

О разрушении периодических решений одной системы нелинейных уравнений Шредингера

Гинтарас ПУРЮШКИС (VU)

e-mail: gintaras.puriuskis@maf.vu.lt

Резюме. Рассматривается система двух нелинейных уравнений Шредингера с нелинейными членами четвертой степени

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = iD^2u_1 + i2|u_1|^2|u_2|^2u_1,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = iD^2u_2 + i|u_1|^4u_2$$

с начальным условием $u_j(0, x) = u_{0j}(x)$, $t > 0$, $x \in (-2, 2)$, $D = \frac{\partial}{\partial x}$. Функции u_j и их производные совпадают в граничных точках $x = -2$ и $x = 2$. Получены условия, при которых решение разрушается.

Ключевые слова: уравнение Шредингера, нелинейная задача, взрыв (коллапс).

В статье [1] получены условия разрушающегося зухения для одного уравнения Шредингера

$$\frac{\partial u}{\partial t} = iD^2u_1 + i|u|^4u.$$

Это уравнение имеет физический смысл, поскольку оно описывает взрыв солитонов [1]. В настоящей статье рассмотрим систему нелинейных уравнений Шредингера

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = iD^2u_1 + i2|u_1|^2|u_2|^2u_1,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = iD^2u_2 + i|u_1|^4u_2, \tag{1}$$

$$u_j(0, x) = u_{0j}(x), \quad t > 0, \quad x \in (-2, 2), \tag{2}$$

$$u_j(t, -2) = u_j(t, 2), \quad Du_j(t, -2) = Du_j(t, 2), \quad \frac{\partial u_j(t, -2)}{\partial t} = \frac{\partial u_j(t, 2)}{\partial t}, \quad t > 0. \tag{3}$$

Здесь $D = \frac{\partial}{\partial x}$. Решение рассматривается в классе $H^1(-2, 2)$. Получены условия, при которых решение разрушается. В настоящей статье используемый метод не применим для уравнений с нелинейными членами

больше четвертой степени, также как в [1] нелинейный член $|u|^4 u$ нельзя заменить на $|u|^p u$, $p > 4$.

Обозначим

$$\Phi(x) = \int_0^x \phi(y) dy,$$

где

$$\phi(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ x - (x - 1)^3, & 1 \leq x < 1 + 1/\sqrt{3}, \\ \text{гладкая}, & 1 + 1/\sqrt{3} \leq x < 2, \\ 0, & 2 \leq x, \end{cases}$$

здесь $\phi'(x) \leq 0$ для $1 + 1/\sqrt{3} \leq x$. Для отрицательных x функцию $\phi(x)$ продолжим $\phi(x) = -\phi(-x)$, $D^j \phi \in L^\infty(R)$, $j = 0, 1, 2, 3$. Функция $\Phi(x)$ удовлетворяет условиям $2\Phi \geq \phi^2$ и $2\Phi \geq 1$ при $1 < |x| < 2$, см. [1]. Отметим, что функция $\Phi(x)$ является четной.

ЛЕММА 1. Пусть $D^j \rho \in L^\infty(-2, 2)$, $j = 1, 2$, $\rho(-2) = \rho(2)$, $u \in H_{prd}^1(-2, 2)$. Тогда справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|\rho u\|_{L^\infty(1 < |x| < 2)} &\leq \sqrt{2} \|u\|_{L^2(1 < |x| < 2)}^{\frac{1}{2}} \left(2 \|\rho^2 Du\|_{L^2(1 < |x| < 2)} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{2} \|\rho^2 u\|_{L^2(1 < |x| < 2)} + \|u D\rho^2\|_{L^2(1 < |x| < 2)} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Доказательство смотри [1]. Обозначим через u_j^* комплексно сопряженную функцию к u_j .

ЛЕММА 2. Для решения задачи (1) – (3) справедливы равенства

$$\begin{aligned} & -\text{Im} \int \phi \sum u_j Du_j^* dx + \text{Im} \int \phi \sum u_{0j} Du_{0j}^* dx \\ &= \int_0^t \left(2 \sum \int D\phi |Du_j(s)|^2 dx - 2 \int D\phi |u_1(s)|^4 |Du_2(s)|^2 dx \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \int \sum D^3 \phi |Du_j(s)|^2 dx \right) ds, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\int \Phi \sum |u_j(t)|^2 dx = \int \Phi \sum |u_{0j}(t)|^2 dx - 2 \int_0^t \left(\text{Im} \int \sum \phi u_j(s) Du_j^*(s) dx \right) ds \quad (5)$$

для $0 \leq t < T$.

