

Структура решений одного вырождающегося эллиптического уравнения

Дайва КОРСАКЕНЕ (ŠU)

e-mail: korsakiene@fm.su.lt

1. Введение

В теории уравнений с частными производными имеется ряд эффектов, которые не имеют аналогий в аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Примером таких явлений может служить полерегулярное вырождение [3]. В работе [1] показано, что решения уравнения

$$z^2(u_{zz} + z^k \Delta u) + \mu z u_z + \lambda u = 0, \quad (1)$$

где $u = u(x, y, z)$, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, k – целое положительное число, имеют следующую структуру:

$$u = z^{\rho_1} g(x, y, z) + z^{\rho_2} h(x, y, z),$$

где $g(x, y, z)$ и $h(x, y, z)$ – голоморфные в окрестности начала координат функции, а ρ_1 и ρ_2 – корни уравнения

$$\rho(\rho - 1) + \mu\rho + \lambda = 0,$$

причем разность $\rho_1 - \rho_2$ не является целым числом.

2. Постановка и решение задачи

В данной работе рассмотрим в окрестности гиперплоскости $T: \{z = 0\}$ вырождающееся эллиптическое уравнение

$$z^2(u_{zz} + z^k \Delta u) + za(z)u_z + b(z)u = 0, \quad (2)$$

где $u = u(z, x_1, \dots, x_m) = u(z, X)$, $\Delta u = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, k – целое положительное число, $a(z)$ и $b(z)$ – голоморфные функции в окрестности точки $z = 0$.

Решение этой задачи будем искать в виде ряда

$$u(z, X) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(z) \Delta^i u_0, \quad (3)$$

здесь $u_0 = u_0(X)$ – произвольная голоморфная в некотором полицилиндре $V: \{|x_i - \alpha_i| \leq r_i, i = 1, \dots, m\}$ функция.

Подставив (3) в уравнение (2) и приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых степенях z , получаем рекуррентные соотношения для определения функций $\varphi_i(z)$:

$$z^2 \varphi_0'' + za(z) \varphi_0' + b(z) \varphi_0 = 0, \quad (4)$$

$$z^2 \varphi_i'' + za(z) \varphi_i' + b(z) \varphi_i = -z^{k+2} \varphi_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Уравнение (4) имеет два линейно независимых интеграла вида

$$\varphi_0^1 = z^{\rho_1} f_1(z), \quad \varphi_0^2 = z^{\rho_2} f_2(z), \quad (6)$$

где ρ_1 и ρ_2 – корни уравнения

$$\rho(\rho - 1) + a(0)\rho + b(0) = 0,$$

причем разность $\rho_1 - \rho_2$ не является целым числом, а функции $f_1(z), f_2(z)$ – голоморфные функции в окрестности точки $z = 0$ и $f_1(0) \neq 0, f_2(0) \neq 0$.

Будем считать, что $\operatorname{Re} \rho_2 > \operatorname{Re} \rho_1$. Тогда частное решение уравнения (5) будем находить по формуле:

$$\varphi_{i+1}(z) = - \int_0^z \frac{z^{\rho_1} f_1(z) \zeta^{\rho_2} f_2(\zeta) - z^{\rho_2} f_2(z) \zeta^{\rho_1} f_1(\zeta)}{\zeta^{-1+\rho_1+\rho_2} R(\zeta)} \zeta^k \varphi_i(\zeta) d\zeta, \quad (7)$$

где $R(z)$ – голоморфная в окрестности точки $z = 0$ функция, причем $R(0) \neq 0$.

3. Нахождение функций φ_i

Интеграл в формуле (7) сходится для таких $\varphi_i(\zeta)$, которые имеют вид $\varphi_i(z) = z^s \nu_i(z)$, где $\nu_i(z)$ – голоморфная в окрестности $z = 0$ функция, а s удовлетворяет неравенству $\operatorname{Re} s > \max\{|\operatorname{Re} \rho_1|, |\operatorname{Re} \rho_2|\}$. Тогда из (7) следует, что $\varphi_{i+1}(z)$ имеет вид

$$\varphi_{i+1}(z) = z^{s+2+k} \nu_{i+1}(z), \quad (8)$$

где $\nu_{i+1}(z)$ – голоморфная в окрестности $z = 0$ функция. Покажем, что найдется конечное N такое, что $\varphi_N = z^s h(z)$ и все $\varphi_i(z)$ при $i \leq N$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям (4) и (5).

