LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
59 t., 2018, 54–60

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

Matematikos olimpiadų pamokos

Juozas Juvencijus Mačys[1], Jurgis Sušinskas[2]

[1] *Vilniaus universitetas, Duomenų mokslo ir skaitmeninių technologijų institutas*
Akademijos 4, LT-08663 Vilnius
[2] *Vilniaus universitetas, Biomedicinos mokslų institutas*
Čiurlionio 21, LT-03101 Vilnius
E. paštas: juozas.macys@mii.vu.lt, jurgis.susinskas@mii.vu.lt

Santrauka. Straipsnyje nagrinėjami keli 2018 m. Lietuvos mokinių ir Vilniaus Universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto matematikos olimpiadų uždaviniai. Lyginami jų sprendimo būdai, pateikiama patarimų, naudingų sprendžiant sunkesnius uždavinius.

Raktiniai žodžiai: olimpiados, uždavinių sprendimas, lygčių sistemos, pirminiai skaičiai, sekos.

Sklandžiai vyko Vilniaus Universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto olimpiada (2018 03 17) ir Lietuvos mokinių matematikos olimpiada (Kuršėnai, 2018 04 20). Organizatoriams pavyko taip parinkti uždavinius, kad neišspręstų uždavinių nebuvo (taip atsitinka anaiptol ne visada), o sunkiausius uždavinius išsprendė tik nugalėtojai. Olimpiadose paaiškėjo pretendentai atstovauti Lietuvai Pasaulinėje mokinių matematikos olimpiadoje IMO liepos mėnesį Rumunijoje.

Panagrinėkime keletą įdomių uždavinių iš abiejų olimpiadų.

1. Lietuvos olimpiada, 11–12 klasės. *Realieji skaičiai* $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ *tenkina tokias sąlygas*:

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_{100} \geqslant 0,$$
$$a_1 + a_2 \leqslant 100,$$
$$a_3 + a_4 + \cdots + a_{100} \leqslant 100.$$

a) *Kam lygi didžiausia galima* $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{100}^2$ *reikšmė?*
b) *Raskite visus skaičių rinkinius* $(a_1, a_2,, \dots, a_{100})$, *su kuriais ji įgyjama.*

Sprendimas. Pirmas būdas (tai oficialus sprendimas iš [1], kur galima rasti visus Lietuvos olimpiados uždavinius). Pažymėkime $a_2 = x$. Tada $x \leqslant a_1 \leqslant 100 - x$ (vadinasi, $0 \leqslant x \leqslant 50$) ir $a_i \leqslant x$ su kiekvienu $i = 3, 4, \dots, 100$. Naudodamiesi nelygybėmis $a_i^2 \leqslant x a_i$ su kiekvienu $i = 3, 4, \dots, 100$, gauname

$$a_3^2 + a_4^2 + \cdots + a_{100}^2 \leqslant x(a_3 + a_4 + \cdots + a_{100}) \leqslant 100x.$$

Be to,

$$a_1^2 + a_2^2 \leqslant (100 - x)^2 + x^2 = 10000 + 2x^2 - 200x.$$

Vadinasi,

$$\begin{aligned} S = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_{100}^2 &\leqslant 10000 + 2x^2 - 200x + 100x \\ &= 10000 + 2x^2 - 100x = 10000 - 2x(50 - x). \end{aligned}$$

Kadangi $0 \leqslant x \leqslant 50$, tai $2x(50 - x) \geqslant 0$. Vadinasi, $S \leqslant 10000$.

Reikšmę 10000 kvadratų suma S įgyja tada ir tik tada, kai $2x(50 - x) = 0$, $a_1 = 100 - x$, $a_i^2 = xa_i$ (čia $i = 3, \ldots, 100$) ir $a_3 + a_4 + \cdots + a_{100} = 100$ (ši sąlyga reikalinga tik tuo atveju, kai $x \neq 0$).

