Liet. matem. rink., T. 43, spec. nr., 123–127

Краевая задача Римана с бесконечным индексом и неограниченным коэффициентом логарифмического порядка $0 < \rho,\ \sigma < 1$ для полуплоскости

Пятрас АЛЕКНА (ŠU)
e-mail: mat.kat@fm.su.lt

Рассматривется краевая задача Римана: найти функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$, аналитические и ограниченные соответственно в верхней D^+ и нижней D^- полуплоскости (класс $\mathcal{B}$), предельные значения которых $\Phi^\pm(t)$ удовлетворяют на вещественной оси краевому условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad -\infty < t < +\infty, \tag{1}$$

где относительно коэффициента $G(t)$ и свободного члена $g(t)$ сделаны следующие предположения:

$$\ln G(t) \in \mathcal{D}_p \tag{2}$$

для любого конечного отрезка вещественной оси;

$$\ln|G(t)| = \begin{cases} \psi_1(t)\ln^\rho|t|, & \text{если} \quad t \leqslant -R, \\ \psi_2(t)\ln^\sigma|t|, & \text{если} \quad t \geqslant R, \end{cases} \tag{3}$$

для любого $R > e^{2\pi}$, где $0 < \rho,\ \sigma < 1$,

$$\begin{aligned} &\psi_1(t) \in \mathcal{D}_\gamma(-\infty \leqslant t \leqslant -R), \quad \gamma > \rho + 2,\ \psi_1(-\infty) = \varkappa_1, \\ &\psi_2(t) \in \mathcal{D}_\delta(R \leqslant t \leqslant +\infty), \quad \delta > \sigma + 2,\ \psi_2(+\infty) = \varkappa_2,\ \varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 > 0; \end{aligned} \tag{4}$$

$$\arg G(t) = \begin{cases} \varphi_1(t)\ln^\alpha|t|, & \text{если} \quad t \leqslant -R, \\ \varphi_2(t)\ln^\beta|t|, & \text{если} \quad t \geqslant R, \end{cases} \quad 0 < \alpha,\ \beta < 1, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &\varphi_1(t) \in \mathcal{D}_\mu(-\infty \leqslant t \leqslant -R), \quad \mu > \alpha + 2,\ \varphi_1(-\infty) = \lambda_1, \\ &\varphi_2(t) \in \mathcal{D}_\nu(R \leqslant t \leqslant +\infty), \quad \nu > \beta + 2,\ \varphi_2(+\infty) = \lambda_2 \geqslant 0,\ \lambda_1^2+\lambda_2^2>0; \end{aligned} \tag{6}$$

$$g(t) \in \mathcal{H}_q(-\infty \leqslant t \leqslant +\infty), \quad q > \max(\rho, \sigma, \alpha, \beta), \quad g(\pm\infty) = 0. \tag{7}$$

Из (3) и (4) следует, что коэффициент $G(t)$ задачи Римана не ограничен, а из (5) и (6) следует, что задача (1)–(7) имеет бесконечный индекс логарифмического порядка $0 < \alpha,\ \beta < 1$.

В работах автора [1],[2] коэффициент $|G(t)|$ был ограничен на вещественной оси, а в статье [3] исследован случай бесконечного индекса и неограниченного коэффициента логарифмического порядка $\min(\rho, \sigma) > 1$ и $\min(\alpha, \beta) > 1$.

Применяя асимптотику интеграла типа Коши с логарифмической плотностью ([2], с.7), в предположениях (2)–(6) для канонической функции

$$X^{\pm}(z) = \exp\left\{\frac{z}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln G(x)\,\mathrm{d}x}{x(x-z)}\right\} \tag{8}$$

получаем асимптотическое равенство ($z \to \infty, \quad z \notin [-\infty, +\infty]$):

$$\begin{aligned} X^{\pm}(z) = \exp\Bigg\{ & \frac{-\varkappa_2}{2\pi i(\sigma+1)}\ln^{\sigma+1} z + \frac{\varkappa_2}{2}\ln^{\sigma} z + \frac{\varkappa_1}{2\pi i(\rho+1)}(\ln z + \pi i)^{\rho+1} \\ & - \frac{\varkappa_1}{2}(\ln z + \pi i)^{\rho} - \frac{\lambda_2}{2\pi(\beta+1)}\ln^{\beta+1} z + \frac{i\lambda_2}{2}\ln^{\beta} z \\ & + \frac{\lambda_1}{2\pi(\alpha+1)}(\ln z + \pi i)^{\alpha+1} - \frac{i\lambda_1}{2}(\ln z + \pi i)^{\alpha} + S^{\pm}(z)\Bigg\}, \end{aligned} \tag{9}$$

