

## Большие уклонения многомерных считающих процессов

Вайдотас КАНИШАУСКАС (ŠU)

*e-mail:* mat.kat@fm.su.lt

В работе изучается вид функционала действия для мер  $\mu_{t,\gamma}(B) = P\left(t^{-\frac{1}{\gamma}} N_t(x_1, \dots, x_d) \in B\right)$ ,  $B \in \mathcal{B}(R_+)$ ,  $t > 0$ ,  $x_i > 0$ ,  $\gamma > 0$  построенных по многомерному считающему процессу

$$N_t(x_1, \dots, x_d) = \sum_{n=1}^{\infty} 1(T_n^1 \leq x_1 t, \dots, T_n^d \leq x_d t),$$

где  $(T_n^1, \dots, T_n^d)$  – случайный вектор с независимыми компонентами, удовлетворяющими асимптотическое усложненное условие Крамера. Аналогичный результат для одномерных считающих процессов получен автором в работе [1].

Пусть на стохастическом базисе  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$  задан многомерный считающий процесс

$$N_t(x_1, \dots, x_d) = \sum_{n=1}^{\infty} 1(T_n^1 \leq x_1 t, \dots, T_n^d \leq x_d t), \quad t > 0, x_i \geq 0,$$

где  $T_n = (T_n^1, \dots, T_n^d)$  – последовательность случайных векторов с независимыми и неубывающими компонентами, а  $1(A)$  – индикатор множества  $A$ .

Введем условие:

А. Существуют такие положительные постоянные числа  $\beta_1, \dots, \beta_d$ ,  $\beta_1 \neq \beta_2 \neq \dots \neq \beta_d$  и дифференцируемые функции  $\psi_{\beta_i}^i(\lambda)$ ,  $\lambda \in R = (-\infty, +\infty)$ , что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln \mathbb{E} \exp \{ \lambda n^{1-\beta_i} T_n^i \} = \psi_{\beta_i}^i(\lambda) < \infty, \quad i = 1, \dots, d,$$

где  $\mathbb{E}$  – математическое ожидание.

**Лемма 1** ([2], [4]). Пусть выполнено условие А. Тогда для мер  $P_n^i(B) = P(n^{-\beta_i} T_n^i \in B)$ ,  $B \in \mathcal{B}(R)$ ,  $n \in N$ ,  $i = 1, \dots, d$ , справедлив принцип больших уклонений (см. [3]) с функционалом действия вида  $I_i(x) = \sup_{\lambda} (\lambda x - \psi_{\beta_i}^i(\lambda))$ ,

$x \in R$ , и

$$1) P \left( \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\beta_i} T_n^i = a_i = (\psi_{\beta_i}^i(x))'|_{x=0} \right) = 1;$$

2) для  $\alpha < a_i$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln P(n^{-\beta_i} T_n^i < \alpha) = -I_i(\alpha);$$

и для  $\alpha > a_i$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln P(n^{-\beta_i} T_n^i > \alpha) = -I_i(\alpha);$$

3) Функция  $I_i(x)$ ,  $x \geq 0$  имеет такие свойства:

$I_i(x) \geq 0$  для каждого  $x \in R$ ,

$I_i(x_1) \leq I_i(x_2)$  при  $a_i \leq x_1 < x_2$ ,

$I_i(x_1) \geq I_i(x_2)$  при  $x_1 < x_2 < a_i$ ,

$I_i(a_i) = 0$ .

Из этой леммы следует такой результат.

**Лемма 2.** Пусть выполнено условие А и  $n = t^{\frac{1}{\beta_i}} x(1 + o(1))$ ,  $t \rightarrow \infty$ . Тогда

1) для  $\alpha x^{-\beta_i} < a_i$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-\frac{1}{\beta_i}} \ln P(T_{[xt^{\frac{1}{\beta_i}}]}^i < t\alpha) = -J_\alpha^i(x);$$

2) для  $\alpha x^{-\beta_i} > a_i$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-\frac{1}{\beta_i}} \ln P(T_{[xt^{\frac{1}{\beta_i}}]}^i > t\alpha) = -J_\alpha^i(x);$$

3)  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(T_{[ct^{\frac{1}{\gamma}}]}^i < t\alpha) = 1$  при  $\gamma > \beta_i$ ,  $c > 0$ ,  $\alpha > 0$ ;

4)  $J_{x_i}^i(b) \leq J_{x_i}^i(a)$  при  $a_i < \frac{x_i}{b^{\beta_i}} < \frac{x_i}{a^{\beta_i}}$ ,

$J_{x_i}^i(b) \geq J_{x_i}^i(a)$  при  $\frac{x_i}{b^{\beta_i}} < \frac{x_i}{a^{\beta_i}} < a_i$ ,

5)  $\inf_{x \in [a, b]} J_{x_i}^i(x) = \inf_{x \in (a, b)} J_{x_i}^i(x) = \begin{cases} J_{x_i}^i(a), & \text{при } \frac{x_i}{b^{\beta_i}} < \frac{x_i}{a^{\beta_i}} < a_i, \\ J_{x_i}^i(b), & \text{при } a_i < \frac{x_i}{b^{\beta_i}} < \frac{x_i}{a^{\beta_i}}, \end{cases}$

где  $J_\alpha^i(x) = xI_i(\alpha x^{-\beta_i})$ ,  $I_i(x) = \sup_{\lambda} (\lambda x - \psi_{\beta_i}^i(\lambda))$ ,  $x \geq 0$ ,  $[a]$  — целая часть числа  $a$ .

