

## Ketvirtokų mokyklinių matematikos olimpiadų užduotys ir jų sprendimo didaktiniai ypatumai

Danutė KISELIOVA, Arkadijus KISELIOVAS (ŠU)

el. paštas: kadia@su.lt

Mokyklinės matematikos olimpiados užduotys yra rengiamos atsižvelgiant į moksleivių amžių, žinias ir gebėjimus. Užduočių turinys ir forma sudaryti orientuojantis į IV klasės matematikos vadovėliuose bei mokytojų dažniausiai naudojamoje papildomoje medžiagoje pateiktų pagrindinio ir aukštesniojo lygmenų užduočių tipus. Keletas užduočių parinkta orientuojantis į matematikos mokymo turinio kaitos perspektyvas ir bendrųjų gebėjimų, mažai susijusių su išmokta matematine informacija, sritis. 2001 metais mokyklinėse olimpiadose dalyvavo per 5000 moksleivių. Užduotis atliko visi klasės mokiniai. Tyrimui atsitiktinai iš kiekvieno Lietuvos miesto bei rajono atrinktas 2581 olimpiadinis darbas. Olimpiados užduotys reikalauja įvairių matematinių gebėjimų. Tam, kad būtų galima tiksliau analizuoti užduočių sprendimo eigą ir įvertinti skirtingus moksleivių gebėjimus bei jų daromas klaidas, visos užduotys suskaidytos į elementarias užduotis (žingsnius). Pirmoje užduotyje „Parašykite, po kiek dešimčių ir po kiek šimtų turi duotieji skaičiai: 15 630, 129 650, 50 000“ moksleiviai turėjo pritaikyti matematikos žinias apie skaičių skyrius. Tik maža dalis moksleivių neturi jokio supratimo apie skaičių sandarą. Pusė dalyvavusių olimpiadoje moksleivių užduotis atliko teisingai. Pagrindinė klaida – vietoj skaičių pilnų dešimčių ir šimtų moksleiviai rašė, kiek dešimčių ir šimtų yra atitinkamuose (dešimčių ir šimtų) skyriuose. Vadovėliuose numeracijai daugiau dėmesio skiriama tik pradedant naują koncentrą, todėl moksleiviai vėliau, kai susipažįsta su skaičių skyriais ir klasėmis, dėl didelio tempo nespėja gerai suprasti ir išsąmoninti, iš kokių klasių ir skyrių sudaryti didesni skaičiai. Matyt, mokytojai nepakankamai pasitelkia vaizdumą mokydami šios temos. Sprendami 2 užduotį „Surašykite vaikų vardus ūgio mažėjimo tvarka: Arnas – 1,2 m; Linas – 1,35 m; Romas – 1,27 m; Mantas – 1,02 m; Karolis – 1,36 m.“ aukščiausio vaiko vardą teisingai užrašė 76,4% moksleivių, antro – 76,5%, trečio – 76,6%, ketvirto – 76,9%, o penkto – tik 59,90% moksleivių. 16,34% moksleivių vietoj vardų užrašė vaikų ūgį, o 4,23% surašė ne mažėjimo, bet didėjimo tvarka, todėl šias klaidas galima priskirti prie smulkių išsiblašymo klaidų. 2,09% visų moksleivių nemokėjo rašyti matavimo vienetų mažėjimo tvarka ir visai nespėdė užduoties 0,7% moksleivių. Net 21,09% moksleivių nemoka palyginti dešimtainių skaičių, turinčių du ir vieną ženklus po kablelio – jie dar neturi reikiamų įgūdžių skaičiavimams su dešimtainėmis trupmenomis. Norėdami teisingai atlikti 3 užduotį „Kaip kitaip galima 24 padauginti iš 4, nepavartojant skaitmens 2 ir atliekant tik daugybos veiksmus? Pabandykite surasti kuo

