Liet. matem. rink., T. 43, spec. nr., 161–164

Apie parabolinio tipo $(\varphi, \xi, \eta, \lambda)$-struktūrų normalumą

Angelė BAŠKIENĖ (ŠU)
el. paštas: baskiene@fm.su.lt

Elipsinio ir hiperbolinio tipo beveik kontaktinių struktūrų (φ, ξ, η) normalumas tyrinėtas daugelio matematikų [2, 3].

Parabolinio tipo $(\varphi, \xi, \eta, \lambda)$-struktūrą n-matėje daugdaroje M_n apibrėžia afinorius φ_a^b, vektorius ξ^b, kovektorius η_a, funkcija λ, tenkinantys sąlygas [1]:

$$\varphi_a^c \varphi_c^b = -\xi^b \eta_a, \quad \varphi_a^c \eta_c = -\lambda \eta_a, \quad \varphi_a^c \xi^a = -\lambda \xi^c, \quad \xi^a \eta_a = -\lambda^2, \qquad a, b, \ldots = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Analogiškai elipsiniam ir hiperboliniam atvejui ši struktūra vadinama normaliąja, jeigu daugdaroje $M_n \times R$ afinorinė struktūra

$$\left(\widetilde{F}_\alpha^\beta\right) = \begin{pmatrix} \varphi_a^b & \xi^b \\ \eta_a & \lambda \end{pmatrix}, \tag{2}$$

tenkinanti sąlygą

$$\widetilde{F}_\alpha^\gamma \widetilde{F}_\gamma^\beta = 0, \tag{3}$$

yra integruojamoji, t.y. afinoriaus $\widetilde{F}$ Nijenhuis'o tenzorius lygus 0:

$$\widetilde{N}_{\gamma\beta}^\alpha = \widetilde{F}_\gamma^\delta \widetilde{\nabla}_\delta \widetilde{F}_\beta^\alpha - \widetilde{F}_\beta^\delta \widetilde{\nabla}_\delta \widetilde{F}_\gamma^\alpha - \widetilde{F}_\delta^\alpha \left(\widetilde{\nabla}_\gamma \widetilde{F}_\beta^\delta - \widetilde{\nabla}_\beta \widetilde{F}_\gamma^\delta\right) = 0. \tag{4}$$

Čia $\alpha, \beta, \ldots = 1, 2, \ldots, n, n+1$, tenzorių $\widetilde{F}_\alpha^\beta$ ir $\widetilde{N}_{\gamma\beta}^\alpha$ komponentės priklauso tik nuo x^α, o kovariantinis diferencijavimas atliekamas bet kurios simetrinės afiniosios sieties atžvilgiu. Surašę tenzoriaus $\widetilde{N}_{\gamma\beta}^\alpha$ komponentes, kai $\alpha(\beta, \gamma, \ldots)$ įgyja reikšmes $a(b, c, \ldots)$ ir $n+1$, gauname būtinas ir pakankamas (1) struktūros normalumo sąlygas [1]:

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\ S_{cb}^a = \widetilde{N}_{cb}^a = N_{cb}^a - \xi^a(\nabla_c \eta_b - \nabla_b \eta_c) = 0,\\
&\text{b)}\ S_{cb} = \widetilde{N}_{cb}^{n+1} = \varphi_c^d(\nabla_d \eta_b - \nabla_b \eta_d) - \varphi_b^d(\nabla_d \eta_c - \nabla_c \eta_d) + \nabla_c \lambda \eta_b - \nabla_b \lambda \eta_c = 0,\\
&\text{c)}\ S_c^a = \widetilde{N}_{c,n+1}^a = \xi^d(\nabla_c \varphi_d^a - \nabla_d \varphi_c^a) + \varphi_c^d \nabla_d \xi^a + \lambda \nabla_c \xi^a = 0,\\
&\text{d)}\ S_c = \widetilde{N}_{c,n+1}^{n+1} = \xi^d(\nabla_c \eta_d - \nabla_d \eta_c) + \varphi_c^d \nabla_d \lambda + \lambda \nabla_c \lambda = 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

Čia ∇ – kovariantinio diferencijavimo daugdaroje M_n simbolis, o N^a_{cb} yra afinoriaus φ Nijenhuis'o tenzorius.