Turime du atvejus: $x = 0$ ir $x = 50$. Pirmuoju atveju, $x = 0$, gauname $a_1 = 100$, $a_2 = x = 0$ ir $a_3 = a_4 = \cdots = a_{100} = 0$. Matome, kad visos reikalingos lygybės galioja. (Lygybė $a_3 + a_4 + \cdots + a_{100} = 100$ čia nereikalinga, nes $x = 0$.) Vadinasi, reikšmę 10000 kvadratų suma S įgyti gali.

Antruoju atveju, $x = 50$, gauname $a_1 = a_2 = 50$, $a_i^2 = 50a_i$ $(i = 3, \ldots, 100)$ ir $a_3 + a_4 + \cdots + a_{100} = 100$. Vadinasi, $a_i \in \{0, 50\}$ su kiekvienu $i = 3, \ldots, 100$. Kadangi $a_3 \geqslant a_4 \geqslant \cdots \geqslant a_{100}$, kiekvienas iš šių skaičių yra lygus arba 50, arba 0, o jų visų suma yra lygi 100, tai vienintelis toks įmanomas rinkinys yra $a_3 = a_4 = 50$, $a_5 = a_6 = \cdots = a_{100} = 0$.

Atsakymas. a) 10000; b) $a_1 = 100$, $a_2 = a_3 = \cdots = a_{100} = 0$ ir $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 50$, $a_5 = a_6 = \cdots = a_{100} = 0$.

Antras būdas. Pirmas būdas – tai nušlifuotas sprendimas, surašytas kuo glausčiau, ir sunku buvo tikėtis, kad juo uždavinį išspręs olimpiadininkai. Antras būdas žymiai vaizdesnis, ir būtent juo uždavinį sprendė olimpiados dalyviai. Pagrindinė būdo idėja – pradėjus nuo bet kurios sekos transformuoti ją taip, kad visų 100 sekos narių kvadratų suma būtų kuo didesnė. Imkime bet kurią uždavinio sąlygas tenkinančią seką $(a_1, a_2 \mid a_3, a_4, \ldots, a_{100})$. Pažymėkime $a_1 + a_2 = A \leqslant 100$, $a_3 + a_4 + \cdots + a_{100} = B \leqslant 100$. Jeigu $A < 100$, tai pirmuosius du narius galima padidinti, padauginus juos iš $\frac{100}{A}$. Tada jų suma taps lygi $A \cdot \frac{100}{A} = 100$, $a_1^2 + a_2^2$ (taigi ir visa kvadratų suma) padidės, seka taip pat tenkins uždavinio sąlygas su $A = 100$. Toliau laikykime, kad $A = 100$.

Pažymėkime naujosios sekos antrąjį narį $a_2 = x$, tada $a_1 = 100 - x$. Kadangi $a_1 \geqslant a_2$, tai $100 - x \geqslant x$, $0 \leqslant x \leqslant 50$. Jeigu $x = 0$, tai vienintelė uždavinio sąlygas tenkinanti seka bus $(100, 0 \mid 0, 0, \ldots, 0)$. Jos narių kvadratų suma lygi 100^2. Ieškokime tokių sekų, kad kvadratų suma būtų nemažesnė, kai $0 < x \leqslant 50$. Imkime seką $(100 - x, x \mid a_3, a_4, \ldots, a_{100})$, tenkinančią uždavinio sąlygas, taigi $x \geqslant a_3 \geqslant a_4 \geqslant \cdots \geqslant a_{100}$. Stenkimės $a_3, a_4, \ldots, a_{100}$ transformuoti taip, kad pradiniai nariai taptų kiek įmanoma didesni. Pavyzdžiui, jeigu $x > a_3$, o $a_{100} > 0$, tai a_3 galima padidinti nario a_{100} sąskaita. Tada jeigu $x - a_3 \geqslant a_{100}$, tai a_3 didiname iki $a_3 + a_{100}$, o a_{100} – mažiname iki nulio. Narių a_3 ir a_{100} suma $(a_3 + a_{100}) + 0$ lieka ta pati, o jų kvadratų suma padidėja: $(a_3 + a_{100})^2 + 0^2 > a_3^2 + a_{100}^2$. Naujoji seka taip pat tenkina uždavinio sąlygą: antras narys ne mažesnis už trečią, nes $a_3 + a_{100} \leqslant x$. Jeigu $x - a_3 < a_{100}$, tai a_3 didiname iki x, o a_{100} mažiname iki $a_{100} - (x - a_3)$. Trečiojo ir šimtojo narių suma $x + a_{100} - (x - a_3) = a_3 + a_{100}$ nepakito, o kvadratų suma padidėjo: $x^2 + (a_{100} - x + a_3)^2 = x^2 + a_{100}^2 + x^2 + a_3^2 - 2xa_{100} + 2a_3a_{100} - 2xa_3 = a_3^2 + a_{100}^2 + 2x(x - a_{100}) - 2a_3(x - a_{100}) = a_3^2 + a_{100}^2 + 2(x - a_{100})(x - a_3) > a_3^2 + a_{100}^2$, nes $x > a_3$. Naujoji seka taip pat tenkina uždavinio sąlygas.

