Liet. matem. rink., T. 42, spec. nr., 668–674

Длительная устойчивость цилиндрических оболочек из вязкоупругих композитов

Вацловас СИРЮС (ŠU)
e-mail: vaclovas@ik.su.lt

Структура рациональново армирования конструкции может быть такой, что она будет неоднородной по координатам [1]. Для определения критичестих нагрузок таких конструкций целесообразно применять метод конечных элементов. За последние годы этот метод широко применяется для решения разных задач теории упругости и хорошо разработана методика решения задач устойчивости упругих конструкций методом конечных элементов. Значительно меньше работ по развитию метода конечных элементов применительно к задачам вязкоупругости, которые в основном относятся к деформированию материалов или изгибу разных конструкций. Вопросы устойчивости оболочек с учетом ползучести материала методом конечных элементов мало исследованны. Рассмотрим алгоритм решения задач длительной устойчивости оболочек из композитных материалов методом конечных элементов.

Пусть оболочка из вязкоупругого композита находится под длительным действием нагрузки и материал рассматриаемой оболочки следует линейному закому наследственной ползучести

$$\sigma^{ij}(t) = A^{ijkl}e_{kl}(t) - \int\limits_0^t R^{ijkl}(t-\tau)e_{kl}(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{1}$$

где A^{ijkl} – компоненты тензора упругости композита, $R^{ijkl}(t-\tau)$ – тензор четвертого ранга, компонентами которого являются ядра релаксации материала. Физическое уравнение (1) представим в более компактной записи

$$\sigma^{ij}(t) = \widetilde{A}^{ijkl}(e_{kl}), \tag{2}$$

где линейный оператор $\widetilde{A}^{ijkl}$ определен как интегральный оператор

Вольтерра

$$\widetilde{A}^{ijkl}(\eta_{kl}) = A^{ijkl}\eta_{kl}(t) - \int\limits_0^t R^{ijkl}(t-\tau)\eta_{kl}(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{3}$$

При описании закона изменения перемещений по толщине оболочки примем, что нормальные к срединной поверхности волокна при деформации оболочки изменяют свою длину, остаются прямолинейными, но не перпендикулярными к деформированной срединной поверхности, т.е., при деформации оболочка имеет шесть степеней свободы.

Далее рассмотрим кинематические соотношения и, конечно, элементную формулировку поставленной задачи. Расположим на срединной поверхности оболочки систему криволинейных координат $\{x^\alpha, x^3\}$ с базисом $\{\vec{a}_\alpha, \vec{a}_3\}$ так, чтобы базисный вектор $\vec{a}_3$ был направлен в сторону внешней нормали поверхности и примем, что оболочка по толщине имеет многослойную структуру с кусочно-постоянной жесткостью и перемещения по толщине оболочки для всего пакета слоев в целом распределяются согласно гипотезе типа Тимошенко вида [2]

$$\{u(x^\alpha, t)\} = \{v(x^\alpha, t)\} + z * \{\gamma(x^\alpha, t)\}, \tag{4}$$

где $\{u(x^\alpha, t)\}$ – вектор полных перемещений, $\{v(x^\alpha, t)\} = v^\beta(x^\alpha, t) * \vec{a}_\beta + \omega(x^\alpha, t) * \vec{a}_3$ – вектор перемещений срединной поверхности, $\{\gamma(x^\alpha, t)\} = \gamma^\beta(x^\alpha, t) * \vec{a}_\beta + \gamma(x^\alpha, t) * \vec{a}_3$– вектор поворота и удлинения нормального элемента. Для определения полных деформаций используем соотношение Грина

$$2 * e_{ij}(x^\alpha, t) = u(x^\alpha, t)_{,i} * \vec{g}_j + u(x^\alpha, t)_{,j} * \vec{g}_i + u(x^\alpha, t)_{,i} * u(x^\alpha, t)_{,j}, \tag{5}$$