где ветви $(\ln z + \pi i)^{\rho}$, $(\ln z + \pi i)^{\alpha}$ и $\ln z + \pi i$ непрерывны в области $(R < |z| < \infty) \cap (-\pi < \arg z < \pi)$, $(\ln x + \pi i)^{\rho} > 0$, $(\ln x + \pi i)^{\alpha} > 0$ и $\ln x + \pi i > 0$ на нижнем берегу разреза по лучу $\arg z = \pi$ при $x < -R$, а ветви $\ln^{\sigma} z$, $\ln^{\beta} z$ и $\ln z$ непрерывны в области $(R < |z| < \infty) \cap (0 < \arg z < 2\pi)$, $\ln^{\sigma} x > 0$, $\ln^{\beta} x > 0$ и $\ln x > 0$ на верхнем берегу разреза по лучу $\arg z = 0$ при $x > R$, $S^{\pm}(z)$ – кусочно аналитическая и ограниченная функция в окрестности $z = \infty$.

Сформулируем основные результаты исследования.

Теорема 1. *Для разрешимости в классе* $\mathfrak{B}$ *однородной краевой задачи Римана* ($g(t) = 0$) *с бесконечным индексом логарифмического порядка для полуплоскости в предположениях* (2)–(6) *необходимо и достаточно, чтобы для заданных величин* $\lambda_1, \lambda_2, \alpha$ *и* β *выполнялось одно из условий:*

1) $\alpha < \beta, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_1 < 0;$
2) $\alpha < \beta, \quad \lambda_2 > 0, \quad -\infty < \lambda_1 < +\infty;$
3) $\alpha > \beta, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 > 0;$
4) $\alpha > \beta, \quad \lambda_1 < 0, \quad -\infty < \lambda_2 < \infty;$
5) $\alpha = \beta, \quad \lambda_2 - \lambda_1 > 0.$

Теорема 2. *В предположениях* (2)–(6) *для предельных значений канони-*

ческой функции $X^+(z)$ на вещественной оси справедливо представление:

$$\ln X^+(t) = \begin{cases} \frac{\lambda_1}{2\pi(\alpha+1)} \ln^{\alpha+1}|t| - \frac{\lambda_2}{2\pi(\beta+1)} \ln^{\beta+1}|t| + \frac{\varkappa_1}{2} \ln^{\rho}|t| + \\ \quad +i(P_{\sigma,\rho}(t) + \frac{\lambda_1}{2} \ln^{\alpha}|t|) + S_1^+(t) + T_1(t), & t < -R, \\ S_0^+(t) & |t| \leqslant R, \\ \frac{\lambda_1}{2\pi(\alpha+1)} \ln^{\alpha+1} t - \frac{\lambda_2}{2\pi(\beta+1)} \ln^{\beta+1} t + \frac{\varkappa_2}{2} \ln^{\sigma} t + \\ \quad +i(P_{\sigma,\rho}(t) + \frac{\lambda_2}{2} \ln^{\beta} t) + S_2^+(t) + T_2(t), & t > R, \end{cases}$$

где

$$P_{\sigma,\rho}(|t|) = \frac{\varkappa_2}{2\pi(\sigma+1)} \ln^{\sigma+1}|t| - \frac{\varkappa_1}{2\pi(\rho+1)} \ln^{\rho+1}|t|, \qquad (|t| \geqslant R),$$

$$S_0^+(t) \in \mathcal{D}_{p-1}(-R \leqslant t \leqslant R),$$

$$S_1^+(t) \in \mathcal{D}_{\eta_1}(-\infty \leqslant t \leqslant -R), \quad \eta_1 = \min(p-1, \mu-\alpha-1, \gamma-\rho-1, 3-\alpha, 3-\rho),$$

$$S_2^+(t) \in \mathcal{D}_{\eta_2}(R \leqslant t \leqslant \infty), \quad \eta_2 = \min(p-1, \nu-\beta-1, \delta-\sigma-1, 3-\beta, 3-\sigma),$$

а $T_k(t)(k = 1, 2)$ – ограниченные функции при $|t| > R$, производные которых удовлетворяют при $|t| > R$ $(t \neq \pm\infty)$ оценке:

$$|T_k'(t)| \leqslant \frac{A_k}{|t|}, \qquad (0 < A_k = \text{const}).$$

Теорема 3. *Если каноническая функция $X^{\pm}(z)$ определена формулой* (8), *а целая функция $F_0(z) = F_{10}(z)F_{20}(z)$ нулевого порядка роста с нулями на мнимой оси определена равенствами*

$$F_{10}(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{ir_n'}\right), \quad r_n' = \exp\left\{\frac{(2n-1)\pi}{-\lambda_1}\right\}^{\frac{1}{\alpha}}, \quad n = 1, 2, 3..., \tag{10}$$

$$F_{20}(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{r_n''}\right), \quad r_n'' = \exp\left\{\frac{(2n-1)\pi}{\lambda_2}\right\}^{\frac{1}{\beta}}, \quad n = 1, 2, 3..., \tag{11}$$