Taigi po tokios operacijos arba vienetu padidėja lygių x narių skaičius, arba vienetu padidėja nulių skaičius (tiksliau sakant, mažiausiai vienetu padidėja iksų ir nulių bendras skaičius). Šią operaciją kartojame, imdami pirmą narį, mažesnį už x, ir paskutinį narį, didesnį už 0, kol įmanoma. Po baigtinio žingsnių skaičiaus visi nariai, pradedant trečiuoju, virs iksais arba nuliais, išskyrus nebent vieną (kuriam nebeatsiras poros). Kitaip sakant, seka atrodys taip: $(100 - x, x \mid x, x, \ldots, x, r, 0, \ldots, 0)$, kur $0 \leqslant r < x$. Žinoma, joje gali nebebūti iksų ar nulių: $(100 - x, x \mid 0, 0, \ldots, 0)$ arba $(100 - x, x \mid r, 0, 0, \ldots, 0)$ arba $(100 - x, x \mid x, x, x, \ldots, x)$ arba $(100-x, x \mid x, x, \ldots, x, r)$. Sekos narių, pradedant trečiuoju, suma $x + x + \cdots + x + r = B, kx + r = B$, kur $k = \frac{B-r}{x}$. Apskaičiuojame kvadratų sumą: $a_3^2 + \cdots + a_{100}^2 = x^2 + x^2 + \cdots + x^2 + r^2 = kx^2 + r^2 = (kx+r)x - rx + r^2 = Bx - r(x-r)$. (Būtent čia slypi pirmojo ir antrojo būdo skirtumas: čia sumą tiesiog suskaičiavome, o ten ją įvertinome: $a_3^2 + \cdots + a_{100}^2 \leqslant xa_3 + \cdots + xa_{100} = x(a_3 + \cdots + a_{100}) = xB$). Vadinasi, transformuotosios sekos visų kvadratų suma lygi $(100-x)^2 + x^2 + Bx - r(x-r) = (100-x)^2 + x^2 + 100x - (100-B)x - r(x-r) = 100^2 - 2x(50-x) - (100-B)x - r(x-r)$. Jau buvome nustatę, kad jeigu $x = 0$, tai kvadratų suma lygi 100^2. Dabar matome, kad kai $B \leqslant 100$, $0 < x \leqslant 50$, kvadratų suma visuomet mažesnė už 100^2, išskyrus atvejį $x = 50$, $B = 100$, $r = 0$, $k \cdot 50 + r = 100$, $k = 2$, t.y. seka bus $(50, 50 \mid 50, 50, 0, 0, \ldots, 0)$. Taigi didžiausia kvadratų suma yra 100^2, ir ją įgyja dvi sekos: $(0, 0 \mid 0, 0, \ldots, 0)$ ir $(50, 50 \mid 50, 50, 0, 0, \ldots, 0)$.

