

# Неоднородная краевая задача Римана с плюс-бесконечным индексом логарифмического порядка и неограниченным модулем ее коэффициента для угла

Пятрас АЛЕКНА (ŠU)

e-mail: mat.kat@fm.su.lt

В комплексной плоскости дан угол  $\omega$  ( $0 < \omega < 2\pi$ ) с вершиной в точке  $z = 0$ , одна сторона которого  $L_2$  совпадает с положительной частью вещественной оси. Обозначим  $D^+ = \{z: 0 < \arg z < \omega\}$ ,  $D^- = \{z: \omega < \arg z < 2\pi\}$ . Положительное направление контура  $L = L_1 \cup L_2$  выбираем так, чтобы область  $D^+$  оставалась слева при обходе контура  $L$ . Конечную часть контура  $L$  обозначим через  $L^0 = L \cap (|z| \leq R)$ , где  $R$  – достаточно большое число.

Рассматривается неоднородная краевая задача Римана: найти функции  $\Phi^\pm(z)$ , аналитические и ограниченные соответственно в областях  $D^\pm$  (класс  $\mathcal{B}$ ), предельные значения которых  $\Phi^\pm(t)$  на контуре  $\tilde{L} = L \setminus \{\infty\}$  удовлетворяют краевому условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in \tilde{L}, \quad (1)$$

где относительно коэффициента  $G(t)$  и свободного члена  $g(t)$  сделаны следующие предположения:

$$\ln G(t) \in \mathcal{D}_p(L^0), \quad p > 1, \quad (2)$$

$$\ln G(t) = \psi_k(t) \ln^{\rho_k} |t| + i\varphi_k(t) \ln^{\alpha_k} |t|, \quad \text{если } t \in L_k \setminus L_k^0, \quad (3)$$

$$0 < \rho_k < \infty, \quad \alpha_k \geq 1, \quad k = 1, 2;$$

$$\begin{aligned} \psi_k(t) \in \mathcal{D}_{\delta_k}(L_k \setminus L_k^0), \quad \lim_{t \rightarrow \infty, t \in L_k} \psi_k(t) = \varkappa_k, \quad \varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 > 0, \quad \delta_k > \rho_k + 2; \\ \varphi_k(t) \in \mathcal{D}_{\beta_k}(L_k \setminus L_k^0), \quad \lim_{t \rightarrow \infty, t \in L_k} \varphi_k(t) = \lambda_k, \quad \lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0, \beta_k > \alpha_k + 2; \end{aligned} \quad (4)$$

$$g(t) \in \mathcal{D}_{q_k}(L_k), \quad q_k > \max(\rho_k, \alpha_k) \quad \text{и} \quad g(\infty) = 0. \quad (5)$$

Из (3) и (4) следует, что модуль коэффициента  $|G(t)| = \exp\{\psi_k(t) \ln^{\rho_k} |t|\}$  не ограничен, а задача (1)–(5) имеет бесконечный индекс логарифмического порядка.

В работах автора [1]–[2] модуль коэффициента  $|G(t)|$  был ограничен. В этой статье обобщаются полученные результаты [4] с неограниченным модулем ее коэффициента для угла.

Каноническую функцию рассматриваемой задачи (1)–(4) запишем в виде произведения двух функций

$$X^{\pm}(z) = \exp \left\{ \frac{z}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\ln G(\tau)}{\tau(\tau-z)} d\tau \right\} \cdot \exp \left\{ \frac{z}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\ln G(x)}{x(x-z)} dx \right\} \equiv X_1(z)X_2(z). \quad (6)$$

Используя асимптотику интеграла типа Коши с логарифмической плотностью [3], получаем асимптотическое равенство для каждой из функций  $X_k(z)$  ( $k = 1, 2$ ),  $z \rightarrow \infty$ :

$$X_1(z) = \exp \left\{ \varkappa_1 \frac{(2\pi i)^{\rho_1}}{\rho_1 + 1} \mathbb{B}_{\rho_1+1} \left( \frac{\ln z - i\omega}{2\pi i} \right) - i\lambda_1 \frac{(2\pi i)^{\alpha_1}}{\alpha_1 + 1} \mathbb{B}_{\alpha_1+1} \left( \frac{\ln z - i\omega}{2\pi i} \right) + S_1(z) \right\}, \quad (7)$$

$$X_2(z) = \exp \left\{ \varkappa_2 \frac{(2\pi i)^{\rho_2}}{\rho_2 + 1} \mathbb{B}_{\rho_2+1} \left( \frac{\ln z}{2\pi i} \right) - i\lambda_2 \frac{(2\pi i)^{\alpha_2}}{\alpha_2 + 1} \mathbb{B}_{\alpha_2+1} \left( \frac{\ln z}{2\pi i} \right) + S_2(z) \right\}, \quad (8)$$