Рассмотрим уравнение (5) для функции $\varphi_1(z)$, которое может быть приведено к виду

$$\varphi_1'' + \frac{a(z)}{z} \varphi_1' + \frac{b(z)}{z^2} \varphi_1 = -z^{k+\rho} h_0(z), \quad (9)$$

где число ρ – один из корней ρ_1, ρ_2 , $h_0(z)$ – аналитическая в окрестности точки $z = 0$ функция. Пусть

$$a(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i, \quad b(z) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i, \quad h_0(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i. \quad (10)$$

Решение уравнения (9) будем искать в виде ряда

$$\varphi_1(z) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i z^{\rho+i+2+k} = z^{\rho+2+k} h_1(z). \quad (11)$$

Подставив (10) и (11) в уравнение (9) и приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых степенях z и обозначив

$$E_0(\rho) = (\rho + k + 2)(\rho + k + 1) + a_0(\rho + k + 2) + b_0, \\ E_i(\rho) = a_i(\rho + k + 2) + b_i,$$

получаем рекуррентные соотношения для коэффициентов d_i

$$d_0 E_0(\rho) = c_0, \\ d_1 E_0(\rho + 1) + d_0 E_1(\rho) = c_1, \\ d_n E_0(\rho + n) + \sum_{i=1}^n d_{n-i} E_i(\rho + n - i) = c_n. \quad (12)$$

Так как ρ – один из корней уравнения

$$\rho(\rho - 1) + a_0 \rho + b_0 = 0,$$

а разность $\rho_2 - \rho_1$ не является целым числом, то $E_0(\rho + n) \neq 0$ для всех натуральных n . Поэтому из (12) найдем

$$d_n = \frac{c_n}{E_0(\rho + n)} - \sum_{i=1}^n d_{n-i} \frac{E_i(\rho + n - i)}{E_0(\rho + n)}. \quad (13)$$

Пусть R_1 – радиус круга, в котором сходятся ряды (10), N – некоторое фиксированное число. Воспользуясь оценками при $n \geq N$, полученными в [3]

$$\left| \frac{E_i(\rho + n - i)}{E_0(\rho + n)} \right| \leq \frac{|\rho| + n}{|E_0(\rho + n)|} (|a_i| + |b_i|) < (|a_i| + |b_i|),$$

из (13) имеем

$$|d_n| < |c_n| + \sum_{i=1}^n (|a_i| + |b_i|) |d_{n-i}|. \quad (14)$$

Для коэффициентов a_i, b_i, c_i найдем оценки

$$|a_i| < MR_1^{-i}, |b_i| < MR_1^{-i}, |c_i| < MR_1^{-i}, \quad (15)$$

где $M = \max \{ \max_{|z| \leq R_1} |a(z)|, \max_{|z| \leq R_1} |b(z)|, \max_{|z| \leq R_1} |h_0(z)| \}$.

Каковы бы ни были d_0, d_1, \dots, d_N , всегда можно найти такое число P , чтобы

$$|d_i| < P^i R_1^{-i}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (16)$$

Пусть неравенство (16) справедливо для всех $i < n$. Число P можно выбрать так, что (16) будет выполняться и для $i = n$. Действительно из (14) и (15) имеем

$$|d_n| < \frac{M}{R_1^n} \left\{ 1 + 2 \sum_{i=0}^{n-1} P^i \right\} = \frac{M}{R_1^n} \left\{ 1 + 2 \frac{P^n - 1}{P - 1} \right\}.$$

Для того чтобы (16) выполнялось при $i = n$, достаточно положить $P > 3M + 1$. Итак, оценка (16) справедлива при всех натуральных i , а ряд (11) для $h_1(z)$ сходится при всех z , удовлетворяющих неравенству

$$|z| < R_1 P^{-1}. \quad (17)$$

Точно так же докажем, что $\varphi_2(z) = z^{\rho+2(k+2)} h_2(z)$, где $h_2(z)$ – голоморфная в круге $|z| < R_1 P^{-1} P_1^{-1}$ функция, а P_1 – некоторое число. После $N = [\operatorname{Re} \rho_2 + 1]$ таких шагов получим требуемое φ_N и число R_N такое, что все $\varphi_i(z)$ голоморфны в круге $|z| < R_N$.