2. VU olimpiada, 11–12 klasės. *Natūralieji skaičiai p, x, y tenkina lygtis: $p + 1 = 2x^2, p^2 + 1 = 2y^2$. Nustatykite visas galimas skaičiaus p reikšmes, jei žinoma, kad šis skaičius pirminis.*

Sprendimas. Pirmas būdas (tai oficialus sprendimas iš [2], kur galima rasti visus VU olimpiados uždavinius). Kadangi $p^2 + 1 > p + 1$, tai $y > x$. Atimkime vieną lygtį iš kitos: $p^2 - p = 2(x + y)(y - x)$. Tada $2(x + y)(y - x)$ dalijasi iš p. Jei $p = 2$, tai $2x^2 = p + 1 = 3$ nėra lyginis skaičius. Todėl $p \neq 2$, ir vienas iš natūraliųjų skaičių $y - x$ bei $x + y$ dalijasi iš pirminio p.

Pirmuoju atveju $y - x \geqslant p$. Tačiau tada $x + y > p$ ir $2(x+y)(y-x) > 2p^2 > p^2 - p$. Todėl $x + y$ dalijasi iš p. Jei $x + y \geqslant 2p$, tai $y \geqslant 2p : 2 = p$ ir $p^2 + 1 = 2y^2 \geqslant 2p^2$. Todėl $x + y < 2p$, ir lieka vienintelė galimybė: $x + y = p$.

Todėl $p^2 - p = 2(y - x)p$, $y - x = \frac{p-1}{2}$, o $4x = 2((x + y) - (y - x)) = p + 1 = 2x^2$. Vadinasi, $x = 2$, $p + 1 = 2x^2 = 8$ ir $p = 7$. Galime rasti ir $y = 5$. Sprendinys $p = 7$, $x = 2$, $y = 5$ tenkina uždavinio sąlygą.

Atsakymas. $p = 7$.

Antras būdas. Nepulkime iš karto „spręsti“, o pasižiūrėkime, ką reiškia uždavinio sąlyga mažiems p. Kai $p = 2$, pirma lygtis virsta $3 = 2x^2$, taigi lygčių sistema sprendinių neturi. Kai $p = 3$, tai ji virsta $4 = 2x^2$, t.y. $x^2 = 2$, taigi vėl sveikųjų sprendinių neturi. Kai $p = 5$, tai $6 = 2x^2$, t.y. $x^2 = 3$ sprendinių neturi. Kai $p = 7$, tai sistema virsta $8 = 2x^2$, $50 = 2y^2$, taigi turi sprendinį $x = 2$, $y = 5$, $p = 7$. Kai $p = 11$, pirma lygtis virsta $12 = 2x^2$, t.y. $x^2 = 6$, ir vėl sprendinių nėra.

Radome sprendinį – jis ne kartą pravers sprendžiant. Negana to, dabar mes galime uždavinį spręsti laikydami, pavyzdžiui, kad $p \geqslant 13$. Beje, galvoje kirba mintis, kad jau atspėjome atsakymą.

Pirmame būde remiantis lygybe $2(x+y)(y-x)=p(p-1)$ iš pradžių buvo įrodyta, kad $x+y$ dalijasi iš p, o tada – kad $x+y=p$. Pasirodo, kad šią lygybę galima įrodyti iš karto. Sudedame abi lygtis: $2x^2+2y^2=p^2+p+2$. Kadangi $x^2+y^2 \geqslant 2xy$, tai

$$x^2+y^2+2xy \leqslant p^2+p+2, \qquad (x+y)^2 \leqslant p^2+2p+1-(p-1) < (p+1)^2.$$

Todėl $x+y<p+1$, o tai reiškia $x+y \leqslant p$. Jeigu $x+y<p$, tai $y-x<p$, ir lygybės kairė pusė nesidalija iš p. Vadinasi, $x+y=p$. Gavome trijų lygčių sistemą

$$\begin{cases} p+1=2x^2, \\ p^2+1=2y^2, \\ x+y=p, \end{cases}$$

iš kurios lengvai randame p. Iš pirmos lygties $p=2x^2-1$, tada iš trečiosios $y=p-x=2x^2-1-x$, ir gautas išraiškas įstatome į antrąją lygtį: $(2x^2-1)^2+1=2[(2x^2-1)-x]^2$, $(2x^2-1)^2+1=2(2x^2-1)^2-4x(2x^2-1)+2x^2$, $(2x^2-1)^2-4x(2x^2-1)+2x^2-1=0$. Dalijame iš $2x^2-1>0$: $2x^2-1-4x+1=0$, $2x^2=4x$, $x=2$. Taigi $p=2x^2-1=7$, $y=p-x=7-2=5$.

