$$\mathcal{M}_F = \inf_{y>1}\left\{-\frac{1}{\log y}\log\liminf_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}\right\} = -\lim_{y\to\infty}\frac{1}{\log y}\log\left(\liminf_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}\right).$$

Yra žinoma, kad $F \in \mathcal{D}$ tada ir tik tada, kai $0 \leqslant \mathcal{M}_F < \infty$ (žr., pvz., šaltinius [3] arba [5]). Kitas svarbus indeksas, pristatytas straipnyje Yang ir Wang [20], yra

$$L_F = \lim_{y\downarrow 1}\liminf_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}. \tag{5.1}$$

Iš pateiktų apibrėžimų išplaukia, kad $F \in \mathcal{D}$ tada ir tik tada, kai $L_F > 0$. Be to,

$$\lim_{y\uparrow 1}\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = \frac{1}{L_F}.$$

Apibrėžimas 5.5. *Realaus kintamojo p.f. F priklauso reguliariai kintančių skirstinių klasei su indeksu $-\alpha$ kokiam nors $\alpha \geqslant 0$ ($F \in \mathcal{R}_{-\alpha}$), jei kiekvienam $y > 0$, $\lim_{x\to\infty}\overline{F}(xy)/\overline{F}(x) = y^{-\alpha}$.*

Apibrėžimas 5.6. *A.d. ξ_1 ir ξ_2 su p.f. F_{ξ_1} ir F_{ξ_2} vadinami asimptotiškai nepriklausomais (AI), jei*

$$\begin{aligned}\lim_{q\uparrow 1}\mathbb{P}\big(F_{\xi_1}(\xi_1) > q \,|\, F_{\xi_2}(\xi_2) > q\big) &= \lim_{q\uparrow 1}\mathbb{P}\big(F_{\xi_1}(\xi_1) < 1-q \,|\, F_{\xi_2}(\xi_2) > q\big)\\ &= \lim_{q\uparrow 1}\mathbb{P}\big(F_{\xi_2}(\xi_2) > q \,|\, F_{\xi_1}(\xi_1) > q\big)\\ &= \lim_{q\uparrow 1}\mathbb{P}\big(F_{\xi_2}(\xi_2) < 1-q \,|\, F_{\xi_1}(\xi_1) > q\big) = 0.\end{aligned}$$

Apibrėžimas 5.7. *A.d. ξ_1 ir ξ_2 su p.f. F_{ξ_1} ir F_{ξ_2} vadinami kvazi-asimptotiškai nepriklausomais (QAI), jei*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathbb{P}\big(\xi_1^+ > x, \xi_2^+ > x\big)}{\overline{F}_{\xi_1}(x) + \overline{F}_{\xi_2}(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\mathbb{P}\big(\xi_1^+ > x, \xi_2^- > x\big)}{\overline{F}_{\xi_1}(x) + \overline{F}_{\xi_2}(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\mathbb{P}\big(\xi_1^- > x, \xi_2^+ > x\big)}{\overline{F}_{\xi_1}(x) + \overline{F}_{\xi_2}(x)} = 0.$$

Apibrėžimas 5.8. *A.d. ξ_1 ir ξ_2 su p.f. F_{ξ_1} ir F_{ξ_2} vadinami stipriai kvazi-asimptotiškai nepriklausomais (SQAI), jei*

$$\begin{aligned}\lim_{\min\{x,y\}\to\infty}\mathbb{P}\big(\xi_1^+ > x \,|\, \xi_2 > y\big) &= \lim_{\min\{x,y\}\to\infty}\mathbb{P}\big(\xi_1^- > x \,|\, \xi_2 > y\big)\\ &= \lim_{\min\{x,y\}\to\infty}\mathbb{P}\big(\xi_2^+ > x \,|\, \xi_1 > y\big)\\ &= \lim_{\min\{x,y\}\to\infty}\mathbb{P}\big(\xi_2^- > x \,|\, \xi_1 > y\big) = 0.\end{aligned}$$

Įvairias priklausomybės struktūrų QAI ir SQAI savybes galima rasti, pvz., straipsniuose [8, 12, 14, 19].

