

Laipsninės-logaritminės eilės begalinio indekso kraštinis Rymano uždavinys pusplokštumei

Petras ALEKNA (ŠU)

el. paštas: mat.kat@fm.su.lt

Spręsimė kraštinių Rymano uždavinį: rasti dalimis analizines ir aprėžtas funkcijas $\Phi^\pm(z) \neq 0$ pusplokštumėse D^\pm , kurių ribinės reikšmės $\Phi^\pm(t)$ realiosios ašies taškuose tenkina kraštinę sąlygą

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad -\infty < t < +\infty, \quad (1)$$

kai duotosios funkcijos $G(t)$, $g(t)$ yra Hiolderio klasės ir tenkina sąlygas:

$$\ln |G(t)|, \quad g(t) \in H[-\infty; \infty]; \quad \ln |G(0)| = g(0) = 0; \quad (2)$$

$$\arg G(t) \in H[-R; R], \quad (3)$$

čia $R > 0$ – pakankamai didelis skaičius;

$$\arg G(t) = \begin{cases} 2\pi\varphi_1(t)|t|^{\rho_1} \ln^{n_1} |t|, & \text{kai } t \leq -R, \\ 2\pi\varphi_2(t)t^{\rho_2} \ln^{n_2} t, & \text{kai } t \geq R, \end{cases} \quad (4)$$

čia $0 < \rho_k \leq \mu_k < 1$, ($k = 1, 2$), n_k – natūralieji skaičiai,

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &\in H_{\mu_1}[-\infty; -R], \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_1(t) = \lambda_1, \\ \varphi_2(t) &\in H_{\mu_2}[R; +\infty], \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_2(t) = \lambda_2, \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Klase $H_{\mu_k}[L_k]$ pažymėta Hiolderio sąlygą tenkinančios funkcijos su Hiolderio rodikliu μ_k nurodytuose intervaluose $L_1 = [-\infty; -R]$ ir $L_2 = [R; +\infty]$. Sprendinių ieškosime aprėžtų analizinių funkcijų klasėje \mathcal{B} ir klasėje $\mathcal{B}_0(\rho, n) \subset \mathcal{B}$.

Klase $\mathcal{B}_0(\rho, n)$ ([1], p. 53) žymėsime dalimis analizinių funkcijų $\Phi^\pm(z)$ klasę, kurioms galioja įvertis

$$|\Phi^\pm(z)| \leq C_\Phi \exp\{-h_\Phi r^{\rho(r)}\}, \quad (6)$$

čia $C_\Phi, h_\Phi > 0$, $\rho = \max(\rho_1, \rho_2)$, $n = \max(n_1, n_2)$,

$$\rho(r) = \max\{\rho_1(r), \rho_2(r)\}, \quad r \in [R, +\infty), \quad \rho_k(r) = \rho_k + n_k \frac{\ln \ln r}{\ln r} \quad (7)$$

yra speciali patikslinta eilė.

$$X^\pm(z) = \exp \left\{ \frac{z}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln G(x) dx}{x(x-z)} \right\}, \quad z \in D^\pm, \quad (8)$$

vadiname (1)–(5) kraštinio Rymano uždavinio kanonine funkcija.

Pasinaudoję P. Jurovo [2] gauta Koši tipo integralo asimptotika ($z \rightarrow \infty$):

$$\begin{aligned} & \frac{z}{2\pi i} \int_a^{+\infty} \frac{\ln^n x}{x^{1-\rho}(x-z)} dx \\ &= -\frac{e^{-i\rho\pi}}{2i \sin \rho\pi} z^\rho \sum_{k=0}^n C_n^k H_k^* \left(e^{-2\pi i\rho} \right) (2\pi i)^k \ln^{n-k} z + Q_{n,\rho}(z), \end{aligned}$$

čia $Q_{n,\rho}(z)$ – analizinė funkcija, $H_k^*(q)$ – Oilerio daugikliai, apibrėžti lygybėmis

$$H_0^*(q) = 1, \quad H_k^*(q) = \frac{1}{(1-q)^k} \sum_{m=1}^k A_{k,m} q^{k+1-m},$$

$k = 1, 2, \dots, n$; $A_{k,m}$ – Oilerio skaičiai, apskaičiuosime kanoninės funkcijos $X^\pm(z)$ apibendrintą indikatorių.

Suformuluosime pagrindinius rezultatus.

