

## АСИМПТОТИЧЕСКИЙ ВИД МОМЕНТОВ ПРОЦЕССА ВОСТАНОВЛЕНИЯ

Вайдотас КАНИШАУСКАС (ŠU)

e-mail: mat.kat@fm.su.lt

Пусть на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  задан считающий процесс  $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 1(T_n \leq t)$ ,  $t \geq 0$ , у которого случайные моменты  $X_n = T_n - T_{n-1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , ( $T_0 = 0$ ) независимые и одинаково распределенные. Будем считать, что функция распределения  $F(t) = P(X_1 \leq t)$ ,  $t \geq 0$ , принадлежит классу  $V_\alpha$ ,  $0 \leq \alpha < 1$ , т.е. для нее существует медленно меняющаяся функция  $L(t)$  такая, что  $1 - F(t) \sim t^{-\alpha} L(t)$ , при  $t \rightarrow \infty$ , где  $\sim$  обозначает эквивалентность. Напомню, что для медленно меняющихся функций  $L(t)$  имеет место  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L(xt)}{L(t)} = 1$ ,  $x > 0$ .

По определению

$$L_r(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n^r P(N(t) = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n^r (F_n(t) - F_{n+1}(t)), \quad (1)$$

где  $F_n(t) = P(T_n \leq t)$ ,  $T_n = \sum_{i=1}^n X_i$ .

**ТЕОРЕМА 1.** Пусть  $r \in N_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ , тогда  $L_r(t)$  является решением интегрального уравнения

$$\begin{aligned} L_r(t) - L_r * F(t) &= C_r^1 (-1)^2 L_{r-1}(t) + C_r^2 (-1)^3 L_{r-2}(t) \\ &+ \dots + C_r^2 (-1)^{r-1} L_2(t) + C_r^1 (-1)^r L_1(t) + (-1)^{r+1} F(t), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $L * F(t) = \int_0^t L_r(t-u) dF(u)$ ,  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

*Следствие.* Пусть  $l_r(t) = \frac{dL_r(t)}{dt}$ , а

$$l_r(t) \xrightarrow{L} l_r(p) := \int_0^{\infty} e^{-pt} l_r(t) dt, \quad p \geq 0,$$

трансформация Лапласа для функции  $l_r(t)$ . Тогда  $l_r(p)$  является решением алгебраического уравнения

$$\begin{aligned} l_r(p)(1 - f(p)) &= C_r^1 (-1)^2 l_{r-1}(p) + C_r^2 (-1)^3 l_{r-2}(p) \\ &+ \dots + C_r^2 (-1)^{r-1} l_2(p) + C_r^1 (-1)^r l_1(p) + (-1)^{r+1} f(p), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $f(p) = \int_0^\infty e^{-pt} p(t) dt$ , а  $p(t) = F'(t)$  – функция плотности.

*Доказательство.* Пусть  $r \geq 27$ . Для  $L_r(t)$  применяем формулу

$$(a - b)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Имеем

$$\begin{aligned} L_r(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^r F_n(t) - \sum_{n=1}^{\infty} ((n+1) - 1)^r F_{n+1}(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^r F_n(t) - \sum_{n=2}^{\infty} n^r F_n(t) + C_r^1 (-1)^2 \sum_{n=2}^{\infty} n^{r-1} F_n(t) \\ &\quad + C_r^2 (-1)^3 \sum_{n=2}^{\infty} n^{r-2} F_n(t) + \dots + C_r^2 (-1)^{r-1} \sum_{n=2}^{\infty} n^2 F_n(t) \\ &\quad + C_r^1 (-1)^r \sum_{n=2}^{\infty} n F_n(t) + (-1)^{r+1} \sum_{n=2}^{\infty} F_n(t). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$0 = (1 - 1)^r = (-1)^0 C_r^0 + (-1)^1 C_r^1 + (-1)^2 C_r^2 + \dots + (-1)^{r-1} C_r^{r-1} + (-1)^r C_r^r.$$

В силу этого

$$\begin{aligned} L_r(t) &= C_r^1 (-1)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} F_n(t) + C_r^2 (-1)^3 \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} F_n(t) + \dots \\ &\quad + C_r^2 (-1)^{r-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 F_{n+1}(t) + C_r^1 (-1)^r \sum_{n=1}^{\infty} n F_{n+1}(t) + (-1)^{r+1} \sum_{n=1}^{\infty} F_{n+1}(t). \quad (4) \end{aligned}$$

Символически (4) умножая на  $*F(t)$  получаем

$$\begin{aligned} L_r * F(t) &= C_r^1 (-1)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} F_{n+1}(t) + C_r^2 (-1)^3 \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} F_{n+1}(t) + \dots \\ &\quad + C_r^2 (-1)^{r-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 F_{n+1}(t) + C_r^1 (-1)^r \sum_{n=1}^{\infty} n F_{n+1}(t) + (-1)^{r+1} \sum_{n=1}^{\infty} F_{n+1}(t). \quad (5) \end{aligned}$$

Учитывая (1) из (4) вычитая (5) получаем (2). Заметим, что при  $r = 1$  формула (2) тоже верна и имеет вид

$$L_1(t) - L_1 * F(t) = F(t).$$

Теорема доказана.