и выразим с помощью гипотезы (4) трехмерные деформаций (5) через двумерные. В (5) $\vec{g}_i$ – векторы пространственного базиса с метрическим тензором $g_{ij} = \vec{g}_i * \vec{g}_j$. Следуя [2], получаем следующие соотношения для полных деформаций оболочек согласно гипотезе Тимошенко:

$$\begin{aligned} &e_{\lambda\mu}(x^\alpha, t) = \Omega_{\lambda\mu}(x^\alpha, t) + z * \chi_{\lambda\mu}(x^\alpha, t) + z^2 * \phi_{\lambda\mu}(x^\alpha, t), \\ &e_{\lambda 3}(x^\alpha, t) = \Omega_{\lambda 3}(x^\alpha, t) + z * \chi_{\lambda 3}(x^\alpha, t), \\ &e_{33}(x^\alpha, t) = \Omega_{33}(x^\alpha, t). \end{aligned} \tag{6}$$

Выражения здесь использованных двумерных тензоров и векторов можно найти в [2, 3]. Для оболочек с заданным первым $a_{\alpha\beta}$ и вторым $b_{\alpha\beta}$ тензорами поверхности, выражая тензорные компоненты деформаций, искривлений и перемещений через физические, можем записать

$$\{\varepsilon(x^\alpha, t)\} = [L]\{u(x^\alpha, t)\}, \tag{7}$$

где $\{u(x^\alpha,t)\}^\top = \{u(x^\alpha,t), v(x^\alpha,t), \omega(x^\alpha,t), \gamma_1(x^\alpha,t), \gamma_2(x^\alpha,t), \gamma(x^\alpha,t)\}$ – вектор физических компонент обобщенных перемещений, $\{\varepsilon(x^\alpha,t)\}^\top = \{\Omega_{\lambda\mu}(x^\alpha,t), \chi_{\lambda\mu}(x^\alpha,t), \Omega_{\lambda 3}(x^\alpha,t), \chi_{\lambda 3}(x^\alpha,t), \Omega_{33}(x^\alpha,t)\}$ – вектор линейных деформаций, $[L]$ – оператор дифференцирования, элементы которого выражаются через символы Кристоффеля, компоненты первого и второго тензоров поверхности и операторов частного дифференцирования по координатам поверхности. Оболочка разбивается на m конечных элементов. Обозначим вектор обобщенных узловых перемещений элемента $\{q^{(e)}(t)\}$ и полный вектор обобщенных узловых перемещений всей оболочки $\{q(t)\}$. Перемещения внутри элемента выражаются через узловые перемещения с использованием функции формы элемента [3]

$$\{u(x^\alpha,t)\} = [N(x^\alpha)] * \{q^{(e)}(t)\}. \tag{8}$$

Здесь $[N(x^\alpha)]$ – функции формы элемента. Подставляя (8) в (7), получаем линейные кинематические соотношения для конечного элемента

$$\{\varepsilon(x^\alpha,t)\} = [B(x^\alpha)] * \{q^{(e)}(t)\}. \tag{9}$$

Здесь $[B(x^\alpha)]$ – матрица связи деформаций элемента с узловыми перемешчениями. В общем случае элементы матрицы $[B(x^\alpha)]$ содержат частные производные первого порядка функции формы по глобальным координатам оболочки x^α.

Для исследования длительной устойчивости оболочки необходимо сопоставить траектории ее возмущенного и невозмущенного состоыаний [6]. Примем, что оболочка идеальной формы , находящаяся в моментном исходном состоянии, при заданных граничных условиях в момент приложения нагрузки находится в положении равновесия и, из-за ползучих свойств связующего, начинает медленно деформироваться во времени. Это движение принимается за невозмущенное, характеризуемое перемещениями $u_i^{(0)}$, деформациями $e_{ij}^{(0)}$ и напряжениями $\sigma^{(0)ij)}$. Далее в момент времени t^* оболочка получает возмущение, в виде вектора $\{b^0\}$ и переходит в возмущенное состояние, описываемое функциями $u_i(t), e_{ij}(t)$,-$\sigma^{ij}(t)$ и $t \in [t^*, \infty)$.