1 LEMA. *Galiojant (2)–(5) sąlygoms, funkcija*

$$X_2(z) = \exp \left\{ \frac{z}{2\pi i} \int_R^{+\infty} \frac{\ln G(x) dx}{x(x-z)} \right\}$$

yra analizinė visiems $z \in [R; \infty)$, jos speciali patikslinta eilė yra $\rho_2(r)$ ir jos apibendrintas indikatorių

$$h_{X_2}(\theta) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |X_2(re^{i\theta})|}{r^{\rho_2(r)}} = -\frac{\pi \lambda_2}{\sin \rho_2\pi} \cos \rho_2(\theta - \pi), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (9)$$

2 LEMA. *Galiojant (2)–(5) sąlygoms, funkcija*

$$X_1(z) = \exp \left\{ \frac{z}{2\pi i} \int_{-\infty}^{-R} \frac{\ln G(x) dx}{x(x-z)} \right\}$$

yra analizinė visiems $z \in (-\infty; -R]$, jos speciali patikslinta eilė yra $\rho_1(r)$ ir jos apibendrintas indikatorių

$$h_{X_1}(\theta) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |X_1(re^{i\theta})|}{r^{\rho_1(r)}} = \begin{cases} \frac{\pi \lambda_1}{\sin \rho_1\pi} \cos \rho_1\theta, & \text{kai } 0 \leq \theta \leq \pi, \\ \frac{\pi \lambda_1}{\sin \rho_1\pi} \cos \rho_1(\theta - 2\pi), & \text{kai } \pi \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases} \quad (10)$$

Kanoninės funkcijos $X^\pm(z)$ apibendrintą indikatorių nusako

1 TEOREMA. *Jei patenkintos (2)–(5) uždavinio sąlygos, kiekvienos iš funkcijų $X^+(z)$ ir $X^-(z)$, esant (7) patikslintai eilei, jų apibrėžimo srityse apibendrintas indikatorius nusakomas lygybėmis:*

1) *Jei $\rho_1 > \rho_2$ arba $\rho_1 = \rho_2$, bet $n_1 > n_2$, tai*

$$h_{X^+}(\theta) = \frac{\pi \lambda_1}{\sin \rho_1 \pi} \cos \rho_1 \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

$$h_{X^-}(\theta) = \frac{\pi \lambda_1}{\sin \rho_1 \pi} \cos \rho_1 (\theta - 2\pi), \quad \pi \leq \theta \leq 2\pi;$$

2) *Jei $\rho_2 > \rho_1$ arba $\rho_2 = \rho_1$, bet $n_2 > n_1$, tai*

$$h_{X^\pm}(\theta) = -\frac{\pi \lambda_2}{\sin \rho_2 \pi} \cos \rho_2 (\theta - \pi), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi;$$

3) *Jei $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ ir $n_1 = n_2 = n$, tai*

$$h_{X^+}(\theta) = \frac{\pi \lambda_1}{\sin \rho \pi} \cos \rho \theta - \frac{\pi \lambda_2}{\sin \rho \pi} \cos \rho (\theta - \pi), \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

$$h_{X^-}(\theta) = \frac{\pi \lambda_1}{\sin \rho \pi} \cos \rho (\theta - 2\pi) - \frac{\pi \lambda_2}{\sin \rho \pi} \cos \rho (\theta - \pi), \quad \pi \leq \theta \leq 2\pi.$$

Išsiaiškinsime, kokios turi būti priklausomybės tarp duotųjų dydžių ρ_1, ρ_2, n_1, n_2 ir λ_1, λ_2 , kad homogeninis uždavinys ($g(t) \equiv 0$), esant (2)–(5) sąlygoms, būtų išsprendžiamas klasėje $\mathcal{B}_0(\rho, n)$.

Žinoma ([1], p. 60), kad homogeninio uždavinio sprendinys $\Phi^\pm(z) \in \mathcal{B}_0(\rho, n)$ išreiškiamas formule

$$\Phi^\pm(z) = X^\pm(z)F(z), \quad (11)$$

čia $X^\pm(z)$ yra (8) kanoninė funkcija, $F(z)$ – sveikoji funkcija, kurios patikslinta eilė $\rho_F(r) \leq \rho(r)$.

2 TEOREMA. *Tam, kad laisvinių-logaritminės eilės begalinio indekso homogeninis kraštinis Rymano uždavinys pusplokštumei (1)–(5) būtų išsprendžiamas klasėje $\mathcal{B}_0(\rho, n)$, būtina ir pakankama, kad būtų išpildyta viena iš sąlygų:*

- 1) $\rho_1 > \rho_2$ arba $\rho_1 = \rho_2$, $n_1 > n_2$, ir $\lambda_1 < 0$;
- 2) $\rho_2 > \rho_1$ arba $\rho_2 = \rho_1$, $n_2 > n_1$ ir $\lambda_2 > 0$;
- 3) $0 < \rho_1 = \rho_2 = \rho < \frac{1}{2}$, $n_1 = n_2 = n$ ir $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, $\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\text{sgn} \lambda_k} < \cos \rho \pi$;
- 4) $\frac{1}{2} < \rho_1 = \rho_2 = \rho < 1$, $n_1 = n_2 = n$ ir $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$.