Trečias būdas. Įdomiausia, kad galima įrodyti nelygybę $x+y<p$ ($p>7$). Iš pirmos lygties $x=\sqrt{\frac{p+1}{2}}$, iš antros $y=\sqrt{\frac{p^2+1}{2}}$, ir reikia įrodyti, kad

$$\sqrt{\frac{p+1}{2}}+\sqrt{\frac{p^2+1}{2}}<p.$$

Atskiriame radikalus, keliame kvadratu ir sutvarkome: $\sqrt{\frac{p^2+1}{2}}<p-\sqrt{\frac{p+1}{2}}$, $p^2+p>2p\sqrt{2(p+1)}$, $p+1>2\sqrt{2(p+1)}$, $(p+1)^2>8(p+1)$, $p+1>8$, $p>7$.

Galima apsieiti ir be kėlimo kvadratu. Nelygybę perrašome taip:

$$\sqrt{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2p^2}}+\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p^2}}<1.$$

Kadangi kairė pusė mažėja intervale $[7,\infty)$ ir lygi vienetui, kai $p=7$, tai nelygybė įrodyta (pasidžiaukime – vėl pritiko reikšmė $p=7$). Toliau jau kartojamės: kadangi $x+y<p$, tai lygybės $p^2-p=2(x+y)(y-x)$ dešinė pusė nesidalija iš p, – prieštara. Vadinasi, mūsų uždavinys sprendinių neturi, kai $p>7$. Lieka patikrinti pirminius $2,3,5,7$.

3. Lietuvos olimpiada, 9–10 klasės. *Raskite visus realiųjų skaičių trejetus* (x,y,z), *tenkinančius lygčių sistemą*

$$2x=3z+2xy+y, \tag{1}$$
$$2x+y+3z+6xz=0, \tag{2}$$
$$3z=2x+y+3yz. \tag{3}$$

Sprendimas. Pirmas būdas. (Oficialus sprendimas iš [1].) Pažymėję $X=2x$, $Y=-y$ ir $Z=3z$, gauname tokią lygčių sistemą:

$$\begin{cases} XY=Z-X-Y, \\ XZ=Y-X-Z, \\ YZ=X-Y-Z. \end{cases} \tag{4}$$

Atėmę iš pirmos lygties antrąją, gauname $X(Y-Z)=-2(Y-Z)$. Vadinasi, $Y=Z$ arba $X=-2$. Išnagrinėkime abu atvejus.

Tegul $Y=Z$. Iš antrosios lygties gauname $XY=-X$, todėl $X=0$ arba $Y=-1$. Nagrinėkime atvejį $X=0$. Kadangi $Y=Z$, iš trečiosios lygties išplaukia, kad $Y^2=-2Y$, taigi $Y=Z=-2$ arba $Y=Z=0$. Abu sprendiniai $(X,Y,Z)=(0,-2,-2)$ ir $(0,0,0)$ tenkina (4) lygčių sistemą. Kadangi $(x,y,z)=(\frac{X}{2},-Y,\frac{Z}{3})$, tai duotosios lygčių sistemos atitinkami sprendiniai yra $(0,2,-\frac{2}{3})$ ir $(0,0,0)$. Kitu atveju, kai $Y=-1$ ir $Z=Y=-1$, iš trečiosios lygties gauname $1=X+2$, taigi $X=-1$. Akivaizdu, kad sprendinys $(X,Y,Z)=(-1,-1,-1)$ tenkina (4) lygčių sistemą. Atitinkamas duotosios lygčių sistemos sprendinys (x,y,z) yra $(-\frac{1}{2},-1,-\frac{1}{3})$.