Из построения функций φ_N следует, что в круге $|z| < R_N$ при $i \leq N$ справедлива оценка

$$|\varphi_i| < M_i |z|^{\operatorname{Re} \rho + i(k+2)}, \quad (18)$$

где M_i – некоторая положительная постоянная

$$M_i = \frac{M_0^i \Gamma(\sigma/2) \Gamma(3/2) q}{(k+2)^{2i} \Gamma\left(i + \frac{\sigma}{k+2}\right) \Gamma\left(i - 1 + \frac{\sigma-1}{k+2}\right)}.$$

Здесь M_0 и q – некоторые новые постоянные, а $\sigma = \operatorname{Re}(\rho_2 - \rho_1)$.

Обозначив

$$M(z, \zeta) = \frac{f_1(z)f_2(\zeta) - f_2(z)f_1(\zeta)}{R(\zeta)(z - \zeta)\zeta}, \quad N(z, \zeta) = \frac{f_2(z)f_1(\zeta)}{R(\zeta)},$$

перепишем формулу (7) так

$$\begin{aligned} \varphi_{i+1}(z) = & - \int_0^z \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{\rho_1} (z - \zeta)M(z, \zeta)\varphi_i(\zeta)\zeta^k d\zeta \\ & - \int_0^z \frac{z^{\rho_1}\zeta^{\rho_2} - z^{\rho_2}\zeta^{\rho_1}}{\zeta^{-1+\rho_1+\rho_2}} N(z, \zeta)\varphi_i(\zeta)\zeta^k d\zeta. \end{aligned} \quad (19)$$

Функции $M(z, \zeta)$ и $N(z, \zeta)$ голоморфны в некоторой области $B: \{|z| \leq r, |\zeta| \leq r\}$. Введем обозначения

$$M' = \max_B |M(z, \zeta)|, \quad H = \max_B |N(z, \zeta)|, \quad \lambda_i = \operatorname{Re} \rho_i, \quad i = 1, 2.$$

Положим в формуле (19) $i = N$, тогда из (18) имеем

$$\begin{aligned} |\varphi_{N+1}(z)| \leq & \int_0^{|z|} \left(\frac{|z|}{|\zeta|}\right)^{\lambda_1} (|z| - |\zeta|)M'M_N|\zeta|^{\operatorname{Re} \rho + N(k+2)+k} d|\zeta| \\ & + \int_0^{|z|} \frac{-|z|^{\lambda_1}|\zeta|^{\lambda_2} + |z|^{\lambda_2}|\zeta|^{\lambda_1}}{|\zeta|^{\lambda_1+\lambda_2-1}} HM_N|\zeta|^{\operatorname{Re} \rho + N(k+2)+k} d|\zeta|. \end{aligned} \quad (20)$$

В формуле (19) фиксируется некоторая определенная ветвь функции $\varphi_i(z)$ и интегрирование ведется по лучу $\arg \zeta = \arg z$. В результате выделяем некоторую ветвь функции $\varphi_{i+1}(z)$, которая определена и однозначна в окрестности точки $z = 0$, разрезанной по тому же лучу прямой, что и для ветви $\varphi_i(z)$. В качестве такого разреза будем брать луч $\arg \zeta = \pi$. Неравенство (20) имеет место для всех фиксированных ветвей функций $\varphi_i(z)$, а на остальные ветви легко распространяется аналитическим продолжением.