Šios sąlygos gaunamos iš klasės $\mathcal{B}_0(\rho, n)$ apibrėžimo, pareikalavus, kad kanoninės funkcijos $X^\pm(z)$ apibendrintas indikatorius būtų neigiamas. Nehomogeninio kraštinio

Rymano uždavinio (1)–(5) bendrasis sprendinys klasėje \mathcal{B} išreiškiamas formule

$$\Phi^\pm(z) = \Phi_0^\pm(z) + \Psi^\pm(z), \quad (12)$$

kurioje $\Phi_0^\pm(z)$ yra nehomogeninio uždavinio (1)–(5) atskirasis sprendinys, nusakomas formule ([1], p. 108):

$$\Phi_0^\pm(z) = \frac{\Psi_0^\pm(z)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)}{\Psi_0^+(x)(x-z)} dx, \quad (13)$$

čia $\Psi_0^\pm(z) = F_0(z)X^\pm(z)$ yra homogeninio uždavinio atskirasis sprendinys klasėje \mathcal{B} . Norėdami rasti nehomogeninio uždavinio atskirąjį sprendinį $\Phi_0^\pm(z)$, reikia parinkti sveikąją funkciją $F_0(z)$ taip, kad integralas (13) lygybėje konverguotų, homogeninio uždavinio atskirasis sprendinys $\Psi_0^\pm(z) \in \mathcal{B}$ ir sveikosios funkcijos $F_0(z)$ nuliai nebūtų realūs.

3 TEOREMA. *Laispinės-logaritminės eilės plus-begalinio indekso ($\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$) kraštinis Rymano uždavinys pusplokštumei (1)–(5) klasėje \mathcal{B} turi be galo daug sprendinių, išreiškiamų formule*

$$\Phi^\pm(z) = \frac{X^\pm(z)F_0(z)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)dx}{X^+(x)F_0(x)(x-z)} + X^\pm(z)F(z),$$

kurioje $X^\pm(z)$ – (8) kanoninė funkcija, o sveikoji funkcija $F_0(z)$ nusakoma lygybėmis:

$$F_0(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right), \quad \arg z_k = \theta_{F_0} = \frac{1}{\rho} \arccos \frac{\lambda_2 - \lambda_1 \cos \rho\pi}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 \cos \rho\pi}},$$

$|z_k| = r_k$ yra lygties $\Delta_{F_0} r^\rho \ln^n r = k$, $k = 1, 2, \dots$ didžiausioji teigiama šaknis, čia

$$\Delta_{F_0} = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 \cos \rho\pi}$$

yra sveikosios funkcijos $F_0(z)$ nulių išdėstymo spindulyje $\arg z = \theta_{F_0}$ tankis; $F(z)$ – bet kuri sveikoji funkcija eilės $\rho_F \leq \rho$, kuriai realiojoje ašyje teisingas asimptotinis įvertis ($C_F = \text{const}$)

$$\ln |F(t)| \leq \begin{cases} \frac{\pi}{\sin \rho\pi} (\lambda_2 - \lambda_1 \cos \rho\pi) |t|^{\rho(t)} + C_F, & t \rightarrow -\infty; \\ \frac{\pi}{\sin \rho\pi} (\lambda_2 \cos \rho\pi - \lambda_1) |t|^{\rho(t)} + C_F, & t \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Literatūra

1. P. Alekna, *Begalinio indekso kraštinis Rymano uždavinys*, ŠU (2004).
2. М.Г. Юров, Интегралы типа Коши и уравнения в конечных разностях, *Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук*, 3, 67–74 (1967).

SUMMARY

P. Alekna. The boundary Riemann problem of the power-logarithmic order of infinity index for the half-plane

The boundary Riemann problem of the power-logarithmic order of infinity index for the half-plane in the class \mathcal{B} of bounded analytic functions and in the class $\mathcal{B}_0(\rho, n) \subset \mathcal{B}$, is investigated. Also, the necessary and sufficient conditions for the solution of this problem in the class $\mathcal{B}_0(\rho, n)$, are obtained.

Keywords: boundary Riemann problem, infinity index, class \mathcal{B} of bounded analytic functions.