*Доказательство.* Все формулы следует из леммы 1. Покажем, как доказывается 3).

Пусть  $\gamma < \beta_i$ . Положим  $\gamma = \beta_i + \Delta$ ,  $\Delta > 0$  и  $n = ct^{\frac{1}{\gamma}}$ . Тогда  $n^\gamma = c^\gamma t$ ,  $t = n^\gamma c^{-\gamma} = n^{\beta_i} c^{-\gamma} n^\Delta$ , и

$$F_{ct^{\frac{1}{\gamma}}}^i(t\alpha) = P(T_{[ct^{\frac{1}{\gamma}}]}^i < t\alpha) = P(T_{[n]}^i < n^{\beta_i} c^{-\gamma} n^\Delta \alpha) =$$

$$P(n^{-\beta_i T_{[n]}^i} < \alpha c^{-\gamma} n^\Delta) = 1 - o(1), \quad \text{при } n \rightarrow \infty (t \rightarrow \infty),$$

в силу  $c > 0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\alpha > 0$  и утверждения 1) леммы 1.

Сформулируем главный результат работы.

**Теорема.** Пусть выполнено условие А. Тогда для мер  $\mu_{t,\gamma}(B) = P\left(t^{-\frac{1}{\gamma}} N_t(x_1, \dots, x_d) \in B\right)$ ,  $B \in \mathcal{B}(R_+)$ ,  $t > 0$ ,  $x_i > 0$  справедлив принцип больших уклонений с функционалом действия вида

$$I_\gamma(x) = J_{x_i}^i(x), \quad \text{где } \gamma = \beta_i = \max_j \beta_j.$$

*Доказательство.* Используем формулы

$$\begin{aligned} P(N_t(x_1, \dots, x_d) = n) &= F_n^1(x_1 t) \dots F_n^d(x_d t) - F_{n+1}^1(x_1 t) \dots F_{n+1}^d(x_d t), \\ P(N_t(x_1, \dots, x_d) \in [n_1, n_2]) &= \sum_{n \in [n_1, n_2]} P(N_t(x_1, \dots, x_d) = n) \\ &= F_{[n_1]}^1(x_1 t) \dots F_{[n_1]}^d(x_d t) - F_{[n_2]+1}^1(x_1 t) \dots F_{[n_2]+1}^d(x_d t), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} P(N_t(x_1, \dots, x_d) \in [n_1, n_2]) &= F_{[n_1]}^1(x_1 t) \dots (1 - R_{[n_1]}^j(x_j t)) \dots F_{[n_1]}^d(x_d t) \\ &\quad - F_{[n_2]+1}^1(x_1 t) \dots (1 - R_{[n_2]+1}^j(x_j t)) \dots F_{[n_2]+1}^d(x_d t) \\ &= F_{[n_2]+1}^1(x_1 t) \dots R_{[n_2]+1}^j(x_j t) \dots F_{[n_2]+1}^d(x_d t) \\ &\quad - F_{[n_1]}^1(x_1 t) \dots R_{[n_1]}^j(x_j t) \dots F_{[n_1]}^d(x_d t) \\ &\quad + F_{[n_1]}^1(x_1 t) \dots F_{[n_1]}^{j-1}(x_{j-1} t) F_{[n_1]}^{j+1}(x_{j+1} t) \dots F_{[n_1]}^d(x_d t) \\ &\quad - F_{[n_2]+1}^1(x_1 t) \dots F_{[n_2]+1}^{j-1}(x_{j-1} t) F_{[n_2]+1}^{j+1}(x_{j+1} t) \dots F_{[n_2]+1}^d(x_d t), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} P(N_t(x_1, \dots, x_d) \in (n_1, n_2)) &= F_{[n_1]+1}^1(x_1 t) \dots F_{[n_1]+1}^d(x_d t) - F_{[n_2-0]+1}^1(x_1 t) \dots F_{[n_2-0]+1}^d(x_d t), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} P(N_t(x_1, \dots, x_d) \in (n_1, n_2)) &= F_{[n_2-0]+1}^1(x_1 t) \dots R_{[n_2-0]+1}^j(x_j t) \dots F_{[n_2-0]+1}^d(x_d t) \\ &\quad - F_{[n_1]+1}^1(x_1 t) \dots R_{[n_1]+1}^j(x_j t) \dots F_{[n_1]+1}^d(x_d t) \\ &\quad + F_{[n_1]+1}^1(x_1 t) \dots F_{[n_1]+1}^{j-1}(x_{j-1} t) F_{[n_1]+1}^{j+1}(x_{j+1} t) \dots F_{[n_1]+1}^d(x_d t) \\ &\quad - F_{[n_2-0]+1}^1(x_1 t) \dots F_{[n_2-0]+1}^{j-1}(x_{j-1} t) F_{[n_2-0]+1}^{j+1}(x_{j+1} t) \dots F_{[n_2-0]+1}^d(x_d t), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $F_n^j(x_j t) = P(T_n^j \leq x_j t)$ ,  $R_n^j(x_j t) = P(T_n^j > x_j t) = 1 - F_n^j(x_j t)$ . Здесь  $[n-0]$  имеет такой смысл: если  $n \in \mathbb{N}$ , то  $[n-0] = n-1$ ; если  $n \notin \mathbb{N}$ , то  $[n-0] = [n]$ .