Žinoma [2, 3], jog tiek elipsiniu, tiek hiperboliniu atveju beveik kontaktinės struktūros normalumas charakterizuojamas vien (5_a) lygybe, nes iš sąlygos $S^a_{cb} = 0$ išplaukia, jog $S^a_c = S_{cb} = S_c = 0$. Parabolinio tipo $(\varphi, \xi, \eta, \lambda)$-struktūroms bendru atveju iš (5_a) sąlygos neišplaukia likusios (5) sąlygos.

Pateiksime keletą pavyzdžių.

1. Trimatėje daugdaroje $M_3(x^1, x^2, x^3)$ afinorius

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/(1+3(x^3)^2) \\ 0 & 0 & 1/(1+3(x^3)^2) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

nulinis vektorius ir kovektorius $(-\frac{3x^3}{1+3(x^3)^2}, \frac{1}{x^3(1+3(x^3)^2)}, 0)$ tenkina (1) sąlygas ($\lambda = 0, x^3 \neq 0$). Pateiktai (φ, η)-struktūrai [1] $S^a_{cb} = 0$, tačiau

$$S_{12} = -\frac{1}{(x^3)^2(1+3(x^3))^2} \neq 0.$$

2. Daugdaroje M_3 afinorius $\begin{pmatrix} 0 & 2x^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, vektorius $(0, 1, -x^2)$, nulinis kovektorius ir $\lambda = 0$ taip pat tenkina (1) aksiomas. Tokiai struktūrai $S^a_{cb} = 0$, bet $S^3_1 = -2x^2 \neq 0$, kai $x^2 \neq 0$.

Daugeliu atvejų sąlyga $S^a_{cb} = 0$ yra būtina ir pakankama, kad parabolinio tipo $(\varphi, \xi, \eta, \lambda)$-struktūra būtų normalioji. Nustatysime šiuos atvejus.

Nesunku pastebėti, jog dėl (2) ir (4) išraiškų

$$\widetilde{N}^\alpha_{\varepsilon\beta}\widetilde{F}^\varepsilon_\gamma - \widetilde{N}^\alpha_{\gamma\varepsilon}\widetilde{F}^\varepsilon_\beta = 0; \quad \widetilde{N}^\gamma_{\alpha\varepsilon}\widetilde{F}^\varepsilon_\beta + \widetilde{N}^\varepsilon_{\alpha\beta}\widetilde{F}^\gamma_\varepsilon = 0. \tag{6}$$

Surašę šias lygybes, kai $\alpha(\beta, \gamma, \ldots)$ įgyja reikšmes $a(b, c, \ldots)$ ir $n+1$, gauname, jog

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\ S^a_{eb}\varphi^e_c - S^a_b\eta_c - S^a_{ce}\varphi^e_b - S^a_c\eta_b = 0,\\
&\text{b)}\ S^a_{eb}\xi^e - \lambda S^a_b + S^a_e\varphi^e_b = 0,\\
&\text{c)}\ S_{eb}\varphi^e_c - S_b\eta_c - S_{ce}\varphi^e_b - S_c\eta_b = 0,\\
&\text{d)}\ S_e\xi^e = S^a_e\xi^e = 0,\\
&\text{e)}\ S_e\varphi^e_c - S_{ce}\xi^e - \lambda S_c = 0,\\
&\text{f)}\ S^c_{ae}\varphi^e_b + S^e_{ab}\varphi^c_e + S^c_a\eta_b + S_{ac}\xi^c = 0,\\
&\text{g)}\ S_{ae}\varphi^e_b + S_a\eta_b + S^e_{ab}\eta_e + \lambda S_{ab} = 0,\\
&\text{h)}\ S^c_e\varphi^e_b + S^e_b\varphi^c_e + S_b\xi^c = 0,\\
&\text{i)}\ S^c_{ae}\xi^e + S^e_a\varphi^c_e + \lambda S^c_a + S_a\xi^c = 0,\\
&\text{j)}\ S_{ae}\xi^e + S^e_a\eta_e + 2\lambda S_a = 0,\\
&\text{k)}\ S_e\varphi^e_b + S^e_b\eta_e + \lambda S_b = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