Apibrėžimas 5.9. *Tarkime, kad ξ yea realusis a.d. su p.f. F_ξ, o η yra neneigiamas a.d. su p.f. F_η. Sakome, kad atsitiktinis vektorius (ξ, η) yra pasiskirstęs pagal dvimatį Sarmanovo skirstinį (rašome $(\xi, \eta) \in \mathcal{S}(r, \varphi, \psi)$), jei*

$$\mathbb{P}\left((\xi, \eta) \in B\right) = \iint\limits_B \left(1 + r\varphi(x)\psi(y)\right) \mathrm{d}F_\xi(x) \,\mathrm{d}F_\eta(y) \tag{5.2}$$

kiekvienai Borelio aibei $B \subset \mathbb{R} \times [0, \infty)$. Čia r yra reali konstanta, o $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\psi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ yra mačios funkcijos, tenkinančios sąlygas:

- $\mathbb{E}\,\varphi(\xi) = \mathbb{E}\,\psi(\eta) = 0$*;*
- $1 + r\varphi(x)\psi(y) \geqslant 0$ *visiems*

$$\begin{aligned} x \in D_\xi &= \left\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(\xi \in (x - \delta, x + \delta)) > 0 \text{ visiems } \delta > 0\right\}, \\ y \in D_\eta &= \left\{y \in [0, \infty) : \mathbb{P}(\eta \in (y - \delta, y + \delta)) > 0 \text{ visiems } \delta > 0\right\}. \end{aligned}$$

Atsitiktinis vektorius (ξ, η) yra pasiskirstęs pagal dvimatį Sarmanovo skirstinį $\mathcal{S}^*(r, \varphi, \psi)$, jei tenkinama papildoma sąlyga

$$\liminf_{\substack{x \to \infty \\ x \in D_\xi}} \inf_{y \in D_\eta} \left(1 + r\varphi(x)\psi(y)\right) > 0. \tag{5.3}$$

6 Pagrindiniai rezultatai

Pirmos dvi šio skyriaus teoremos nagrinėja atvejį, kai atsitiktiniai vektoriai $\{(X_1, \theta_1), (X_2, \theta_2) \ldots, (X_n, \theta_n)\}$ yra nepriklausomi, o a.d. X_k ir θ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ tenkina žemiau aprašytą priklausomybės struktūrą.

Prielaida 6.1. *Kiekvienam $k = 1, 2, \ldots, n$ egzistuoja mati funkcija $h_k \colon [0, \infty) \mapsto (0, \infty)$, tokia, kad $\mathbb{P}(X_k > x \,|\, \theta_k = t) \underset{x\to\infty}{\sim} \overline{F}_k(x) h_k(t)$ tolygiai visiems $t \geqslant 0$, kai $x \to \infty$, t.y.,*

$$\lim_{x \to \infty} \sup_{t \geq 0} \left| \frac{\mathbb{P}(X_k > x \mid \theta_k = t)}{\overline{F}_k(x)\, h_k(t)} - 1 \right| = 0.$$

Kai t yra negalima θ_k reikšmė, sąlyginė tikimybė $\mathbb{P}(X_k > x \,|\, \theta_k = t)$ yra suprantama kaip besąlyginė ir tokiam t $h_k(t) = 1$.