Lieka išnagrinėti atvejį $X=2$. Iš pirmosios lygties išplaukia lygybė $Y+Z=-2$, o tuomet iš trečiosios $-YZ=-2-Y-Z=-2+2=0$. Vadinasi, $Y=0$ arba $Z=0$ ir atitinkamai $Z=-2-Y=-2$ arba $Y=-2$. Abu sprendiniai $(X,Y,Z)=(-2,0,-2)$ ir $(-2,-2,0)$ tenkina (4) lygčių sistemą. Juos atitinkantys duotosios lygčių sistemos sprendiniai yra $(-1,0,\frac{2}{3})$ ir $(-1,2,0)$.

Atsakymas. $(x,y,z)=(0,0,0),(0,2,-\frac{2}{3}),\big(-\frac{1}{2},1,-\frac{1}{3}\big),\big(-1,0,-\frac{2}{3}\big),(-1,2,0)$.

Antras būdas. Mokykloje retai sprendžiamos trijų lygčių sistemos su trimis nežinomaisiais. Bet sprendžiant dviejų lygčių sistemą labai dažnas būdas – išsireikšti vieną kintamąjį kitu. Štai ir čia toks būdas visiškai geras. Matome, kad paprasčiausia y išsireikšti iš (2) lygties:

$$y=-2x-3z-6xz. \tag{5}$$

Įstatę šią y išraišką į (1) ir (3) lygtis, gauname dviejų lygčių sistemą su dviem nežinomaisiais:

$$\begin{cases}2x=3z-2x(2x+3z+6xz)-2x-3z-6xz,\\ 3z=2x-2x-3z-6xz=3z(2x+3z+6xz),\end{cases}$$

arba sutvarkius

$$\begin{cases}x(3xz+x+3z+1)=0,\\ z(6xz+4x+3z+2)=0.\end{cases}$$

Šią sistemą galima spręsti įvairiai, bet geriausia pastebėti, kad reiškinį $3xz+x+3z+1$ galima išskaidyti, $3z(x+1)+x+1=(x+1)(3z+1)$. Taigi užtenka nagrinėti 3 atvejus: A) $x=0$, B) $x=-1$, C) $z=-\frac{1}{3}$.

A) atveju $x=0$, antra lygtis virsta $z(3z+2)=0$, taigi $z=0$ arba $z=-\frac{2}{3}$. Iš (5) lygties tada $y=0$ arba $y=2$. Gauname sprendinius $(0,0,0)$ ir$(0,2,-\frac{2}{3})$.

B) atveju $x=-1$, antra lygtis virsta $z(3z+2)=0$, todėl $z=0$ arba $z=-\frac{2}{3}$, ir gauname sprendinius $(-1,2,0)$ ir $(-1,0,-\frac{2}{3})$.

C) atveju $z=-\frac{1}{3}$, antra lygtis virsta $2x+1=0$, tada $x=-\frac{1}{2}$, $y=1$, ir gauname sprendinį $(-\frac{1}{2},1,-\frac{1}{3})$.

Trečias būdas. Spręsdami pirmu būdu, faktiškai iš (1) lygties atėmėme (2) lygtį. Pasirodo, kad mūsų sistema tokia dėkinga spręsti, kad lygtis galima ir sudėti. Sudėję (1) ir (3) lygtis, gauname $y(2+2x+3z)=0$. Jeigu $y=0$, tai (1) ir (2) lygtys duoda sistemą

$$\begin{cases}2x=3z,\\ 2x+3z+6xz=0.\end{cases}$$

Įstatę $x = \frac{3}{2}z$ į jos antrą lygtį, gauname $6z + 9z^2 = 0$, t.y. $z = 0$ arba $z = -\frac{2}{3}$, taigi sprendinius $(0,0,0)$ ir$(-1,0,0)$. Jeigu $y \neq 0$, tai $2 + 2x + 3z = 0$, $x = -1 - \frac{3}{2}z$. Įstatę šią išraišką į (1) ir (2) lygtis, turime $-2 - 3z = 3z - (2+3z)y + y$, $-2 - 3z + y + 3z - 3(2+3z)z = 0$, arba

$$\begin{cases} y - 6z + 3yz - 2 = 0, \\ y - 6z - 9z^2 - 2 = 0. \end{cases}$$

Iš čia $3yz + 9z^2 = 0$. Jeigu $z = 0$, tai $y = 2$, $x = -1$ ir turime sprendinį $(-1,2,0)$. Jeigu $z \neq 0$, tai $z = -\frac{1}{2}y$, tada $y^2 - 3y + 2 = 0$, ir arba $y = 1$, $z = -\frac{1}{3}$, $x = -\frac{1}{2}$, arba $y = 2$, $z = -\frac{2}{3}$, $x = 0$, taigi radome sprendinius $(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{3}), (0, 2, -\frac{2}{3})$.