Доказательство. Умножим комплексно сопряженное j -е уравнение системы (1) на $D\phi u_j$, просуммируем по j и возьмем вещественную часть

$$-\frac{\partial}{\partial t} \text{Im} \int \sum \phi u_j(t) Du_j^*(t) dx - \text{Im} \int \sum D\phi u_j(t) \frac{\partial u_j^*(t)}{\partial t} dx$$

$$\sum \int D\phi |Du_j(t)|^2 dx + \int D\phi |u_1(t)|^4 |u_2(t)|^2 dx. \quad (6)$$

Умножим j -е уравнение системы (1) на ϕDu_j^* просуммируем по j и возьмем вещественную часть

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \int \sum D\phi u_j(t) \frac{\partial u_j^*(t)}{\partial t} dx &= \sum \int D\phi |Du_j(t)|^2 dx \\ &- \int D\phi |u_1(t)|^4 |u_2(t)|^2 dx - \frac{1}{2} \sum \int D^3\phi |u_j(t)|^2 dx. \end{aligned} \quad (7)$$

Из (6) и (7) следует (4). Для доказательства (5) надо умножить комплексно сопряженное j -е уравнение системы (1) на Φu_j , просуммировать по j и взять мнимую часть. Лемма доказана.

Обозначим

$$E(t) = \sum \|Du_j(t)\|_2^2 - \int |u_1(t)|^4 |u_2(t)|^2 dx.$$

Система (1) удовлетворяет в статье [2] сформулированным условиям:

- 1) $\operatorname{Re}(2i|u_1|^2|u_2|^2 u_1 u_1^* + i|u_1|^4 u_2 u_2^*) = 0$,
- 2) $\frac{\partial(|u_1|^4|u_2|^2)}{\partial u_1^*} = 2|u_1|^2|u_2|^2 u_1$, $\frac{\partial(|u_1|^4|u_2|^2)}{\partial u_2^*} = |u_1|^4 u_2$,
- 3) Функция $f(u_1, u_2, u_1^*, u_2^*) = |u_1|^4|u_2|^2$ является однородной, поэтому $E(t) = E(0) = E_0$.

ЛЕММА 3. Если

$$\|u_j(t)\|_{L^2(1<|x|<2)} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad j = 1, 2, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (8)$$

то

$$\begin{aligned} &-\operatorname{Im} \int \phi \sum u_j Du_j^* dx + \operatorname{Im} \int \phi \sum u_{0j} Du_{0j}^* dx \\ &\leq \left(2E_0 + 80(1+M)^2 \|u_{01}\|_2^4 \|u_{02}\|_2^2 + \frac{M}{2} \sum \|u_{0j}\|_2^2 \right) t, \end{aligned} \quad (9)$$

где $M = \sum_{j=1}^3 \|D^j\phi\|_{L^\infty}$.

Доказательство. Из определения E_0 получаем

$$\sum \|Du_j(t)\|_{L^2(|x|<1)} = E_0 - \sum \|Du_j(t)\|_{L^2(1<|x|<2)} + \int |u_1(t)|^4 |u_2(t)|^2 dx.$$

Далее имеем по лемме 2

$$\begin{aligned}
& -\operatorname{Im} \int \phi \sum u_j Du_j^* dx + \operatorname{Im} \int \phi \sum u_{0j} Du_{0j}^* dx \\
& = \int_0^t \left(2 \sum \int D\phi |Du_j(s)|^2 dx - 2 \int D\phi |u_1(s)|^4 |u_2(s)|^2 dx \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} \int \sum D^3\phi |u_j(s)|^2 dx \right) ds \\
& = \int_0^t \left(2E_0 - 2 \int_{1<|x|<2} \sum (1 - D\phi) |Du_j|^2 dx + 2 \int_{1<|x|<2} (1 - D\phi) |u_1|^4 |u_2|^2 dx \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} \int \sum D^3\phi |u_j(s)|^2 dx \right) ds.
\end{aligned}$$

Обозначим $\rho^4 = 1 - D\phi$, далее оценим

$$\int_{1<|x|<2} (1 - D\phi) |u_1|^4 |u_2|^2 dx \leq \| \rho u_1(t) \|_{L^\infty(1<|x|<2)}^4 \| u_2(t) \|_{L^2(1<|x|<2)}^2.$$

Используя лемму 1, аналогично как в [1] получаем

$$\begin{aligned}
& \int_{1<|x|<2} (1 - D\phi) |u_1|^4 |u_2|^2 dx \leq 32 \| u_1(t) \|_{L^2(1<|x|<2)}^2 \| u_2(t) \|_{L^2(1<|x|<2)}^2 \\
& \quad \times \| \rho^2 Du_1(t) \|_{L^2(1<|x|<2)}^2 + 80(1 + M)^2 \| u_1(t) \|_{L^2(1<|x|<2)}^4 \| u_2(t) \|_{L^2(1<|x|<2)}^2.
\end{aligned}$$

Из условия (8) следует (9). Лемма доказана.

