Liet. matem. rink., T. 43, spec. nr., 128–133

О структуре решений системы уравнений в частных производных с переменными коэффициентами

Донатас ЮРГАЙТИС (ŠU)
e-mail: pletra@cr.su.lt

В теории регулярных особенностей обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что существуют решения представимые в виде сходящихся степенных рядов [1]. Для исследования асимптотического поведения решений таких систем используют методы решения систем с малым параметром [2].

Рассмотрим систему, которая в матричной форме записи имеет вид

$$x\left(E\frac{\partial u}{\partial x} + I_1\frac{\partial u}{\partial y} + I_2\frac{\partial u}{\partial z}\right) = A(x,y,z)u, \tag{1}$$

$u(x,y,z)$ – искомый вектор столбец, x,y,z – независимые переменные, E – единичная, I_1, I_2 – невырожденные постоянные матрицы. $A(x,y,z)$ – голоморфные в полицилиндре $P = \{(x,y,z)\colon |x| < r,\ |y| < r_1,\ |z| < r_2\}$ функции, для которых справедливо разложение $A(x,y,z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k A_k(y,z)$.

Рассмотрим случай, когда главный член этого разложения тождественно равен нулю. В этом случае разделив матричное уравнение (1) на x получим матричное уравнение, решение которого будем искать в виде:

$$u(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho(y,z)} u_k(y,z). \tag{2}$$

Подставив ряд (2) в полученное уравнение, сравнив коэффициенты при степенях x определим функцию $\rho(y,z)$ и получим рекуррентное соотношение

$$kEu_k + I_1\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y} + I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z} = \sum_{l=0}^{k-1} A_{k-l-1}u_l, \quad k = 0,1,\ldots. \tag{3}$$

Из (3) при $k = 0$ получим, что $\rho(y,z) = 0$, а $u_0(y,z)$ – произвольный вектор столбец. Сходимость ряда (2) доказывают методом мажорант [3].

Рассмотрим теперь случай, когда $A_0(y,z) \neq O$, O – нулевая матрица. В этом случае решения (1) будем строить в виде следующего степенного ряда:

$$u(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho(y,z)} u_k(y,z,s),\, s = \ln x. \tag{4}$$

Подстановка ряда (4) в матричное уравнение (1) и приравнивание нулю коэффициентов при степенях x, приводит к соотношениям

$$(\rho(y,z)E + A_0(y,z))u_0 + E\frac{\partial u_0}{\partial s} = 0, \tag{5}$$

$$((k+\rho)E + A_0)u_k + E\frac{\partial u_k}{\partial s} + I_1\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y} + I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z}$$
$$+ \ln x\left(I_1\frac{\partial \rho}{\partial y} + I_2\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)u_{k-1} + \sum_{l=0}^{k-1} A_l u_{k-l}, \quad k = 1,2,\ldots \tag{6}$$

Уравнение (5) решим следующим образом. Допустим, что первый коэффициент ряда (4), т.е. $u_0(y,z,s)$ не зависит от переменного s. Получаем систему, которая имеет ненулевое решение, когда $\det(\rho(y,z)E + A_0(y,z)) = 0$. Это уравнение относительно $\rho(y,z)$ является уравнением четвертой степени и имеет в общем случае четыре корня. Из (5) видно, что векторы $u_0(y,z)$ являются собственными векторами матрицы $A_0(y,z)$, соответствующие собственным значениям $\rho_1(y,z), \rho_2(y,z), \rho_3(y,z), \rho_4(y,z)$. Предположим, что если $\rho_i(y,z)$ и $\rho_j(y,z)$ какие либо корня, то в полицилиндре P либо $\rho_i(y,z) \equiv \rho_j(y,z)$, либо $\rho_i(y,z) \neq \rho_j(y,z)$.

Из рекурентного соотношения (6) последовательно определим все коэффициенты ряда (4), если только $\det((k+\rho(y,z))E + A_0(y,z)) \neq 0$ для всех k. Если собственные значения $A_0(y,z)$ различны, они сами и их разности не являются целыми числами, то в системе (6) для всех k и $\rho(y,z)$ существуют $((k+\rho)E + A_0)^{-1}$ и все коэффициенты ряда (4) определяются по заданному $u_0(y,z)$.