Teorema 6.1. *Tarkime, kad $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ yra realūs a.d., kurių p.f. $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ turi begalines dešines uodegas, o svoriai $\{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n\}$ yra neneigiami ir neišsigimę nulyje a.d.. Taip pat tarkime, kad vektoriai*

$\{(X_1,\theta_1),(X_2,\theta_2),\dots,(X_n,\theta_n)\}$ yra nepriklausomi ir tenkina prielaidą 6.1. Be to, visiems $k\in\{1,2,\dots,n\}$ tarkime, kad $F_k\in\mathcal{L}\cap\mathcal{D}$ ir $\max\{\mathbb{E}\theta_k^{p_k}h_k(\theta_k),\,\mathbb{E}\theta_k^{p_k}\}<\infty$ kuriam nors $p_k>\mathcal{M}_{F_k}$. Tuomet

$$\mathbb{E}\,\theta_l X_l \mathbb{1}_{\{S_n^{\theta X}>x\}} \underset{x\to\infty}{\sim} \mathbb{E}\,\theta_l X_l \mathbb{1}_{\{\theta_l X_l>x\}}$$

visiems $l\in\{1,2,\dots,n\}$ su sąlyga, kad $\overline{F}_k(x)=O\big(\overline{F}_l(x)\big)$ visiems $k\in\{1,2,\dots,n\}$.

Kitam rezultatui priklausomybės struktūrą tarp a.d. X_k ir θ_k, $k\in\{1,2,...,n\}$, susiaurinsime iki dvimačio Sarmanovo skirstinio.

Teorema 6.2. *Tegul $\{X_1,X_2,\dots,X_n\}$ yra realūs a.d., kurių p.f. $\{F_1,F_2,\dots,F_n\}$ turi begalines dešines uodegas, ir tegul $\{\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_n\}$ yra neneigiami ir neišsigimę nulyje a.d.. Be to, tegul vektoriai $\{(X_1,\theta_1),(X_2,\theta_2),\dots,(X_n,\theta_n)\}$ yra nepriklausomi ir kiekvienam $k\in\{1,2,...,n\}$ atsitiktinis vektorius (X_k,θ_k) yra pasiskirstęs pagal dvimatį Sarmanovo skirstinį $S^*(r_k,\varphi_k,\psi_k)$. Papildomai tarkime, kad:*

- *egzistuoja p.f. $F\in\mathcal{R}_{-\alpha}$, $\alpha>1$, ir teigiamos konstantos $c_1,...,c_n$, tokios, kad $\overline{F}_k(x)\underset{x\to\infty}{\sim}c_k\overline{F}(x)$ kiekvienam $k=1,2,...,n$;*
- *$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\mathbb{E}\,\theta_k^p<\infty$ kuriam nors $p>\alpha$;*
- *kiekvienam $k\in\{1,2,...,n\}$ funkcija ψ_k yra tolygiai tolydi ir egzistuoja $d_k<\infty$, toks, kad $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi_k(x)=d_k$.*

Tuomet, kiekvienam $l\in\{1,2,...,n\}$

$$\mathbb{E}\big(\theta_l X_l|S_n^{\theta X}>\mathrm{VaR}_q(S_n^{\theta X})\big)\underset{q\uparrow 1}{\sim}\frac{\alpha}{\alpha-1}\,\frac{c_l\tau_l}{\big(\sum_{k=1}^n c_k\tau_k\big)^{1-\frac{1}{\alpha}}}\,\mathrm{VaR}_q(Z)\,,$$

čia $\mathrm{VaR}_q(Z)=F^{-1}(q)$ su pasikliovimo lygmeniu $q\in(0,1)$, o $\tau_k=\mathbb{E}\theta_k^\alpha+r_kd_k\,\mathbb{E}\,\psi_k(\theta_k)\,\theta_k^\alpha$ visiems $k\in\{1,2,\dots,n\}$.

Toliau laikysime, kad pagrindiniai kintamieji yra priklausomi su QAI arba SQAI prielaidomis, ir gausime asimptotinius rėžius uodegos tikimybei ir uodegos vidurkiui dominuojamai kintančių skirstinių klasėje.