Выбираем произвольные числа  $0 < a < b$ . Тогда

$$\mu_{t,\gamma}[a, b] = P \left( N_t(x_1, \dots, x_d) \in [at^{\frac{1}{\gamma}}, bt^{\frac{1}{\gamma}}] \right), \quad (5)$$

$$\mu_{t,\gamma}(a, b) = P \left( N_t(x_1, \dots, x_d) \in (at^{\frac{1}{\gamma}}, bt^{\frac{1}{\gamma}}) \right). \quad (6)$$

Пусть  $\gamma = \beta_i = \max_j \beta_j$  и  $\frac{x_i}{b^{\beta_i}} < \frac{x_t}{a^{\beta_i}} < a_i$ . Тогда  $J_{x_i}^i(a) \leq J_{x_i}^i(b)$ . Теперь для (5) и (6) в силу утверждений леммы 2 1) и 3) и формул (1) и (3) получаем

$$\mu_{t,\gamma}[a, b] = \mu_{t,\gamma}(a, b) = e^{-t^{\frac{1}{\gamma}} J_{x_i}^i(a)(1+o(1))} (1 + o(1)). \quad (7)$$

Пусть  $a_i < \frac{x_i}{b^{\beta_i}} < \frac{x_t}{a^{\beta_i}}$ . Тогда  $J_{x_i}^i(b) \leq J_{x_i}^i(a)$  и аналогично для (5) и (6) применяя формулы (2) и (4) в силу утверждений леммы 2 2) и 3) получаем

$$\mu_{t,\gamma}[a, b] = \mu_{t,\gamma}(a, b) = e^{-t^{\frac{1}{\gamma}} J_{x_i}^i(b)(1+o(1))} (1 + o(1)). \quad (8)$$

Обединяя (7) и (8) в силу 5) из леммы 2 получаем

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{-\frac{1}{\gamma}} \log \mu_{t,\gamma}[a, b] \leq - \inf_{x \in [a, b]} J_{x_i}^i(x), \quad (9)$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} t^{-\frac{1}{\gamma}} \log \mu_{t,\gamma}(a, b) \geq - \inf_{x \in (a, b)} J_{x_i}^i(x). \quad (10)$$

Как видим в (7) и (8) значимыми были крайние значения интервалов  $(a, b)$  и  $[a, b]$ . Значит формулы (9) и (10) будет иметь место для любых открытых  $G$  и замкнутых множеств  $F$  из  $R$ :

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{-\frac{1}{\gamma}} \log \mu_{t,\gamma}(F) \leq - \inf_{x \in F} J_{x_i}^i(x),$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} t^{-\frac{1}{\gamma}} \log \mu_{t,\gamma}(G) \geq - \inf_{x \in G} J_{x_i}^i(x).$$

Поэтому  $I_\gamma(x) = J_{x_i}^i(x)$ , где  $\gamma = \beta_i = \max_j \beta_j$ , – функционал действия для семейства мер  $\mu_{t,\gamma}(B)$  (см. определение (2.9) в [3]). Теорема доказана.

**Следствие.** Пусть  $T_n^i = T_n^i(\gamma_i) = n^{-\gamma_i} \sum_{j=1}^n X_i^j$ , а  $\{X_n^j, n \geq 1\}$  – последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин удовлетворяющих условие Крамера:  $\psi_j(\lambda) = \mathbb{E} e^{\lambda X_1^j} < \infty$ , при  $\lambda > 0$  и  $X_i \geq 0$ . Тогда при  $\beta_j = 1 - \gamma_j, j = 1, \dots, d$  условие А имеет место и справедлив результат теоремы.

## Литература

- [1] V. Kanišauskas, Large deviations for counting processes, *Liet. matem. rink.*, **40**(spec.numeris), 287–289 (2000).
- [2] J.T. Cox, D. Griffeath, Large deviations for Poisson systems of independent random walks, *Z. Wahrsch. und Verw. Geb.*, **66**, 543–558 (1984).
- [3] D.W. Stroock, *An Introduction to the Theory of Large Deviations*, Springer, Berlin (1984).
- [4] R.S. Ellis, *Entropy, Large Deviations and Statistical Mechanics*, Springer, Berlin (1985).

## Daugiamačių skaičiuojančių procesų didieji nuokrypiai

V. Kanišauskas

Nagrinėjami daugiamačiai skaičiuojantys procesai. Šiuos procesus normuojame atitinkamu daugikliu. Gauti normuotus procesus atitinkančio tikimybinio mato didžiųjų nuokrypių greičio funkcijos pavidalai.