Из (20) находим

$$\begin{aligned} |\varphi_{N+1}(z)| \leq & \frac{M_N \left[M' + H(\lambda_2 - \lambda_1) \frac{\operatorname{Re} \rho - \lambda_1 + (N+1)(k+2) - 1}{\operatorname{Re} \rho - \lambda_2 + (N+1)(k+2)} \right]}{(\operatorname{Re} \rho - \lambda_1 + (N+1)(k+2) - 1)(\operatorname{Re} \rho - \lambda_1 + (N+1)(k+2))} \\ & \times |z|^{\operatorname{Re} \rho + (N+1)(k+2)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Выбирая $M_0 \geq M' + H(\lambda_2 - \lambda_1) \frac{\operatorname{Re} \rho - \lambda_1 + (i+1)(k+2) - 1}{\operatorname{Re} \rho - \lambda_2 + (i+1)(k+2)}$, $i \geq N$, из (18) получим оценку

$$|\varphi_{N+1}(z)| \leq \frac{M_0^{N+1} \Gamma(\sigma/2) \Gamma(3/2) q}{(k+2)^{2(N+1)} \Gamma\left(N+1 + \frac{\sigma}{k+2}\right) \Gamma\left(N + \frac{\sigma-1}{k+2}\right)} |z|^{\operatorname{Re} \rho + (N+1)(k+2)}.$$

Продолжая далее подобные оценки, по индукции найдем следующую оценку, справедливую для всех i

$$|\varphi_i(z)| \leq \frac{M_0^i \Gamma(\sigma/2) \Gamma(3/2) q}{(k+2)^{2i} \Gamma\left(i + \frac{\sigma}{k+2}\right) \Gamma\left(i - 1 + \frac{\sigma-1}{k+2}\right)} |z|^{\operatorname{Re} \rho + i(k+2)}. \quad (22)$$

Рассмотрим два семейства решений уравнения (2)

$$u_1(z, X) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i^{(1)}(z) \Delta^i f(X), \quad u_2(z, X) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i^{(2)}(z) \Delta^i g(X), \quad (23)$$

где f и g – функции, голоморфные в цилиндре V , а функции $\varphi_0^{(1)}(z) = z^{\rho_1} f_1(z)$, $\varphi_0^{(2)}(z) = z^{\rho_2} f_2(z)$ и все остальные $\varphi_i^{(j)}(z)$ определяются по формуле (7). Из оценки (22) следует, что ряды $z^{-\rho_1} u_1$ и $z^{-\rho_2} u_2$ сходятся абсолютно и равномерно в области

$D: \left\{ |x_i - \alpha_i| \leq \frac{1}{2} r_i, |z| < [(r(k+2))^2 (4mM_0)^{-1}]^{\frac{1}{k+2}} \right\}$, $i = 1, \dots, m$, $r = \min_i r_i$. Решения (23) имеют вид $u_1 = z^{\rho_1} h_1(z, X)$, $u_2 = z^{\rho_2} h_2(z, X)$, где h_1 и h_2 – голоморфные в области D функции.

Итак, мы построили два семейства решений уравнения (2), голоморфных в области V всюду, за исключением, быть может, точек гиперплоскости $T: \{z = 0\}$.

Литература

- [1] Д.А. Корсаkene, Задача Коши для вырождающегося эллиптического уравнения, *Liet. matem. rink.*, **42**(спец. пр.), 184–188 (2002).
- [2] Д.А. Корсаkene, О задаче Коши для вырождающегося уравнения второго порядка, *Дифференциальные уравнения*, **33**(4), Минск, 560–562 (1997).
- [3] А.И. Янушаускас, *Аналитическая теория эллиптических уравнений*, Новосибирск, Наука (1979).
- [4] В.А. Фукс, *Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных*. Москва, Наука (1985).

Išsigimusias elipsinės lygties Koši uždavinys

D. Korsakienė

Randamos dvi lygties

$$z^2(u_{zz} + z^k \Delta u) + za(z)u_z + b(z)u = 0$$

sprendinių šeimos, analizinės hiperplokštumos $T: \{z = 0\}$ aplinkoje, kai lygties $\rho(\rho-1) + a(0)\rho + b(0) = 0$ šaknų skirtumas nėra sveikasis skaičius.