Teorema 6.3. *Tegul $\{X_1,X_2,\dots,X_n\}$ yra poromis QAI realūs a.d. su p.f. $\{F_1,F_2,\dots,F_n\}$, tokiomis, kad $F_i\in\mathcal{D}$ visiems $i\in\{1,2,\dots,n\}$. Tegul*

$\{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n\}$ *yra laisvai priklausomi, neneigiami ir neišsigimę nulyje a.d.. Jei vektoriai* $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ *ir* $\{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n\}$ *yra nepriklausomi ir* $\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \{\mathbb{E}\theta_k^p\}$ *yra baigtinis kuriam nors* $p > \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \{\mathcal{M}_{F_k}\}$*, tuomet*

$$L_n^X \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(\theta_k X_k > x\big) \underset{x\to\infty}{\lesssim} \mathbb{P}\big(S_n^{\theta X} > x\big) \underset{x\to\infty}{\lesssim} \frac{1}{L_n^X} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(\theta_k X_k > x\big),$$

čia $L_n^X = \min\{L_{F_1}, L_{F_2}, \ldots, L_{F_n}\}$.

Teorema 6.4. *Tegul galioja visos teoremos 6.3 sąlygos ir a.d.* $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ *yra poromis SQAI. Jei* $\mathbb{P}\left(\theta_k X_k > x\right) = O\big(\mathbb{P}\left(\theta_l X_l > x\right)\big)$ *visiems* $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *ir kuriam nors* $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *su sąlyga* $\mathbb{E}\theta_l |X_l| < \infty$*, tuomet*

$$L_{F_l} \mathbb{E}\big(\theta_l X_l \mathbb{1}_{\{\theta_l X_l > x\}}\big) \underset{x\to\infty}{\lesssim} \mathbb{E}\big(\theta_l X_l \mathbb{1}_{\{S_n^{\theta X} > x\}}\big) \underset{x\to\infty}{\lesssim} \frac{1}{L_{F_l}} \mathbb{E}\big(\theta_l X_l \mathbb{1}_{\{\theta_l X_l > x\}}\big),$$

ir

$$L_n^X \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big(\theta_k X_k \mathbb{1}_{\{\theta_k X_k > x\}}\big) \underset{x\to\infty}{\lesssim} \mathbb{E}\big(S_n^{\theta X} \mathbb{1}_{\{S_n^{\theta X} > x\}}\big) \underset{x\to\infty}{\lesssim} \frac{1}{L_n^X} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big(\theta_k X_k \mathbb{1}_{\{\theta_k X_k > x\}}\big),$$

jei $\mathbb{E}\theta_1 |X_1| < \infty$ *ir* $\mathbb{P}\left(\theta_k X_k > x\right) \underset{x\to\infty}{\asymp} \mathbb{P}\left(\theta_1 X_1 > x\right)$ *visiems* $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Teiginys 6.1 tiesiogiai išplaukia iš Teoremų 6.3 ir 6.4.

Teiginys 6.1. *Tegul* $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ *yra poromis SQAI realūs a.d. su p.f.* $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$*, tokiomis, kad* $F_i \in \mathcal{D}$ *visiems* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$*. Tegul* $\{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n\}$ *yra laisvai priklausomi, neneigiami ir neišsigimę nulyje a.d., tokie, kad* $\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \mathbb{E}\theta_k^p < \infty$ *kuriam nors* $p > \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \{\mathcal{M}_{F_k}\}$.

(i) *Jei vektoriai* $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ *ir* $\{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n\}$ *yra nepriklausomi ir* $\mathbb{P}(\theta_k X_k > x) = O\big(\mathbb{P}(\theta_l X_l > x)\big)$ *visiems* $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *ir kuriam nors* $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *su sąlyga* $\mathbb{E}\theta_l |X_l| < \infty$*, tuomet*

$$L_n^X \frac{L_{F_l} \mathbb{E}\big(\theta_l X_l \mathbb{1}_{\{\theta_l X_l > x\}}\big)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\theta_k X_k > x)} \underset{x\to\infty}{\lesssim} \mathbb{E}\big(\theta_l X_l | S_n^{\theta X} > x\big) \underset{x\to\infty}{\lesssim} \frac{1}{L_n^X} \frac{\mathbb{E}\big(\theta_l X_l \mathbb{1}_{\{\theta_l X_l > x\}}\big)}{L_{F_l} \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\theta_k X_k > x)}.$$