daugiau būdų“, moksleiviai turi žinoti daugybos lentelę ir mokėti pritaikyti šias žinias, didesni skaičių skaidant į mažesnių skaičių sandaugą. Gerai atliko užduotį tik 30,65% moksleivių, nesprendė – 22,19% ir net 46,57% moksleivių nemokėjo pritaikyti daugybos žinių. Ši užduotis yra skirta daugybos žinių taikymui. III klasės vadovėliuose yra daug panašaus pobūdžio užduočių, tik užduotys juose formuluojamos kiek kitaip. IV klasės vadovėliuose tokių užduočių nėra, bet pateikta daug tekstinių užduočių, atskleidžiančių daugybos veiksmo sąvoką ir padedančių ją suvokti. Kad teisingai išspręstų 4 užduotį „Iš dešimties kortelių pasirinkite tas penkias korteles, kuriomis, sudėlioję daugybos veiksmą, gautumėte didžiausią sandaugą: 1, 2, 5, 4, 5, 6, 7, 8, 9“, moksleiviai turi mokėti, taikydami daugybos ir kombinatorikos žinias, numatyti įvairių skaičių kombinacijų sandaugų rezultatus ir išrinkti didžiausią. Jie turi suvokti, kad kuo didesnius skaičius sudauginsime, tuo didesni rezultatai gausime. Iš tiriamųjų grupės tinkamą skaičių kombinaciją rado 67,06% moksleivių. 8,96% moksleivių nesuprato užduoties arba nevisiškai suprato sąlygą: gavo sandaugą, pasirinkę tik vieną kortelę (pvz.,  $999 \times 99$ ), arba vietoj sandaugos stengėsi rasti skaičių sumą. 20,56% moksleivių surašė skaičius taip, kaip kortelės pateiktos užduotyje, t. y. 1, 2, 3, 4, 5. Skaičių sandaugą teisingai apskaičiavo tik 45,27% moksleivių, 7,16% – padarė smulkia klaidą (skaičiuodami stulpeliu, negerai sudėjo skaičius ( $4935 + 5922$ )). 15,72% moksleivių nemokėjo sudauginti skaičių. Tokią klaidą galima paaiškinti tuo, kad dar ne visi moksleiviai buvo supažindinti su daugyba iš dviženklų skaičių. Atlikdami 5 užduotį „Nežinomą skaičių padaugino iš 4 ir iš gauto rezultato atėmė 159 gavo 629. Sudarykite lygtį ir apskaičiuokite nežinomą skaičių“, teisingai lygtį sudarė 65,87% moksleivių, o neteisingai – 20,7%. Užduotį teisingai išsprendė daugiau nei pusė moksleivių – 54,4%, 4,3% vaikų neteisingai apskaičiavo skaičių sumą ( $629 + 159$ ). 29,5% dalyvavusių olimpiadoje moksleivių nemokėjo spręsti lygties. Kai kurie moksleiviai sprendė šią užduotį nesudarydami lygties. Pagrindinė užduoties sprendimo klaida – moksleiviai nemokėjo sudaryti lygties, nes tokie gebėjimai atitinka tik aukštesniųjų standartų lygmenį. Sprendžiant 6 užduotį „Kaip paprasčiau užrašyti skaitinį reiškinį:  $725 + 135 + 135 + 135 - 94 - 94 - 94 - 94 - 94$ ?“, reikėjo vienodų dėmenų ir atėminių sumas pakeisti sandaugomis. Žemesniųjų gebėjimų lygmens moksleiviams ji buvo per sunki. Sprendžiant šią užduotį, reikėjo pritaikyti skaičiavimo žinias. Gerai užduotį atliko tik trečdalis moksleivių. Vyraavo dviejų rūšių klaidos: moksleiviai nemokėjo supaprastinti reiškinio, klydo, atlikdami veiksmus su triženkliais skaičiais. Pirmąją klaidą galima paaiškinti tuo, kad ugdymo procese nepakankamas dėmesys skiriamas racionalių skaičiavimo įgūdžių formavimui. Antrosios klaidos priežastis – daugybos algoritmo taikymo klaidos. Norėdami išspręsti 7 užduotį „Atėminys padidintas 15 vienetų. Kaip reikia pakeisti turinį, kad skirtumas sumažėtų 20 vienetų?“, moksleiviai turi žinoti veiksmų komponentų pavadinimus ir ryšius tarp jų bei suvokti skirtumo kitimą (keičiantis turiniui ir atėminiui). Šią užduotį gerai atliko tik 9% moksleivių, 45,37% – nesprendė, 45,57% – nežinojo ryšio tarp atėminio, turinio ir skirtumo. Ši užduotis parodė, kad dauguma moksleivių nesuvokia veiksmo komponentų ir nemoka nustatyti tarp jų ryšių. Kai kurie moksleiviai, spręsdami šią užduotį, mėgino apskaičiuoti duotų skaičių sandaugą, sumą arba skirtumą. Bet tai nebuvo sąmoningas užduoties sprendimas, o tik bandymas ją atspėti. Tai parodo, kad mokiniai tik formaliai yra išmokę veiksmų komponentų pavadinimus, o įgytos žinios mažai taikomos