1 lema. $S^a_{ab} = S_b$.

Iš (2) ir (3) išplaukia, jog $\widetilde{F}^\alpha_\alpha = \varphi^a_a + \lambda = 0$, o iš (1) $\varphi^a_e \varphi^e_a = \lambda^2$, todėl $\varphi^e_a \nabla_b \varphi^a_e = \lambda \nabla_b \lambda$. Iš (5) ir Nijenhuis'o tenzoriaus N^a_{cb} išraiškos gauname, kad

$$\begin{aligned} S^a_{ab} &= \varphi^e_a \nabla_e \varphi^a_b - \varphi^e_b \nabla_e \varphi^a_a - \varphi^a_e (\nabla_a \varphi^e_b - \nabla_b \varphi^e_a) - \xi^a (\nabla_a \eta_b - \nabla_b \eta_a) \\ &= \varphi^e_b \nabla_e \lambda + \lambda \nabla_b \lambda + \xi^a (\nabla_b \eta_a - \nabla_a \eta_b) = S_b. \end{aligned}$$

Panaudoję (7) formules galime gauti tokį rezultatą.

Išvada. Jei bent vienas iš tenzorių S^a_{cb}, S_{cb}, S^a_c lygus 0, tuomet $S_c = 0$.

Pritaikę 1 lemą gauname, jog kai $S^a_{cb} = 0$, tuomet $S_c = 0$. Iš (7_h), (7_j), (5_d), (5_c) išplaukia, jog $S_c = 0$, kai $S^a_c = 0$. Analogiškai iš (7_c), (7_j), (5_d), (5_b) išplaukia, jog tuo atveju, kai $S_{cb} = 0$, gauname $S_c = 0$.

2 lema. *Jei $S^a_{cb} = 0$, tuomet*

$$\begin{aligned} &1)\quad S^a_b \eta_c + S^a_c \eta_b = 0; \\ &2)\quad S^a_e \varphi^e_b = \lambda S^a_b; \\ &3)\quad S_{ce}\xi^e = S^a_e \xi^e = S^a_e \eta_a = 0; \quad S_c = 0; \\ &4)\quad S^c_a \eta_b + S_{ab}\xi^c = 0; \\ &5)\quad S_{ae}\varphi^e_b = -\lambda S_{ab}; \\ &6)\quad S^e_b \varphi^a_e = -\lambda S^a_b. \end{aligned} \tag{8}$$

1 teorema. *Parabolinio tipo $(\varphi, \xi, \eta, \lambda \neq 0)$-struktūra yra normalioji tada ir tik tada, kai $S^a_{cb} = 0$.*

Įrodysime sąlygos $S^a_{cb} = 0$ pakankamumą, nes būtinumas išplaukia iš normalumo apibrėžimo.

Tarkime, jog $S^a_{cb} = 0$. Pagal 1 lemą $S_b = 0$. Po (8_2) lygybės kompozicijos su φ^b_c iš (1) išplaukia, jog $\lambda S^a_b \varphi^b_c = 0$. Dar kartą pritaikę (8_2) lygybę, gauname $\lambda^2 \cdot S^a_c = 0$. Kadangi pagal teoremos sąlygą $\lambda \neq 0$, vadinasi, $S^a_c = 0$. Analogiškai iš (8_5) gauname $S_{bc} = 0$. Taigi $(\varphi, \xi, \eta, \lambda \neq 0)$-struktūra yra normalioji.