(ii) *Jei vektoriai* $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ *ir* $\{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n\}$ *yra nepriklausomi,*

$\mathbb{E}\theta_1|X_1| < \infty$ *ir* $\mathbb{P}(\theta_k X_k > x) \underset{x\to\infty}{\asymp} \mathbb{P}(\theta_1 X_1 > x)$ *visiems* $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *tuomet*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(S_n^{\theta X} | S_n^{\theta X} > x\big) \quad &\underset{x\to\infty}{\lesssim} \left(\frac{1}{L_n^X}\right)^2 \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big(\theta_k X_k \mathbb{1}_{\{\theta_k X_k > x\}}\big)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\theta_k X_k > x)} \\
&\leqslant \left(\frac{1}{L_n^X}\right)^2 \max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbb{E}\big(\theta_k X_k | \theta_k X_k > x\big), \\
\mathbb{E}\big(S_n^{\theta X} | S_n^{\theta X} > x\big) \quad &\underset{x\to\infty}{\gtrsim} \big(L_n^X\big)^2 \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big(\theta_k X_k \mathbb{1}_{\{\theta_k X_k > x\}}\big)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\theta_k X_k > x)} \\
&\geqslant \big(L_n^X\big)^2 \min_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbb{E}\big(\theta_k X_k | \theta_k X_k > x\big).
\end{aligned}$$

Paskutinėje teoremoje laikysime, kad $\theta_1 = \cdots = \theta_n = 1$ ir nagrinėsime atvejį, kai pagrindiniai kintamieji turi uodegų priklausomybę ir reguliariai kintančius skirstinius.

Pažymėkime $X_k^{(i)} = i_k X_k \mathbb{1}_{\{i_k X_k > 0\}}$ visiems $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ir visiems $i = \{i_1, \ldots, i_n\} \in I = \{-1, 1\}^n \diagdown \{-1\}^n$.

Teorema 6.5. *Tegul* $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ *yra realūs ir tolydūs nulyje a.d. su p.f.* $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$, *tokiomis, kad* $F_k \in \mathcal{R}_{-\alpha}$, $\alpha > 1$, *ir* $0 < \lim\limits_{t\to\infty} \frac{\mathbb{P}(-X_k > t)}{\overline{F_k}(t)} < \infty$ *visiems* $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. *Be to, visiems* $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *ir visiems* $i = \{i_1, \ldots, i_n\} \in I = \{-1, 1\}^n \diagdown \{-1\}^n$ *tarkime, kad riba*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{P}(X_1^{(i)} > tx_1, \ldots, X_n^{(i)} > tx_n)}{\overline{F}_1(t)} = H^{(i)}(\underline{x})$$

egzistuoja visiems $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in [0, \infty]^n \diagdown \{0\}^n$, *tokia, kad*

$$H^{(i)}(\underline{x}) = a^{(i)} \mu_D^{(i)}((x_1, \infty] \times \cdots \times (x_n, \infty]) + (1 - a^{(i)}) \mu_I^{(i)}((x_1, \infty] \times \cdots \times (x_n, \infty])$$

kuriam nors $a^{(i)} \in [0, 1]$. *Čia* $\mu_D^{(i)}$ *yra Radono matas (t.y. baigtinis kompaktiškose aibėse), toks, kad* $\mu_D^{(i)}((x_1, \infty] \times \cdots \times (x_n, \infty])$ *yra tolydus aibėje* $[0, \infty]^n \diagdown \{0\}^n$ *(t.y. matas* $\mu_D^{(i)}$ *neturi svorio ant apibrėžimo srities ribų), o* $\mu_I^{(i)}$ *yra Radono matas, kuris turi svorį tik ant koordinačių ašių. Be to, tegul visiems* $z > 0$ *ir visiems* $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *matas* $\mu_D^{(i)}$ *tenkina lygybę*