sprendžiant įvairias skaičiavimo užduotis. Sprendžiant 8 užduotį „Raskite didžiausio ir mažiausio penkiaženklį skaičių, kurių visi skaitmenys skirtingi, sumą ir skirtumą“, reikėjo gerai žinoti skaičių eilę bei skaičiaus sandarą. Pirmą skaičių gerai užrašė tik 53,23%, nesprenė užduoties – 22%. 12% moksleivių neatidžiai perskaitė užduoties sąlygą, neišidėmėjo, kad visi skaičių skaitmenys turi būti skirtingi. 1,69% vaikų nežinojo, ką reiškia „penkiaženklis skaičius“. Šią užduotį gerai atliko tie moksleiviai, kurie mokėjo taikyti kombinatorikos žinias, t. y. žinojo, kad didesnę skaičių galima sudaryti iš didžiausių skaitmenų, surašius juos mažėjimo tvarka, o mažiausią – iš mažiausių, surašius juos didėjimo tvarka. Užrašydami antrą skaičių moksleiviai pamiršo 0, todėl neteisingai sudarė mažiausią penkiaženklį skaičių. Skaičių sumą gerai apskaičiavo 20,6% moksleivių, skirtumą – 18%, nors abu skaičius teisingai užrašė 23% moksleivių. Tokio pobūdžio užduočių vadovėliuose nėra, tačiau moksleiviai turėtų gebėti pritaikyti žinias apie skaičių sandarą, numeraciją ir atlikti veiksmus su penkiaženkliais skaičiais. Prasti šios užduoties sprendimo rezultatai rodo, kad dauguma moksleivių neturi racionalaus mąstymo igūdžių. Naudojant vaizdines priemones, moksleiviams turi būti atskleidžiama, kad skaitmens reikšmė keičiasi priklausomai nuo skaitmens vietos, kurią jis užima skaičiuje. Mokant numeracijos, reikia pasiekti, kad moksleiviai gerai suprastų žodžių „skaičius“ ir „skaitmuo“ prasmę ir taisyklingai juos vartotų savo kalboje. Deja, gana dažnai šių skirtumų nesuvokia net patys mokytojai. Atliekant 9 užduotį „Gaukite 100, paimdami: a) penkis trejetus, b) keturis devynetus, c) šešis devynetus“, reikėjo ne tik pritaikyti skaičiavimo žinias, bet ir patiems sudaryti tokius skaitinius reiškinius, kurių rezultatas būtų lygus 100. Ši užduotis reikalauja loginio mąstymo ir mintinio skaičiavimo igūdžių. Kadangi skaičiavimo veiksmai buvo nesudėtingi, galima teigti, kad neišsprendusių užduoties moksleivių loginis mąstymas nepakankamai išvystytas. Jie nesugeba įgytų žinių pritaikyti netradicinėse situacijose. IV klasės vadovėliuose panašių užduočių yra „Matematikos pasaulyje“ tarp olimpiadinių užduočių, o „Skaičių šalyje“ – tarp užduočių stipresniems moksleiviams. 10 užduotis buvo tokia: „Ant stalo buvo sudėtos lėkštės. Iš pradžių buvo paimta  $\frac{1}{3}$  visų lėkščių, po to –  $\frac{1}{2}$  likusių lėkščių. Ant stalo liko 6 lėkštės. Kiek buvo lėkščių iš pradžių?“ Analizuojant sprendimo rezultatus, galima teigti, kad sunkiausias sprendimo etapas – užduoties teksto analizė, jo suvokimas. Šią elementarią užduotį gerai atliko tik 8,96% moksleivių. Tokį žemą rezultatą galima paaiškinti tuo, kad tokios užduotys yra tik tarp olimpiadinių užduočių, pateiktų „Matematikos pasaulyje“. 51% moksleivių nesigilino į užduoties sąlygą, o sprenė ją taip, kaip yra sprendžiami panašūs, vadovėliuose pateikti tiesioginiai skaičiaus dalies radimo uždaviniai. Tokių klaidų nepastebėjo net moksleivių darbus tikrinę mokytojai. Pagrindinė klaida – moksleiviai nesuprato ryšio ir tarpusavio priklausomybės tarp pateiktų užduoties sąlygoje dydžių. Moksleiviai domisi jiems naujais trupmeniniais skaičiais, juose randa savo gyvenimo patirties atspindį. Tačiau, nagrinėjant paprastąsias trupmenas, abstrahavimo ir apibendrinimo procesas turi būti žymiai lėtesnis nei mokant sveikųjų neneigiamų skaičių. Moksleivius būtina vesti per visas iš eilės konkretaus mokymo pakopas. Vaizduojant mokant paprastųjų trupmenų turi būti veiksmingas, t. y. moksleiviai turi naudoti dalijamąją didaktinę medžiagą, kuria operuodami jie gauna įvairaus dydžio dalis ir atlieka su jomis veiksmus, o tik po to veiksmus su trupmeniniais skaičiais. Tačiau dar labai dažnai trupmeninių skaičių mokoma labai formaliai ir moksleiviai nesusidaro reikiamų vaizdinių apie juos. 11 užduotis „Mama davė dukrai 22 m ilgio virvę