где  $\mathbb{B}_{\rho_k+1}(w)$ ,  $\mathbb{B}_{\alpha_k+1}(w)$  – многочлены Бернулли, а ветви  $(\ln z - i\omega)^{\alpha_1}$ ,  $(\ln z - i\omega)^{\rho_1}$  и  $\ln z - i\omega$  непрерывны в области  $(R < |z| < \infty) \cap (\omega < \arg z < \omega + 2\pi)$  и  $(\ln z - i\omega)^{\rho_1} > 0$ ,  $(\ln z - i\omega)^{\alpha_1} > 0$ ,  $\ln z - i\omega > 0$  на верхнем берегу разреза по лучу  $\arg z = \omega$ ;  $\ln^{\rho_2} z$ ,  $\ln^{\alpha_2} z$  непрерывны в области  $(R < |z| < \infty) \cap (0 < \arg z < 2\pi)$  и  $\ln^{\rho_2} x > 0$ ,  $\ln^{\alpha_2} x > 0$ ,  $\ln x > 0$  на верхнем берегу разреза по лучу  $\arg z = 0$ ;  $S_k(z)$  – ограниченная функция в окрестности  $z = \infty$ .

Из линейности краевого условия (1) следует, что достаточно найти частное решение  $\Phi_0^{\pm}(z) \in \mathcal{B}$  неоднородной задачи (1)–(5), после чего общее решение этой задачи будет

$$\Phi^{\pm}(z) = \Phi_0^{\pm}(z) + \Psi^{\pm}(z), \quad z \in D^{\pm}, \quad (9)$$

где  $\Psi^{\pm}(z)$  – общее решение в классе  $\mathcal{B}$  соответствующей однородной задачи

$$\Psi^+(t) = G(t)\Psi^-(t), \quad t \in \tilde{L}. \quad (10)$$

Для построения частного решения  $\Phi_0^{\pm}(z)$  вместо задачи (1)–(5) рассматриваются две вспомогательные неоднородные задачи:

$$\Phi_1^+(t) = G(t)\Phi_1^-(t) + g_1(t), \quad g_1(t) = \begin{cases} g(t), & t \in L_1, \\ 0, & t \in L_2, \end{cases} \quad (11)$$

и

$$\Phi_2^+(t) = G(t)\Phi_2^-(t) + g_2(t), \quad g_2(t) = \begin{cases} 0, & t \in L_1, \\ g(t), & t \in L_2. \end{cases} \quad (12)$$

Если  $\Phi_{10}^{\pm}(z)$  и  $\Phi_{20}^{\pm}(z)$  – ограниченные частные решения соответственно задач (11) и (12), то  $\Phi_0^{\pm}(z) = \Phi_{10}^{\pm}(z) + \Phi_{20}^{\pm}(z)$  будет частным решением исходной задачи (1)–(5) в классе  $\mathcal{B}$ .

Пропуская промежуточные вычисления, связанные с построением частных решений вспомогательных задач (11) и (12) [3], сформулируем окончательные результаты исследования.

ТЕОРЕМА 1. Если выполнены условия (2)–(5),  $0 < \rho_k \leq 1$ , частное решение однородной задачи (10)

$$\Psi_{10}^{\pm}(z) = \prod_{k=1}^2 F_{1k}(z) X_k(z),$$

где целые функции  $F_{11}(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{r'_n}\right)$ , модули нулей  $r'_n$  равные наибольшему вещественному корню уравнения

$$2 \sum_{l=0}^{[\frac{\alpha_2}{2}]} a_l \ln^{\alpha_2 - 2l} x = 2n - 1,$$

$$F_{12}(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{r''_n}\right), \quad r''_n = \exp \left\{ \frac{(2n-1)\pi}{\lambda_2} \right\}^{\frac{1}{\alpha_1}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

а для  $X_k(z)$  справедливы асимптотические равенства (7) и (8), то

$$\Phi_{10}^{\pm}(z) = -\frac{\Psi_{10}^{\pm}(z)}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{g(xe^{i\omega}) dx}{\Psi_{10}^+(xe^{i\omega})(x - ze^{-i\omega})}$$

есть частное ограниченное решение вспомогательной задачи (11).

ТЕОРЕМА 2. Если выполнены условия (2)–(5),  $0 < \rho_k \leq 1$ , частное решение однородной задачи (10)

$$\Psi_{20}^{\pm}(z) = \prod_{k=1}^2 F_{2k}(z) X_k(z),$$

где целые функции

$$F_{21}(z) = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{r'_m e^{i\omega}}\right), \quad r'_m = \exp \left\{ \frac{(2m-1)\pi}{-\lambda_1} \right\}^{\frac{1}{\alpha_2}}, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

$$F_{22}(z) = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{r''_m e^{i\omega}}\right),$$

$r''_m$  равен наибольшему вещественному корню уравнения

$$2 \sum_{j=0}^{[\frac{\alpha_1}{2}]} b_j \ln^{\alpha_1 - 2j} x = 2m - 1,$$

то

$$\Phi_{20}^{\pm}(z) = -\frac{\Psi_{20}^{\pm}(z)}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{g(x) dx}{\Psi_{20}^+(x)(x-z)}$$

есть частное ограниченное решение вспомогательной задачи (12).