$$\mu_D^{(i)}(\underline{x} : x_k > z) = c_k z^{-\alpha} \tag{6.1}$$

visiems $i \in I$, *kuriems* $i_k = 1$. *Čia* $c_1, \ldots, c_n$ *yra teigiamos konstantos, tokios, kad* $\overline{F}_k(t) \underset{t\to\infty}{\sim} c_k \overline{F_1}(t)$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Tuomet, visiems $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\mathbb{E}[X_k | S_n^X > t] \underset{t\to\infty}{\sim} \frac{\sum\limits_{i\in I} i_k a^{(i)} \int\limits_0^\infty \mu_D^{(i)} \left(A_k^{(i)}(z)\right) \mathrm{d}z + \frac{\alpha}{\alpha-1}\left(1 - \sum\limits_{\substack{i\in I\\ i_k=1}} a^{(i)}\right) c_k}{\sum\limits_{i\in I} a^{(i)} \mu_D^{(i)}\left(A^{(i)}\right) + \sum\limits_{k=1}^n \left(1 - \sum\limits_{\substack{i\in I\\ i_k=1}} a^{(i)}\right) c_k} \; t, \qquad (6.2)$$

čia

$$S_n^X := \sum_{k=1}^n X_k, \quad A_k^{(i)}(z) := \left\{ \underline{x} : x_k > z, \sum_{j=1}^n i_j x_j > 1 \right\},$$

$$A^{(i)} := \left\{ \underline{x} : \sum_{j=1}^n i_j x_j > 1 \right\}.$$

7 Publikacijos

- Yang Y., Ignatavičiūtė E. and Šiaulys J. (2015). Conditional tail expectation of randomly weighted sums with heavy-tailed distributions. *Statistics and Probability Letters*, 105:20–28.
- Jaunė E., Ragulina O. and Šiaulys J. (2018). Expectation of the truncated randomly weighted sums with dominatedly varying summands. *Lithuanian Mathematical Journal* (accepted).

Įteikta žurnalui publikacija:

- Jaunė E. and Šiaulys J. Asymptotic risk decomposition for regularly varying distributions with tail dependence.

8 Rezultatų sklaida

Konferencijos, kuriose pristatyti pranešimai disertacijos tema:

- Tarptautinė konferencija "Modern Stochastics: Theory and Applications. IV", Kijevas, Ukraina, 2018 m. gegužės 24-26 d.
- 59-oji LMD konferencija, Kaunas, 2018 m. birželio 18-19 d.

9 Darbo struktūra ir apimtis

Darbą sudaro 61 puslapis: įvadinė dalis, literatūros apžvalga, apibrėžimai ir naudojamų metodų aprašymas, pagrindinių rezultatų pristatymas ir įrodymas, praktinio pritaikymo pavyzdžiai, simuliacijų analizė, išvados ir naudotos literatūros sąrašas.

10 Išvados

Disertacijoje nagrinėjamos atsitiktinės svertinės sumos

$$S_n^{\theta X} = \sum_{i=1}^{n} \theta_i X_i$$

uodegos tikimybės ir uodegos vidurkio asimptotinės savybės. Čia $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ yra realūs ir sunkiauodegiai a.d., vadinami pagrindiniais kintamaisiais, o $\{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n\}$ yra neneigiami ir neišsigimę nulyje a.d., vadinami atsitiktiniais svoriais.