Методом мажорант докажем сходимость ряда (4). Справедлива оценка [3]

$$|A_k(y,z)| \leqslant A^k |y|^{-1}|z|^{-1}, \quad |y| < \frac{r_1}{2},\ |z| < \frac{r_2}{2}. \tag{7}$$

Методом математической индукции докажем, что для коэффициентов ряда (4) справедлива следующая оценка:

$$|u_k(y,z,s)| \leqslant U^k |y|^{-k}|z|^{-k}|s|^k. \tag{8}$$

При $k = 0$ оценка (8) справедлива, так как $u_0(y,z)$ подбираем произвольно. Из рекуррентного соотношения (6), воспользовавшись (7) и (8), получаем оценку

$$|u_k(y,z,s)| < U^k|y|^{-k}|z|^{-k}|s|^kI\left(\frac{k-1}{2k}\frac{r_1+r_2}{U}+\frac{\theta r_1r_2}{4kU}+\frac{4\varepsilon}{U(4-r_1r_2)}\right), \quad (9)$$

где $|\frac{1}{\ln x}| < \varepsilon$, когда $0 < x < 1$, $\quad \theta = \max|\frac{\partial\rho}{\partial y} + \frac{\partial\rho}{\partial z}|$.

Постоянную U выберем так, чтобы выражение в скобках $(...)$ из (9) было меньше единицы. Это при достаточно больших k возможно и тем справедливость оценки (8) доказана. Полученная оценка гарантирует сходимость ряда (4) когда $0 < x < \min\{\frac{\varepsilon r_1 r_2}{U}, r, 1\}$, $|y| < \frac{r_1}{2}$, $|z| < \frac{r_2}{2}$.

Заметим также, что коэффициенты ряда (4) относительно переменного s являются полиномами. Пусть

$$u_k(y,z,s) = \sum_{l=0}^{k} s^{k-l}u_{kk-l}(y,z). \quad (10)$$

Подстановка (10) в (6) и сравнивание коэффициентов при одинаковых степенях s приводит к соотношениям для определения коэффициентов полинома (10)

$$\begin{gathered}
((k+\rho)E+A_0)u_{kk-l}+Eu_{kk-l}(k-l+1)+I_1\frac{\partial u_{k-1k-l}}{\partial y}+I_2\frac{\partial u_{k-1k-l}}{\partial z}\\
+\left(I_1\frac{\partial\rho}{\partial y}+I_2\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)u_{k-1k-l-1}-\sum_{n=1}^{l}A_nu_{k-nk-l}=0, \quad l=1,2,...,k-1,\\
((k+\rho)E+A_0)u_{kk}+\left(I_1\frac{\partial\rho}{\partial y}+I_2\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)u_{k-1k-1}=0, \qquad (11)\\
((k+\rho)E+A_0)u_{k0}+u_{k1}+I_1\frac{\partial u_{k-10}}{\partial y}+I_2\frac{\partial u_{k-10}}{\partial z}-\sum_{n=1}^{k}A_nu_{k-n0}=0,\\
k=1,2,....
\end{gathered}$$

Из (11) все $u_{kk-l}(y,z)$ определяются однозначно по заданному $u_{00}(y,z)$, который является произвольной голоморфной функцией переменных y и z, если только $\det((k+\rho(y,z))E+A_0(y,z)) \neq 0$, $k=1,2,...$.

Теперь рассмотрим случай когда среди собственных значений имеются целочисленные. В этом случае не со всеми k существуют $((k+\rho)E+A_0)^{-1}$ и из рекуррентного соотношения (6) найти всех $u_k(y,z,s)$, $k = 1,2,...$ невозможно. Пусть $\rho_1(y,z)+1 = \rho_2(y,z)$. Тогда $(\rho_1(y,z)E+A_0)u_0(y,z)=0$, $u_0(y,z)=u^{(0)}(y,z)$ и из (6) получаем уравнение, которое решить нельзя так как $\det((\rho_1(y,z)E+A_0(y,z)) = \det((\rho_2(y,z)E+A_0(y,z)) = 0$. Положим в (6) $k=1$ и получаем

$$((1+\rho)E+A_0)u_1+E\frac{\partial u_1}{\partial s}+I_1\frac{\partial u_0}{\partial y}+I_2\frac{\partial u_0}{\partial z}+(I_1\frac{\partial \rho}{\partial y}+I_2\frac{\partial \rho}{\partial z})u_0-A_l u_0=0.\quad(12)$$