Ketvirtas būdas. Visuose ankstesniuose būduose mus trikdė nulinės nežinomųjų reikšmės. Todėl verta jas iš karto išskirti. Jei $x = 0$, turime sistemą

$$\begin{cases} 3z + y = 0, \\ y + 3z = 0, \\ 3z = y + 3yz. \end{cases}$$

Kadangi $y = -3z$, tai $3z = -3z - 9z^2$, $3z^2 + 2z = 0$, ir arba $z = 0$, tada $y = 0$, taigi turime sprendinį $(0,0,0)$, arba $z = -\frac{2}{3}$, tada $y = 2$, taigi sprendinys $(0, 2, -\frac{2}{3})$.

Jei $y = 0$, turime sistemą

$$\begin{cases} 2x = 3z, \\ 2x + 3z + 6xz = 0, \\ 3z = 2x, \end{cases}$$

todėl $6z + 9z^2 = 0$, ir arba $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$ (šį sprendinį jau turime), arba $z = -\frac{2}{3}$, tada $x = -1$, ir sprendinys $(-1, 0, -\frac{2}{3})$.

Jei $z = 0$, tai turime sistemą

$$\begin{cases} 2x = 2xy + y, \\ 2x + y = 0, \\ 2x + y = 0. \end{cases}$$

Kadangi $y = -2x$, tai iš pirmos lygties $4x = -4x^2$, $x = 0$ arba $x = -1$. Kai $x = 0$, gauname jau turėtą sprendinį $(0,0,0)$, o jei $x = -1$, tai $y = 2$, ir sprendinys $(-1,2,0)$.

Turime keturis sprendinius $(0,0,0)$, $(0,2,-\frac{2}{3})$, $(-1,0,-\frac{2}{3})$, $(-1,2,0)$ ir žinome, kad kitų sprendinių (jeigu jų yra) nė viena komponentė nelygi nuliui. Sudėkime (2) ir (3) lygtis: $6z + 6xz = 3yz$. Bet $z \neq 0$, todėl $2 + 2x = y$. Sudėkime (1) ir (3) lygtis: $0 = 2xy + 2y + 3yz$. Bet $y \neq 0$, todėl $2x + 2 + 3z = 0$. Vadinasi, patogu y ir z išsireikšti iksu: $y = 2x + 2$, $z = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$. Įstatykime šias išraiškas, pavyzdžiui, į (1) lygtį: $2x = -2x - 2 + 2x(2x+2) + 2x + 2$, $2x^2 + x = 0$. Bet $x \neq 0$, taigi $x = -\frac{1}{2}$, tada $y = 1$, $z = -\frac{1}{3}$. Gavome penktąjį sprendinį $(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{3})$.

Literatūra

[1] A. Dubickas. *2018 metų Lietuvos mokinių matematikos olimpiados uždavinių sąlygos ir sprendimai*, 1–8. http://www.mif.vu.lt/∼dubickas.

[2] *Trečioji Vilniaus Universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto matematikos olimpiada. Sąlygos, atsakymai, sprendimai.* mif.vu.lt/matematikos–olimpiados/.

SUMMARY

On Lithuanian mathematical olympiads

J.J.Mačys, J.Sušinskas

Some problems of Lithuanian school mathematical olympiad 2018 and Vilnius University mathematical olympiad 2018 are considered. Different methods of solution are compared. Some useful common advices for solving mathematical problems are given.

Keywords: olympiads, solving problems, systems of equations, prime numbers, sequencies.