2 teorema. *Parabolinio tipo $(\varphi, \xi, \eta, \lambda)$-struktūra, kuriai vektorius ξ^a ir kovektorius η_b nėra nuliniai, yra normalioji tada ir tik tada, kai $S^a_{cb} = 0$.*

Kai $S^a_{cb} = 0$, iš (8_1) $S^a_b \eta_c = -S^a_c \eta_b$. Tarkime, jog kuris nors $\eta_i = 0$. Tada $S^a_i \eta_b = 0$, $b = 1, 2, \ldots, n$. Kadangi bent vienas iš η_b nėra lygus 0, $S^a_i = 0$. Tarkime, jog $\eta_i \neq 0$. Tuomet kai $c = b = i$, $S^a_i \eta_i = -S^a_i \eta_i = 0$, $S^a_i = 0$. Taigi $S^a_i = 0$ su kiekvienu i.

Pagaliau iš (8_4) $S_{ab}\xi^e = 0$. Iš čia $S_{ab} = 0$, nes ξ^c nėra nulinis vektorius.

Vadinasi, $(\varphi, \xi, \eta, \lambda)$-struktūra, kuriai ξ^a ir η_b nėra nuliniai, yra normalioji tada ir tik tada, kai $S^a_{cb} = 0$.

Belieka išnagrinėti keletą ypatingų atvejų.

1. Jei $\xi^a = \eta_b = \lambda = 0$, beveik dualioji struktūra φ yra normalioji tada ir tik tada, kai ji yra integruojamoji, t.y. kai afinoriaus φ Nijenhuis'o tenzorius $N^a_{cb} = S^a_{cb} = 0$.

2. Tarkime, jog parabolinio tipo $(\varphi, \xi, \eta, \lambda)$-struktūra tenkina sąlygą $\lambda = \xi^a = 0$, η_b – nėra nulinis kovektorius. Jei $S^a_{cb} = 0$, tuomet $S_b = 0$, $S^a_c = 0$, bet nebūtinai $S_{cb} = 0$. Šiuo atveju ($\lambda = \xi^a = 0$) (φ, η)-struktūra [1] yra normalioji tada ir tik tada, kai ji yra integruojamoji ($N^a_{cb} = S^a_{cb} = 0$) ir

$$S_{cb} = \varphi^d_c(\nabla_d \eta_b - \nabla_b \eta_d) - \varphi^d_b(\nabla_d \eta_c - \nabla_c \eta_d) = 0.$$

3. Jei $\lambda = \eta_b = 0$, bet ξ^a nėra nulinis vektorius, tuomet struktūra (φ, ξ) yra normalioji tada ir tik tada, kai ji yra integruojamoji ir

$$S^a_c = \xi^d(\nabla_c \varphi^a_d - \nabla_d \varphi^a_c) + \varphi^d_c \nabla_d \xi^a = 0.$$

Literatūra

[1] A. Baškienė, Beveik kontaktinių struktūrų paraboliniai analogai, *Liet. matem. rink.*, spec. nr., **41**, 233–238 (2001).

[2] Y. Tashiro, On contact structure of hypersurfaces in complex manifolds, I, *Tohoku Math. J.*, **15**, 62–78 (1963).

[3] А. Крищюнайте, Об условиях нормальности и интегрируемости почти контактных структур на гиперповерхностях комплексного и двойного пространства, *Уч. зап. Казанского ун-та*, **128**(3), 55–75 (1968).

On normality of parabolic $(\varphi, \xi, \eta, \lambda)$-structures

A. Baškienė

In the article necessary and sufficient conditions are found for the parabolic $(\varphi, \xi, \eta, \lambda)$-structure to become normal.