ir liepė perkirpti į 2 dalis taip, kad skaičius, išreiškiantis didžiosios dalies ilgį metrais, būtų lygus skaičiui, išreiškiančiam mažesnės dalies ilgį decimetrais. Parašykite abiejų virvės dalių ilgius“ – netradicinė, reikalaujanti loginio mąstymo. Ją sprendžiant nereikia taikyti skaičiavimo žinių ar atlikti aritmetinių veiksmų. Reikia gerai žinoti ilgio matavimo vienetų ir jų sąryšius. Šią užduotį gerai išsprendė 28,46% moksleivių, nesprendė – 28,76%. 42,79% moksleivių padalijo virvę į dvi lygias dalis (11 m ir 11 m). Atlikdami šią užduotį, dauguma moksleivių nusibrėžė atkarpą ir ją dalijo į dvi dalis. Tiems, kurie teisingai suprato užduoties sąlygą, tai padėjo. Kiti paprasčiausiai dalijo atkarpą į dvi lygias dalis. Todėl galima teigti, kad pagrindinė klaidų priežastis buvo ta, kad moksleiviai nesuvokė metrinės matų sistemos bei dviejų gretimų matavimo vienetų santykio matų lentelėje. 12 užduotis „Valgomasis šaukštas sveria 120 g, o trys arbatiniai šaukšteliai sveria tiek, kiek 2 valgomieji šaukštai. Kiek sveria 7 arbatiniai šaukšteliai?“ – aritmetinė tekstinė užduotis, kurioje reikėjo nustatyti proporcijas tarp šaukštelių masės ir jų kiekio. Užduoties tekstą sudaro dvi pagrindinės dalys: sąlyga ir klausimas, į kurių atsakant reikia atlikti tris aritmetinius veiksmus. 78% moksleivių teisingai atliko pirmą veiksmą ir rado, kiek sveria 3 arbatiniai šaukšteliai. Antras sprendimo etapas – vieno arbatinio šaukštelio masės radimas, ir jį gerai atliko 65% moksleivių. Paskutinis veiksmas – daugyba. Padauginę vieno šaukštelio masę iš jų kiekio, gauname atsakymą į užduoties klausimą. Šį veiksmą gerai atliko 61,3% moksleivių. 6,57% moksleivių nesuprato užduoties ir atsitiktinai operavo sąlygoje duotais skaičiais, 6,97% moksleivių net nebandė spręsti. 13 užduotį „Pirmadienį laikrodis rodė tikslų laiką – 8 val. Giedrės laikrodis per 12 valandų užskuba 20 minučių. Kokį laiką rodys Giedrės laikrodis ketvirtadienį 8 val., jeigu Giedrė jo nereguliuos?