Уравнение движения выводим, исходя из принципа Гамильтона

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta\Big(\int_V \Big(\varrho\frac{\partial\{u\}}{\partial t} * \frac{\partial}{\partial t}\delta\{u\} - \sigma^{ij}(t) * \delta e_{ij}(t)\Big)\mathrm{d}V + \int_S \{P\} * \delta\{u\}dS\Big)\mathrm{d}t = 0. \tag{10}$$

Здесь $\{u\}^\top = \{u(x^\alpha,t), v(x^\alpha,t), \omega(x^\alpha,t), \gamma_1(x^\alpha,t), \gamma_2(x^\alpha,t), \gamma(x^\alpha,t)\}$ – вектор перемещений, V – обьем оболочки, S – полная граница оболочки, $\{P\}$ – вектор внешних поверхностных сил, ϱ – плотность композита, $\sigma^{ij}(t)$

определяется формулами (1). В условии (10) варьируются перемещения, совместные с геометрическими связями.

Используем равенства

$$\begin{aligned} &u_i(t) = u_i^{(0)} + \delta u_i, \qquad e_{ij}(t) = e_{ij}^{(0)} + e_{ij}^{(1)}(t) + e_{ij}^{(2)}(t), \\ &\sigma^{ij}(t) = \sigma^{(0)ij} + \sigma^{(1)ij}(t) + \sigma^{(2)ij}(t), \end{aligned} \tag{11}$$

в которых индексами (1) и (2) обозначены соответственно линейная и нелинейная составляющие приращений компонент тензоров деформаций и напряжений. Поскольку исходное состояние равновесное, то выполняются условия

$$\delta u_i^{(0)} = 0, \quad \delta e_{ij}^{(0)} = 0, \quad \int\limits_0^{t^*}\int\limits_V \sigma^{(0)ij}(t) * \sigma^{(1)ij}(t)\mathrm{d}V\mathrm{d}t = \int\limits_0^{t^*}\int\limits_S P^i\delta u_i \mathrm{d}S\mathrm{d}t. \tag{12}$$

Подставляя (11) в (10), учитывая (12) и пренебрегая членами третьего и более высоких порядков, получаем уравнение

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \delta L^*\mathrm{d}t = \int\limits_{t_1}^{t_2} (\delta A_1 - \delta A_2 - \delta A_3)\mathrm{d}t, \tag{13}$$

которое описывает движение конечного элемента оболочки. Подставив (8) в первое слагаемое (13) и проинтегририрвав по толщине оболочки с учетом того, что на концах временного интервала узловые перемещения имеют фиксированные значения, получим

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \delta A_1\mathrm{d}t = -\int\limits_{t_1}^{t_2} \delta\{q^{(e)}(t)\}^{\mathrm{T}}[M^{(e)}]\{q^{(e)}(t)\}\mathrm{d}t. \tag{14}$$

Здесь $[M^{(e)}] = \varrho * h * \int_{S_e}[N(x^\alpha)]^{\mathrm{T}}[T_1][N(x^\alpha)]\mathrm{d}S_e$ – матрица масс конечного элемента. Все элементы матрицы $[T_1]$ равны 0, кроме диагональных $T_1(1,1) = T_1(2,2) = T_1(3,3) = 1$, $T_1(4,4) = T_1(5,5) = T_1(6,6) = \frac{h^2}{12}$.

Для тонкой пологой оболочки второе слагаемое из (13) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \int\limits_{t_1}^{t_2} \delta A_2\mathrm{d}t &= -\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{S_e} \left\{\frac{1}{2}\left(\widetilde{N}^{\lambda\mu}\delta\varepsilon_{\lambda\mu}^{(1)} + \widetilde{M}^{\lambda\mu}\delta\chi_{\lambda\mu}^{(1)}\right) + \widetilde{Q}^{\lambda 3}\delta\Omega_{\lambda 3}^{(1)} + \widetilde{M}^{\lambda 3}\delta\chi_{\lambda 3}^{(1)}\right\}\mathrm{d}S_e\mathrm{d}t \\ &= \int\limits_{t_1}^{t_2} \delta\{q(t)\}^{\mathrm{T}} \int\limits_{S_e}[B]^{\mathrm{T}}[\widetilde{D}][B]\mathrm{d}S_e\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{15}$$