Решений этого уравнения будем искать в виде

$$u_1=u_{12}(y,z)s^2+u_{11}(y,z)s+u_{10}(y,z).\quad(13)$$

Подставив (13) в (12), получаем систему

$$(\rho_2 E+A_0)u_{12}=0,\quad(14)$$

$$(\rho_2 E+A_0)u_{11}+2u_{12}+\left(I_1\frac{\partial \rho}{\partial y}+I_2\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)u_0=0,\quad(15)$$

$$(\rho_2 E+A_0)u_{10}+u_{11}-a_1u_0+I_1\frac{\partial u_0}{\partial y}+I_2\frac{\partial u_0}{\partial z}=0.\quad(16)$$

Решением уравнения (14) является собственный вектор $u_2^0(y,z)$ соответствующий собственному значению $\rho_2(y,z)$. Пусть $u_{12}=c(y,z)u_2^0(y,z)$, $|u_2^0(y,z)|=1$, $c(y,z)$ – некоторая произвольная голоморфная функция. Подставив полученное решение в (15) видим, что это уравнение разрешимо если ее правая часть ортогональна решениям сопряженного уравнения $(\rho_2E+A_0^T)w=0$. Условие разрешимости (15) $c=\frac{1}{2}(I_1\frac{\partial\rho}{\partial y}+I_2\frac{\partial\rho}{\partial z})(w,u_2^0)$, решение $u_{11}=c_1u_2^1(y,z)$, $|u_2^1(y,z)|=1$, где $c_1(y,z)$ – некоторая произвольная голоморфная функция. Подставив решение (15) в (16) получаем условие разрешимости $c_1(y,z)=A_1(w,u_2^0)+(I_1\frac{\partial\rho}{\partial y}+I_2\frac{\partial\rho}{\partial z})(w,u_2^0)$ и решение u_{10} (16), а вместе с тем и решения (12) вида (13).

Далее берем в (6) $k=2$. Если $\rho_1(y,z)+2$ неравен ни одному собственному значению $A_0(y,z)$, то существует $((2+\rho_1)E+A_0)^{-1}$ и u_2 будем строить в виде

$$u_2=u_{23}(y,z)s^3+u_{22}(y,z)s^2+u_{21}(y,z)s+u_{20}(y,z).\quad(17)$$

Подставив (17) в (6) при $k=2$ так как существует $(\rho_2E+A_0)^{-1}$ получаем выражения для коэффициентов полинома (17).

Описанный процесс продолжаем и находим все коэффициенты ряда (4), которые являются полиномами переменного s и степень полинома на единицу выше номера коэффициента. Если для некоторого $k=\varkappa$, $\varkappa+\rho(y,z)$ является собственным значением $A_0(y,z)$, тогда $u_\varkappa$ будем искать в виде

$$u_\varkappa=u_{\varkappa\varkappa+2}(y,z)s^{\varkappa+2}+u_{\varkappa\varkappa+1}(y,z)s^{\varkappa+1}+\ldots+u_{\varkappa1}(y,z)s+u_{\varkappa0}(y,z).\quad(18)$$

Подставив (18) в (6) выше изложенным способом определяем коэффициенты разложения (18). Из за громозкости выкладок доказательство опускаем.

Таким образом находим все коэффициенты ряда (4).

Наконец рассмотрим случай когда среди собственных значений имеются одинаковые. Допустим, что $\rho^*(y,z)$ кратное собственное значение матрицы $A_0(y,z)$, индекс которой больше единицы. Без ограничения общности положим, что собственное значение $\rho^*(y,z)$ имеет один собственный вектор и два присоединенных вектора. Укажем способ построения семейств частных решений матричного уравнения (1) соответствующих этому собственному значению.

Заметим, что коэффициенты ряда (4) зависят не только от переменных y, z, s, но и от функции $\rho(y,z)$. Нетрудно убедится, что $\frac{\partial u(x,y,z,s,\rho(y,z))}{\partial\rho}|_{\rho=\rho^*}$, $\frac{\partial^2 u(x,y,z,s,\rho(y,z))}{\partial\rho^2}|_{\rho=\rho^*}$ являются решениями (1). Продифференцировав (4) дважды по $\rho(y,z)$ убеждаемся, что решений (1) в этом случае следует искать в виде:

$$\begin{aligned} u(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty}\ & x^{k+\rho(y,z)}\big(\ln^2 x u_k(y,z,s,\rho) + \ln x\overline{u_k}(y,z,s,\rho) \\ & + \ln x\overline{\overline{u_k}}(y,z,s,\rho)\big). \end{aligned} \tag{19}$$