“ galėjo išspręsti tik tie moksleiviai, kurie moka atlikti veiksmus su laiko matavimo vienetais, moka juos smulkinti ir stambinti; sugeba suprasti matematinės užduoties tekstą. 34,6% moksleivių nerado racionalaus sprendimo, o laiką mėgino apskaičiuoti, pridėdami kas valandą po 20 min. Šioje užduotyje kalbama apie įvykių, vykstantį vienos savaitės ribose. Jis sudarytas iš dviejų dalių (užduočių): įvykio trukmei apskaičiuoti ir įvykio pabaigai apskaičiuoti. Pirmiausia reikėjo suskaičiuoti, kiek dienų praeis nuo pirmadienio iki ketvirtadienio. Dienas gerai apskaičiavo 34% moksleivių. 9,25% moksleivių buvo neatidūs ir suskaičiavo ne 3, o 4 dienas. Dalis mokinių kiekvienai parai pridėjo tik po 20 minučių, t. y. para, jų manymu, trunka tik 12 valandų. Kita elementarioji užduotis – laiko matavimo vienetų stambinimas. Šią užduotį gerai atliko 24,58% moksleivių, 9,25% vaikų manė, kad 120 minučių – tai 1 valanda 20 minučių. Epizodinės pratybos laikui suvokti dažnai būna labai formalios: moksleiviai tik klausosi mokytojo aiškinimo, o juk pagrindinės laiko sąvokos – jo tėkmė, negrižtamumas, periodiškumas – turėtų būti formuojamos panaudojant laikrodžių modelius, sprendžiant įvairias praktines, su vaikų patirtimi susijusias užduotis. Užduoties nesprendė 20,8% dalyvavusių olimpiadoje moksleivių. Tai parodo, kad moksleivių laiko matavimo žinios nėra sistemingos, mažai siejamos su praktine jų patirtimi, nors matematikos vadovėliuose yra pakankamai daug užduočių su laiko matavimo vienetais. 14 užduotį „Vasarą žiogas kiekvieną parą praleido šitaip: 1/2 paros miegojo, 1/6 – šoko, 1/12 – ėdė, o likusi laiką dainavo. Pavaizduokite diagramoje, kiek laiko per parą žiogas skyrė kiekvienai veiklai“ teisingai atliko tie moksleiviai, kurie sugeba apskaičiuoti skaičiaus dalį ir moka duomenis pavaizduoti diagramoje. Teisingų sprendimų buvo tik 57,7%. Užduoties net nebandė spręsti 8,86% moksleivių. Tai rodo, kad ketvirtokai dar neturi