Ši suma pastaruoju metu buvo dažnai nagrinėjama taikomuosiuose tikimybių teorijos darbuose. Juose didžiausias dėmesys buvo skiriamas neneigiamiems pagrindiniams kintamiesiems arba realiems pagrindiniams kintamiesiems su įvairiomis asimptotinės nepriklausomybės prielaidomis. Disertacijoje pateikti rezultatai papildo jau esamų rezultatų aibę realiems pagrindiniams kintamiesiems įvairiose sunkiauodegių skirstinių klasėse su skirtingomis priklausomybės struktūromis.

Teoremose 6.1 ir 6.2 įvedama priklausomybės struktūra tarp a.d. $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ ir atsitiktinių svorių $\{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n\}$, bet vektoriai $\{(X_1, \theta_1), (X_2, \theta_2) \ldots, (X_n, \theta_n)\}$ lieka nepriklausomi. Teoremoje 6.2 priklausomybė susiaurinama iki dvimačio Sarmanovo skirstinio ir išvedamos asimptotinės rizikos kapitalo paskirstymo formulės reguliariai kintantiems skirstiniams.

Teoremose 6.3 ir 6.4 pagrindiniai kintamieji yra priklausomi su QAI arba SQAI prielaidomis, bet nepriklausomi nuo atsitiktinių svorių. Išvedami asimptotiniai rėžiai uodegos tikimybei ir uodegos vidurkiui dominuojamai kintančių skirstinių klasėje.

Galiausiai, teoremoje 6.5 laikoma, kad $\theta_1 = \cdots = \theta_n = 1$, ir išvedamos asimptotinės rizikos kapitalo paskirstymo formulės asimptotiškai priklausomiems kintamiesiems su reguliariai kintančiais skirstiniais. Šios teoremos rezultatai patikrinami simuliacijomis daugiamatės Clayton kopulos atveju su marginaliaisiais t-skirstiniais (angl. *t-location-scale*).

11 Summary

In the thesis we investigate the asymptotic properties of both tail probability and tail expectation of a randomly weighted sum

$$S_n^{\theta X} = \sum_{i=1}^{n} \theta_i X_i,$$

where $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ are real-valued and heavy-tailed random variables (r.v.s), called primary r.v.s, and $\{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n\}$ are nonnegative and nondegenerated at zero r.v.s, called random weights.

This sum has been an attractive research topic in the recent works of applied probability with the focus on nonnegative primary r.v.s or real-valued primary r.v.s with various types of tail independence. We further generalize the results for real-valued r.v.s assuming different distribution classes and dependence structures.

In Theorems 6.1 and 6.2 we introduce some dependence structure between r.v.s $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ and random weights $\{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n\}$ but leave the random vectors $\{(X_1, \theta_1), (X_2, \theta_2) \ldots, (X_n, \theta_n)\}$ being independent. In Theorem 6.2 we restrict the dependence to a bivariate Sarmanov distribution and obtain asymptotic capital allocation formulas for regularly varying distributions.

Further, in Theorems 6.3 and 6.4 we allow primary r.v.s to be dependent with the assumption of QAI or SQAI but independent from random weights and obtain asymptotic bounds for the tail probability and tail expectation in the case of dominatedly varying distributions.

Finally, in Theorem 6.5 we assume $\theta_1 = \cdots = \theta_n = 1$ and obtain asymptotic capital allocation formulas in the case where primary r.v.s have tail dependence and regularly varying distributions. Results of this theorem are verified by a simulation study for a multivariate Clayton copula with t-location-scale marginal distributions.

12 Trumpos žinios apie autorę

Išsilavinimas:

2004–2008 m.: Vilniaus licėjus.

2008–2012 m.: Vilniaus universitetas, statistikos bakalauras.

2012–2014 m.: Vilniaus universitetas, *Magna Cum laude* finansų ir draudimo matematikos magistras.

2014–2018 m.: Vilniaus universitetas, matematikos doktorantūra.

Darbo patirtis:

2012-2017 m.: Lietuvos bankas, Bankininkystės tarnybos Investicijų valdymo departamentas, portfelio valdytoja.