Подставив (19) в (1) и приравняв нулю коэффициенты при одинаковых степенях $\ln x$ и x, получаем, что u_k определяются из (6), а для определения $\overline{u_k}$, $\overline{\overline{u_k}}$ получаем рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} &((k+\rho)E + A_0)\overline{u_k} + E\frac{\partial\overline{u_{k-1}}}{\partial s} + I_1\frac{\partial\overline{u_{k-1}}}{\partial y} + I_2\frac{\partial\overline{u_{k-1}}}{\partial z} \\ &+ \ln x\left(I_1\frac{\partial\rho}{\partial y} + I_2\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)\overline{u_{k-1}} - \sum_{l=0}^{k-1} A_l\overline{u_{k-1}} + 2u_k = 0, \\ &k = 0,1,2,..., \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} &((k+\rho)E + A_0)\overline{\overline{u_k}} + E\frac{\partial\overline{\overline{u_{k-1}}}}{\partial s} + I_1\frac{\partial\overline{\overline{u_{k-1}}}}{\partial y} + I_2\frac{\partial\overline{\overline{u_{k-1}}}}{\partial z} \\ &+ \ln x\left(I_1\frac{\partial\rho}{\partial y} + I_2\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)\overline{\overline{u_{k-1}}} - \sum_{l=0}^{k-1} A_l\overline{\overline{u_{k-1}}} + \overline{u_k} = 0, \\ &k = 0,1,2,.... \end{aligned} \tag{21}$$

Из (5) получаем, что $u_0(y,z)$ является собственным вектором соответствующим собственному значению $\rho^*(y,z)$, а остальные $u_k(y,z,s)$, $k = 1,2,...$ определяются однозначно по $u_0(y,z)$ из (6). Из (20) при $k = 0$ имеем, что $\overline{u_0}(y,z)$ определяется как решение уравнения $(\rho E + A_0)\overline{u_0} = 2u_0$. Это уравнение разрешимо и его решением является присоединенный вектор первого порядка собственного значения $\rho^*(y,z)$.

Остальные $\overline{u_k}(y,z,s,\rho)$, $k=1,2,\ldots$ определяются последовательно и однозначно из (20). Положив $k=0$ в (21), получаем уравнение $(\rho E + A_0)\overline{\overline{u_0}} = \overline{u_0}$, решением которого является присоединенный вектор второго порядка, а остальные $\overline{\overline{u_k}}(y,z,s,\rho)$, $k=1,2,\ldots$ определяются однозначно из (21).

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема. *Семейства частных решений матричного уравнения (1) в окрестности точек вырождения* $x=0$ *имеют вид* $u(x,y,z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho(y,z)} \sum\limits_{l=0}^{k} s^{k-l} u_{kk-l}(y,z)$, $s=\ln x$, *если корни определяющего уравнения* $\det(\rho(y,z)E + A_0(y,z)) = 0$ *различны и их разности не являются целыми числами. В случае, когда сами корни или их разности – целочисленные, решения (1) имеют вид* $u(x,y,z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho(y,z)} \sum\limits_{l=0}^{k+2n} s^{k-l} u_{kk-l}(y,z)$, *а в случае кратного корня определяющего уравнения структура решений (1) такова:* $u(x,y,z) = \sum\limits_{l=0}^{m} s^{m-l} \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho(y,z)} u_{lk}(y,z,s,\rho(y,z))$, *где* n *– число целых корней или разностей корней,* m *– максимальная степень присоединенного вектора.*

Литература

[1] В. Вазов, *Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений*, Москва, Мир, (1968)

[2] В.Б. Колмановский, Н.П. Косарева, Об асимптотическом поведении линейных систем с переменными параметрами и последействием, *Дифференциальные уравнения*, **35**(3), 643-648 (1999).

[3] А.И. Янушаускас, *Аналитическая теория эллиптических уравнений*, Новосибирск, Наука СО (1979).

Apie dalinių išvestinių sistemos su kintamais koeficientais sprendinių struktūrą

D. Jurgaitis

Darbe ištirta išsigimstanti dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistema. Gautos atskirų sistemos sprendinių šeimų išraiškos apibendrintomis laipsninėmis eilutėmis ir nustatyta šių sprendinių priklausomybė nuo sistemos koeficientų pagrindinės matricos struktūros.