pakankamų vaizdinių apie trupmeninius skaičius, kad pats mokymasis vyko formaliai. Trupmenos sąvoka susidaro palaipsniui, dalijant daiktus į lygias dalis. Paprasčiausių trupmenų veiksmai atliekami ne pagal pateiktas taisykles (kaip tai dažnai daroma), o remiantis samprotavimais, išplaukiančiais iš vaizdaus trupmeninių skaičių supratimo. Įvertinus mokyklose vykusių matematikos olimpiadų rezultatus, kiekvieno dalyvio darbas buvo įvertintas jį mokiūso mokytojo atitinkamu pažymiu. Moksleivių grupėje, kurių matematikos pasiekimų įvertinimas – 10 balų, geriausiai sekėsi spręsti 5, 12 ir 14 užduotis, o 9, 8 ir 7 balų grupėje – 2, 12 ir 14 užduotis. Visos šios užduotys reikalauja pakankamai gerų matematinių žinių ir gebėjimo suprasti matematikos užduoties tekstą; sprendimas – tradicinis, nereikalauja kūrybiškumo. Moksleivių grupėje, kurių matematikos pasiekimų įvertinimas yra 6 balai, geriausiai sekėsi spręsti 2, 4, 5 ir 1 uždavinius. Be to, 4 užduotį geriausiai sekėsi spręsti ir moksleiviams, kurių matematikos įvertinimas tik 5 balai. Šių grupių moksleivių sprendimai buvo originalūs. Žinodami, kad didžiausia sandauga gaunama sudėliojus daugybos veiksmą iš didžiausių skaičių, moksleiviai rinko korteles su tokiais skaitmenimis, kad didžiausi būtų abu daugikliai:  $986 \times 75$ ,  $976 \times 85$  ir kt. Žinoma, šioje moksleivių grupėje buvo nemažai ir visai nepagrįstų sprendimų, pvz.  $123 \times 40$ . 13 užduotį išsprendė tik 24% moksleivių, o moksleivių grupėje, kurių matematikos pasiekimai įvertinti 7 balais, ją atliko net 30,6% moksleivių. Moksleiviai nerašė sprendimų, todėl sunku juos analizuoti. Tikriausiai, laiką moksleiviai apskaičiavo pridėdami po 20 minučių. Visa tai iš dalies patvirtina hipotezę, kad gerai besimokantys moksleiviai remiasi taisyklėmis, griežtais algoritmais, kartu labai pasitikėdami savo jėgomis, mažiau dėmesio skiria užduotims, kurių sprendimai reikalauja pasitelkti kūrybiškumą, laikydami jas lengvomis. Silpniau taisykles mokantiems moksleiviams geriau sekėsi būtent kūrybiškumo reikalaujančios užduotys. Detali užduočių sprendimų analizė parodė, kad matematikos mokymas pradinėse klasėse vis dar labiau orientuotas į žinių nei į praktinių įgūdžių ugdymą. Spręsdami uždavinius mokiniai nesugeba kūrybiškai pritaikyti turimas žinias netipiškose situacijose. Mokant matematikos pradinėse klasėse pagrindinis dėmesys turi būti skiriamas tvirtam tam tikrų vaizdinių, kurių pagrindu vėliau modeliuojamos žinios, gebėjimai ir įgūdžiai, sudarymui.

## SUMMARY

### *D. Kiseliova, A. Kiseliovas. Didactic analysis of the results of solving tasks of school-scale mathematical competitions for fourth formers*

The research has randomly selected 2581 from more than 5000 competition works by fourth formers from Lithuania's all cities and districts. The central and, probably, the most important aim and task of such competitions includes development of primary formers' interest in mathematics, development and improving of their mathematical achievements, knowledge, development of creativity, logical and critical thinking. The relation between pupils' mathematical achievements in schools and their competition results partially proves the hypothesis that well-studying pupils refer to the rules, strict algorithms, in turn, they trust in their capacities, and thus pay less attention to the tasks, the relations of which require involvement of creativity, as they consider them to be easy. Consequently, pupils who knew the rules not so well, showed better results in namely those problems, which required creativity.

*Keywords:* mathematical competition, mathematical achievements, mathematical skills.