Nuo 2017 m.: Lietuvos bankas, Bankininkystės tarnybos Rizikos valdymo ir atskaitomybės skyrius, vyresnioji analitikė.

Nuo 2016 m.: Vilniaus universitetas, jaunesnioji asistentė.

Literatūra

[1] Acerbi C. and Tasche D. (2002). On the coherence of expected shortfall. *Journal of Banking and Finance*, 26:1487–1503.

[2] Assa H., Morales M. and Omidi-Firousi H. (2016). On the capital allocation problem for a new coherent risk measure in collective risk theory. *Risks*, 4, 30.

[3] Bingham N. H., Goldie C. M., and Teugels J. L. (1987). *Regular Variation.* Cambridge University Press, Cambridge.

[4] Brandtner M. and Kürsten W. (2015). Expected Shortfall and spectral risk measures: The problem of comparative risk aversion. *Journal of Banking and Finance*, 58:268–280.

[5] Cline D.B.H. and Samorodnitsky G. (1994). Subexponentiality of the product of independent random variables. *Stochastic Processes and their Applications*, 49:75–98.

[6] Dhaene J., Tsanakas A., Valdez E.A. and Vanduffel S. (2012). Optimal capital allocation principles. *The Journal of Risk and Insurance*, 79:1–28.

[7] Fougère A.-L. and Mercadier C. (2012). Risk measures and multivariate extensions of Breiman's lemma. *Journal of Applied Probability*, 49:364–384.

[8] Geluk J. and Tang Q. (2009). Asymptotic tail probabilities of sums of dependent subexponential random variables. *Journal of Theoretical Probability*, 22(4):871–882.

[9] Joe H. and Lei H. (2011). Second order regular variation and conditional tail expectation of multiple risks. *Insurance: Mathematics and Economics*, 49:537–546.

[10] Konstantinides D.G. and Kountzakis C.E. (2011). Risk measures in ordered normed linear spaces with non-empty cone interior. *Insurance: Mathematics and Economics*, 48:111–122.

[11] Kortschak D. and Albrecher H. (2009). Asymptotic results for the sum of dependent non-identically distributed random variables. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 11(3):279–306.

[12] Li J. (2013). On pairwise quasi-asymptotically independent random variables and their applications. *Statistics and Probability Letters*, 83:2081–2087.

[13] Li H. and Zhu L. (2012). Asymptotic Analysis of Multivariate Tail Conditional Expectations. *North American Actuarial Journal*, 16:350–363.

[14] Liu X., Gao Q. and Wang Y. (2011). A note on a dependent risk model with a constant interest rate. *Statistics and Probability Letters*, 82:707–712.

[15] Mailhot M. and Mesfioui M. (2016). Multivariate TVaR-based risk decomposition for vector-valued portfolios. *Risks*, 4, 33.

[16] McNeil A., Frey R. and Embrechts P. (2005). Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools. *Princeton University Press, Princeton.*

[17] Tang Q. and Tsitsiashvili G. (2003b). Randomly weighted sums of subexponential random variables with application to ruin theory. *Extremes*, 6(3):171–188.

[18] Tang Q. and Yuan Z. (2014). Randomly weighted sums of subexponential random variables with application to capital allocation. *Extremes*, 17:467–493.

[19] Wang S., Chen C. and Wang X. (2017). Some novel results on pairwise quasi-asymptotical independence with applications to risk theory. *Communication in Statistics – Theory and Methods*, 46(18):9075–9085.

[20] Yang Y. and Wang Y. (2009). Asymptotics for ruin probability of some negatively dependent risk models with a constant interest rate and dominatedly-varying-tailed claims. *Statistics and Probability Letters* 80:143–154.

Vilniaus universiteto leidykla
Universiteto g. 1, LT-01513 Vilnius
El. p. info@leidykla.vu.lt,
www.leidykla.vu.lt
Tiražas 35 egz.