Следствие теоремы вытекает из (2) учитывая такие свойства трансформации Лапласа:

$$L_r * F(t) = \int_0^t L_r(t-u)p(u)du = L_r(p)f(p),$$

$$F(t) = \int_0^t p(x)dx \xrightarrow{L} \int_0^\infty e^{-pt} F(t)dt = \frac{f(p)}{p},$$

где  $L_r(p) := \int_0^\infty e^{-pt} L_r(t)dt$ ,  $f(s) = \int_0^\infty e^{-st} p(t)dt$ .

ТЕОРЕМА 2. При  $r \in N_+$  существует предел

$$\lim_{p \rightarrow 0+} l_r(p)(1-f(p))^r = r! \quad (6)$$

*Доказательство.* Используя математическую индукцию докажем аналогичную (6) формулу

$$l_r(p) \sim \frac{r!}{(1-f(p))^r}, \quad p \rightarrow 0+. \quad (7)$$

Пусть  $r = 1$ . Тогда

$$l_1(p) = \frac{f(p)}{1-f(p)} = \frac{1 - p \int_0^\infty e^{-pt}(1-F(t))dt}{1-f(p)} \sim \frac{1}{1-f(p)}, \quad p \rightarrow 0+.$$

Значит (7) верна при  $r = 1$ . Далее делаем предположение, что (7) верна когда вместо  $r$  имеем  $r-1, r-2, \dots, 2, 1$ . Тогда учитывая (3) имеем

$$\begin{aligned} l_r(p)(1-f(p)) &\sim \frac{C_r^1(r-1)!(-1)^2}{(1-f(p))^{r-1}} + \frac{C_r^2(r-2)!(-1)^3}{(1-f(p))^{r-2}} + \dots \\ &+ \frac{C_r^2 2!(-1)^{r-1}}{(1-f(p))^2} + \frac{C_r^1 1!(-1)^r}{1-f(p)} + (-1)^{r+1} f(p) \\ &= (1-f(p))^{1-r} (C_r^1(r-1)!(-1)^2 + C_r^2(r-2)!(-1)^3(1-f(p)) + \dots \\ &+ C_r^2 2!(-1)^{r-1}(1-f(p))^{r-3} + C_r^1(-1)^r(1-f(p))^{r-2} + (-1)^{r+1}(1-f(p))^{r-1}) \\ &\sim \frac{r(r-1)!}{(1-f(p))^{r-1}} = \frac{r!}{(1-f(p))^{r-1}} \quad p \rightarrow 0+. \end{aligned}$$

Здесь воспользовались соотношением

$$1-f(p) = p \int_0^\infty e^{-pt}(1-F(t))dt \rightarrow 0, \quad p \rightarrow 0+.$$

Формула (7) и теорема доказана.

ЛЕММА 1 [1]. Пусть  $F(t) \in V_\alpha$ ,  $0 \leq \alpha < 1$ . Тогда

$$\int_0^\infty e^{-pt} (1 - F(t)) dt \sim p^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha) L(p^{-1}), \quad p \rightarrow 0+.$$

$$1 - f(p) \sim p^\alpha \Gamma(1-\alpha) L(p^{-1}), \quad p \rightarrow 0+, \quad (8)$$

где  $\Gamma(a)$  – Гамма функция.

Для (7) применяя (8) имеем

ТЕОРЕМА 3. Пусть  $r \in N_+$  и  $F(t) \in V_\alpha$ ,  $0 \leq \alpha < 1$ . Тогда

$$l_r(p) \sim r! p^{-\alpha r} \Gamma^{-r}(1-\alpha) L^{-r}(p^{-1}), \quad p \rightarrow 0+.$$

Заметим, что  $L^{-r}(t)$  тоже медленно меняющаяся функция.

ЛЕММА 2 [1]. Пусть  $G(t)$ ,  $t \geq 0$ , – положительная монотонная и непрерывная справа функция, а  $g(p)$  – трансформация Лапласа для  $G'(t)$ . Если

$$g(p) \sim p^{-\beta} L(p^{-1}), \quad p \rightarrow 0+,$$

то

$$G(t) \sim t^\beta \Gamma^{-1}(\beta+1) L(t), \quad t \rightarrow \infty.$$

Имеет место и обратное утверждение.

Учитывая лемму 2 и теорему 3 получаем главный результат работы.

ТЕОРЕМА 4. Пусть  $F(t) \in V_\alpha$ ,  $0 \leq \alpha < 1$ . Тогда

$$L_r(t) \sim r! t^{r\alpha} \Gamma^{-r}(1-\alpha) L^{-r}(t) \Gamma^{-1}(r\alpha+1), \quad t \rightarrow \infty.$$

**Пример.**  $F(t) = 1 - \frac{1}{t^\alpha} L(t)$ ,  $L(t) = 1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}$ ,  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

Тогда

$$L_r(t) \sim \frac{r! t^{\frac{r}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{r}{2} + 1) (1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2})^r}.$$

### Литература

1. J.L. Teugels, Renewal theorems when the first or the second moment is infinite, *The Annals of Mathematical Statistics*, **39**, 1210–1219 (1968).

### REZIUOMĖ

*V. Kaniškauskas. Atstatymo proceso momentų asimptotinis pavidalas*

Darbe gautos atstatymo proceso bet kurios eilės momento integralinės lygtys ir šių momentų asimptotika, kai  $t \rightarrow \infty$ , kada tarpiniai atstatymo momentai neturi baigtinių pirmų momentų.