*Замечание.* Коэффициенты  $a_l$  вычисляются из условия

$$|F_{1k}(\tau)X_k(\tau)| = O(1) \quad \text{при } \tau \rightarrow \infty, \tau \in L_k,$$

с использованием асимптотической формулы (7), а коэффициенты  $b_j$  – из условия

$$|F_{2k}(\tau)X_k(\tau)| = O(1) \quad \text{при } \tau \rightarrow \infty, \tau \in L_k \quad (k = 1, 2)$$

с использованием асимптотической формулы (8).

**ТЕОРЕМА 3.** Если выполнены условия (2)–(5),  $\rho_k > 1$ , а  $F_p(z)$  ( $p = 1, 2, 3, 4$ ) – целые функции нулевого порядка, нули которых расположены на  $L_2$ , определены равенствами:

$$F_1(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{r_n^{(1)}}\right), \quad r_n^{(1)} = \exp \left\{ \frac{(2n-1)\pi}{\lambda_2} \right\}^{\frac{1}{\alpha_2}},$$

$$F_2(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{r_n^{(2)}}\right), \quad \operatorname{Re} \left( \ln r_n^{(2)} - \omega i \right)^{\alpha_1} = (2n-1)\pi(-\lambda_1)^{-1},$$

$$F_3(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{r_n^{(3)}}\right), \quad r_n^{(3)} = \exp \left\{ \frac{(2n-1)\pi}{\varkappa_2} \right\}^{\frac{1}{\rho_2}},$$

$$F_4(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{r_n^{(4)}}\right), \quad \operatorname{Re} \left( \ln r_n^{(4)} - \omega i \right)^{\rho_1} = (2n-1)\pi(-\varkappa_1)^{-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots;$$

то

$$\Phi_{10}^{\pm}(z) = \frac{X^{\pm}(z) \cdot \prod_{k=1}^4 F_p(z)}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{g(xe^{i\omega}) dx}{\prod_{p=1}^4 F_p(xe^{i\omega})X^+(xe^{i\omega})(x - ze^{-i\omega})}$$

есть частное решение вспомогательной задачи (11) в классе  $\mathcal{B}$ .

ТЕОРЕМА 4. Если выполнены условия (2)–(5),  $\rho_k > 1$ ,  $\varkappa_1 < 0$ ,  $\varkappa_2 > 0$ , а  $G_p(z)$  ( $p = 1, 2, 3, 4$ ) – целые функции нулевого порядка, нули которых расположены на  $L_1$ , определены равенствами:

$$G_1(z) = \prod_{m=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z}{r_m^{(1)} e^{i\omega}} \right), \quad r_m^{(1)} = \exp \left\{ \frac{(2m-1)\pi}{-\lambda_1} \right\}^{\frac{1}{\alpha_1}},$$

$$G_2(z) = \prod_{m=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z}{r_m^{(2)} e^{i\omega}} \right), \quad \operatorname{Re} \left( \ln r_m^{(2)} - \pi i \right)^{\alpha_2} = (2m-1)\pi (\lambda_2)^{-1},$$

$$G_3(z) = \prod_{m=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z}{r_m^{(3)} e^{i\omega}} \right), \quad r_m^{(3)} = \exp \left\{ \frac{(2m-1)\pi}{-\varkappa_1} \right\}^{\frac{1}{\rho_1}},$$

$$G_4(z) = \prod_{m=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z}{r_m^{(4)} e^{i\omega}} \right), \quad \operatorname{Re} \left( \ln r_m^{(4)} - \omega i \right)^{\rho_2} = (2m-1)\pi (\varkappa_2)^{-1}, \quad m=1, 2, 3, \dots;$$

то

$$\Phi_{20}^{\pm}(z) = \frac{X^{\pm}(z) \cdot \prod_{p=1}^4 G_p(z)}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{g(x) dx}{\prod_{p=1}^4 G_p(x) X^+(x)(x-z)}$$

есть частное решение вспомогательной задачи (12) в классе  $\mathcal{B}$ .

### Литература

1. П. Алекна, Неоднородная краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка для полуплоскости, *Liet. Matem. Rink.*, **14**(3), 5–18 (1974).
2. П. Алекна, Неоднородная краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка  $\min(\alpha, \beta) \geq 1$  для полуплоскости, *Liet. Matem. Rink.*, **15**(1), 5–22 (1975).
3. P. Alekna. Inhomogene Riemannsche Randwertaufgabe mit positive unendlichen Index der Logarithmischen Ordnung  $\min(\alpha, \beta) > 1$  für einen Winkelraum, *Complex Variables*, **16**, 273–288 (1991).
4. П. Алекна, Неоднородная краевая задача Римана с неограниченным коэффициентом логарифмического порядка для полуплоскости, *Liet. Matem. Rink.*, **42** (spec. nr.), 155–158 (2002).

### REZIUOMĖ

*P. Alekna. Logaritminės eilės plus begalinio indekso nehomogeninis kraštinis Rymano uždavinys su neaprežtu jo koeficiento modulių kampui*

Išnagrinėtas logaritminės eilės begalinio indekso nehomogeninis kraštinis Rymano uždavinys su logaritminės eilės  $0 < \rho_k < \infty$  neaprežtu jo koeficiento modulių kampui aprežtų analizinių funkcijų klasėje  $\mathcal{B}$ .