В (15) обозначенно

$$\widetilde{N}^{\lambda\mu} = \widetilde{Q}^{\lambda\mu\nu\xi}\varepsilon^{(1)}_{\nu\xi} + \widetilde{B}^{\lambda\mu\nu\xi}\chi^{(1)}_{\nu\xi}, \qquad \widetilde{M}^{\lambda\mu} = \widetilde{B}^{\lambda\mu\nu\xi}\varepsilon^{(1)}_{\nu\xi} + \widetilde{D}^{\lambda\mu\nu\xi}\chi^{(1)}_{\nu\xi},$$
$$\widetilde{Q}^{\lambda 3} = 2 * \widetilde{Q}^{\lambda 3\nu 3}\Omega^{(1)}_{\nu 3} + 2 * \widetilde{B}^{\lambda 3\nu 3}\chi^{(1)}_{\nu 3}, \quad \widetilde{M}^{\lambda 3} = 2 * \widetilde{B}^{\lambda 3\nu 3}\Omega^{(1)}_{\nu 3} + 2 * \widetilde{D}^{\lambda 3\nu 3}\chi^{(1)}_{\nu 3}, \tag{16}$$

и линейные операторы $\widetilde{Q}^{ijkl}$, $\widetilde{B}^{ijkl}$, $\widetilde{D}^{ijkl}$ определяются:

$$\widetilde{Q}^{ijkl} = \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \widetilde{A}^{ijkl}\mathrm{d}z, \quad \widetilde{B}^{ijkl} = \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \widetilde{A}^{ijkl}z\mathrm{d}z, \quad \widetilde{D}^{ijkl} = \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \widetilde{A}^{ijkl}z^2\mathrm{d}z.$$

Элементы матрицы $[\widetilde{D}]$ содержат линейные операторы Вольтерра

$$\widetilde{Q}^{\lambda\mu\nu\xi}, \widetilde{Q}^{\lambda\mu 33}, \ldots, \widetilde{B}^{\lambda\mu\nu\xi}, \widetilde{B}^{\lambda\mu 33}, \ldots, \widetilde{D}^{\lambda\mu\nu\xi}, \widetilde{D}^{\lambda\mu 33}, \ldots.$$

Для третьего слагаемого из (13) получаем выражение

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \delta A_3 \mathrm{d}t = \int\limits_{t_1}^{t_2} \int_{S_e} \{\Theta\}^\top [E^{(0)}] \{\Theta\} \mathrm{d}S_e \mathrm{d}t. \tag{17}$$

Здесь $[E^{(0)}]$ – матрица усилий конечного элемента в невозмущенном состоянии, $\{\Theta\}$ – вектор, составленный из компонент вектора деформаций. В силу линейной зависимости компонент вектора $\{\Theta\}$ от компонент вектора перемещений $\{u\}$ можно записать

$$\{\Theta\} = [R_1]\{u\} = [R_1][N(x^\alpha)]\{q^{(e)}(t)\} = [B_1]\{q^{(e)}(t)\}, \tag{18}$$

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \delta A_3 \mathrm{d}t = \int\limits_{t_1}^{t_2} \delta\{q^{(e)}(t)\}^\top \int\limits_{S_e} [B_1]^\top [E^{(0)}][B_1]\mathrm{d}S_e \{q^{(e)}(t)\}\mathrm{d}t. \tag{19}$$

С учетом формул (14), (15) и (19) уравнение (13) можно записать

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \delta\{q^{(e)}(t)\}^\top \left(\left([K^{(e)}] + [T^{(e)}]\right)\{q^{(e)}(t)\} - [M^{(e)}]\left\{\ddot{q}^{(e)}(t)\right\}\right)\mathrm{d}t = 0. \tag{20}$$

Здесь $[K^{(e)}] = \int_{S_e}[B]^\top[D][B]\mathrm{d}S_e$ – матрица жесткости конечного элемента, $[T^{(e)}] = \int_{S_e}[B_1]^\top[E^{(0)}][B_1]\mathrm{d}S_e$ – матрица инкрементальной жесткости конечного элемента. Ввиду произвольности вариации $\delta\{q^{(e)}(t)\}$ условием выполнения зависимости (13) будет равенство нулю множителей при этих вариациях. С учетом (3) из (20) получаем уравнение

$$\left[K_1^{(e)}\right]\left\{q^{(e)}(t)\right\} - \left[B_1^{(e)}\right]\int\limits_{t^*}^{t}\left[R(t-\tau)\right]\left\{q^{(e)}(\tau)\right\}\mathrm{d}\tau \\ - \left[M^{(e)}\right]\left\{\ddot{q}^{(e)}(t)\right\}\mathrm{d}t = \left\{b^{(0)}\right\}, \qquad (21)$$

которое описывает движение конечного элемента оболочки на бесконечном интервале времени по отношению к возмущениям, характеризующимися $\{b^{(0)}\}$, и $[K_1^{(e)}] = [K^{(e)}] + [T^{(e)}]$, $[B_1^{(e)}] = [B^{(e)}]^{\mathsf{T}}[B^{(e)}]$.