то в предположениях (2)–(6) *при $\lambda_1 \leqslant 0, \lambda_2 \geqslant 0$* [1] *справедлива оценка ($z \to \infty$):*

$$|F_0(z)X^{\pm}(z)| \leqslant \exp\{A \cdot \ln^{\gamma_0}|z|\},$$

где $0 < A = \text{const}$, $\gamma_0 = \max(1-\alpha, 1-\beta, \rho, \sigma)$, $0 < \gamma_0 < 1$.

Теорема 4. *Неоднородная краевая задача Римана* (1)–(7) *с плюс-бесконечным индексом ($\lambda_1 \leqslant 0, \quad \lambda_2 \geqslant 0$) логарифмического порядка $0 < \alpha, \beta < 1$ и неограниченным коэффициентом логарифмического порядка $0 < \rho, \sigma < 1$ для*

[1]если $\lambda_1 = 0$ $(\lambda_2 = 0)$, то определеляется только одна целая функция $F_{20}(z)(F_{10}(z))$.

полуплоскости имеет бесконечное множество решений, общая формула которых имеет вид

$$\Phi^{\pm}(z) = X^{\pm}(z)\left\{\frac{F_0(z)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(x)\,\mathrm{d}x}{F_0(x)X^{+}(x)(x-z)} + F(z)\right\},$$

где $X^{\pm}(z)$ *– каноническая функция* (8), *целая функция* $F_0(z)$ *определена равенствами* (10), (11), *а* $F(z)$ *– произвольная целая функция нулевого порядка роста, для которых на вещественной оси справедливо асимптотическое неравенство* ($|t| > R$)

$$\ln|F(t)| < \frac{\lambda_2}{2\pi(\beta+1)}\ln^{\beta+1}|t| - \frac{\lambda_1}{2\pi(\alpha+1)}\ln^{\alpha+1}|t| + \frac{\varkappa}{2}\ln^{\xi}|t| + C_F,$$

где

$$\xi = \max(\rho,\sigma), \qquad \varkappa = \begin{cases} \varkappa_1, & \text{если } \rho > \sigma, \\ \varkappa_2, & \text{если } \sigma > \rho. \end{cases}$$

Теорема 5. *Для разрешимости неоднородной краевой задачи Римана* (1)–(7) *с минус-бесконечным индексом* ($\lambda_1 \geqslant 0$, $\lambda_2 \leqslant 0$) *логарифмического порядка* $0 < \alpha$, $\beta < 1$ *и неограниченным коэффициентом для полуплоскости достаточно, чтобы целая функция* $F_0(z)$ *и свободный член* $g(x)$ *удовлетворяли условиям*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F_0(x)g(x)}{X^{+}(x)(x-z_k)}\,\mathrm{d}x = 0, \qquad k = 1,2,\ldots,$$

где z_k *– нули целой функции* $F_0(z)$, *определенной равенствами* (10) *и* (11), *в которых знаки* λ_1 *и* λ_2 *в выражениях нулей* r'_n *и* r''_n, *заменены на противоположные,* $X^{+}(x)$ *– предельные значения канонической функции* (8). *При выполнении* (12) *условий единственное решение неоднородной задачи* (1)–(7) *выражается формулой*

$$\Phi^{\pm}(z) = \frac{X^{\pm}(z)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(x)\,\mathrm{d}x}{X^{+}(x)(x-z)}. \tag{12}$$

Литература

[1] П. Алекна, Об однородной краевой задаче Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка для полуплоскости, *Liet. matem. rink.*, **13**(3), 5–13 (1973).

[2] П. Алекна, Неоднородная краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка $0 < \gamma < 1$ для полуплоскости, *Liet. matem. rink.*, **14**(3), 5–18 (1974).

[3] П. Алекна, Неоднородная краевая задача Римана с неограниченным коэффициентом логарифмического порядка для полуплоскости, *Liet. matem. rink.*, **42**(spec.nr.), 155–158 (2002).

Begalinio indekso kraštinis Rymano uždavinys su logaritminės eilės $0 < \rho, \sigma < 1$ neaprėžtu koeficientu pusplokštumei

P. Alekna

Išnagrinėtas logaritminės eilės $0 < \alpha, \beta < 1$ begalinio indekso kraštinis Rymano uždavinys pusplokštumei su logaritminės eilės $0 < \rho, \sigma < 1$ neaprėžtu koeficientu aprėžtų analizinių funkcijų klasėje $\mathcal{B}$.