В работе [4] показано, что инерционные члены не влияют на общий характер развития прогибов, т.е., затухающие колебания накладываются на кривую прогибов при загружении оболочки и ее выхлопе. Поэтому при решении задач длительной устойчивости оболочки инерционными членами будем пренебрегать. Проводя суммирование по конечным элементам, окончательно получаем следующую систему линейных интегральных уравнений, которая может быть использована для решения задач длительной устойчивости оболочек с неоднородными по координатам жесткостными свойствами на бесконечном интервале времени по отношению к некоторым возмущениям $\{b^{(0)}\}$

$$([K] + [T])\left\{q(t)\right\} - [B]^{\mathsf{T}}[B]\int\limits_{t^*}^{t}\left[R(t-\tau)\right]\left\{q(\tau)\right\}\mathrm{d}\tau = \left\{b^{(0)}\right\}. \qquad (22)$$

Здесь $[K] = \sum_{e=1}^{m}\int_{S_e}[B]^{\mathsf{T}}[D][B]\mathrm{d}S_e$ – матрица жесткости оболочки, $[T] = \sum_{e=1}^{m}\int_{S_e}[B_1]^{\mathsf{T}}[E^{(0)}][B_1]\mathrm{d}S_e$ – матрица инкрементальной жесткости оболочки. Метод решения системы (22) в случае экспоненциальных ядер релаксации рассмотрен [7]. Перемещения основного докритического движения в интервале $[0, t^*]$ определяются из решения системы (22), которое после аналогических преобразований приводится к виду

$$\left[K^{(0)}\right]\left\{q(t)\right\} - \left[B^{(0)}\right]^{\mathsf{T}}\left[B^{(0)}\right]\int\limits_{0}^{t^*}\left[R(t-\tau)\right]\left\{q(\tau)\right\}\mathrm{d}\tau = \left\{F^{(0)}\right\}, \qquad (23)$$

где $\{F^{(0)}\}$, $\{K^{(0)}\}$ – соответственно вектор эквивалентных узловых усилий и матрица жесткости оболочки в невозмущенном состоянии. Решив систему (23) с граничными условиями

$$\left[K^{(0)}\right]\left\{q(t)\right\}_{t=0} = \left\{F^{(0)}\right\}, \qquad (24)$$

получаем поля перемещений невозмущенного состояния. Далее формируется матрица [T] и оболочка в момент времени $t = t^*$ получает возмущение в виде вектора $\{b^{(0)}\}$. Решение системы линейных интегральных уравнений (24) в интервале $[t^*, \infty]$ с начальными условиями

$$([K] + [T])\{q(t)\}_{t=t^*} = \{b^{(0)}\} \tag{25}$$

описывает изменение перемещений оболочки (в том числе и прогибов) на бесконечном времени по отношению к возмущениям $\{b^{(0)}\}$.

Литература

[1] Г.А. Тетерс, Р.Б. Рикардс, В.А. Нарусберг, *Оптимизация оболочек из слоистых композитов*, Рига (1978).
[2] Р.Б. Рикардс, Г.А. Тетерс, *Устойчивость оболочек из композитных материалов*, Рига (1974).
[3] О. Зенкевич, *Метод конечных элементов в технике*, М. (1975).
[4] А.К. Малмейстер, В.П. Тамуж, Г.А. Тетерс, *Сопротивление полимерных и композитных материалов*, Рига (1980).

Long-term stability of cylindrical shells of viscoelastic composites

V. Sirius

On the grounds of Hamilton's principle the system of linear integral equations has been obtained for the solution of stability problems of cylindrical shells made of viscoelastic composite materials by the finite element method.