ТЕОРЕМА. Пусть $u_{0j} \in H^1(-2, 2)$,

$$\| u_j(t) \|_{L^2(1<|x|<2)} \leq \frac{1}{4}, \quad j = 1, 2,$$

$$\nu = -2E_0 - 80(1 + M)^2 \| u_{01} \|_2^4 \| u_{02} \|_2^2 - \frac{M}{2} \sum \| u_{0j} \|_2^2 > 0,$$

$$\left(\sum \left(\frac{4}{\nu} \| Du_{0j} \|_2^2 + 1 \right) \int \Phi |u_{0j}(t)|^2 dx \leq \frac{1}{4\sqrt{2}}. \quad (10)$$

Тогда решение задачи (1)–(3) имеет взрыв в некоторый момент времени $T < \infty$, т.е.

$$\sum \| Du_j \|_2 \rightarrow \infty \quad \text{при } t \rightarrow T.$$

Доказательство. Из (5) и (9) следует

$$\int \Phi \sum |u_j(t)|^2 dx \leq \int \Phi \sum |u_{0j}|^2 dx - 2t \operatorname{Im} \int \phi \sum u_{0j} Du_{0j}^* dx - \nu t^2. \quad (11)$$

Далее имеем

$$\int \Phi \sum |u_j(t)|^2 dx \leq -\nu \left(t + \frac{1}{\nu} \operatorname{Im} \int \phi \sum u_{0j} Du_{0j}^* dx \right)^2 + \frac{1}{\nu} \left(\operatorname{Im} \int \phi \sum u_{0j} Du_{0j}^* dx \right)^2 + \int \Phi \sum |u_{0j}|^2 dx \leq \frac{2}{\nu} \sum \| \phi u_{0j} \|_2^2 \| Du_{0j} \|_2^2 + \int \Phi \sum |u_{0j}|^2 dx.$$

Из неравенства $\phi^2 \leq 2\Phi$ и (10) получаем

$$\int \Phi \sum |u_j(t)|^2 dx \leq \sum \left(\frac{4}{\nu} \| Du_{0j} \|_2^2 + 1 \right) \int \Phi |u_{0j}|^2 dx \leq \frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

Из неравенства $1 \leq 2\Phi$ для $1 < |x| < 2$ и (11) получаем

$$\| u_j(t) \|_{L^2(1 < |x| < 2)} \leq \left(2 \int \Phi |u_{0j}|^2 dx \right)^{1/2} \leq \left(2 \int \Phi \sum |u_{0j}|^2 dx \right)^{1/2} \leq \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Доказали неравенство (8), поэтому справедливо неравенство (9) и следовательно (11). В квадратичном трехчлене правой части неравенства (11) коэффициент при t^2 отрицательный, поэтому $\int \Phi \sum |u_j(t)|^2 dx$ обращается в нуль в конечное время $t = T$. Поскольку $\Phi > 0$ кроме $x = 0$, то решение имеет взрыв. Теорема доказана.

Литература

1. Takayoshi Ogawa, Yoshio Tsutsumi, Blow up of solutions for the nonlinear Schrodinger equation with quartic potential and periodic boundary condition, *Lecture Notes in Math.*, **1450**, 236–251 (1990).
2. А. Домаркас, О разрушении решений системы нелинейных уравнений Шредингера, *Liet. matem. rink.*, **35**(2), 181–189 (1995).

REZIUOMĖ

G. Puriuškis. Apie Šredingerio lygčių sistemos periodinio sprendinio sprogimą

Nagrinėjama dviejų Šredingerio lygčių su ketvirtos eilės netiesiniais nariais sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= iD^2 u_1 + i2|u_1|^2 |u_2|^2 u_1, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= iD^2 u_2 + i|u_1|^4 u_2, \end{aligned}$$

$u_j(0, x) = u_{0j}(x)$, $t > 0$, $x \in (-2, 2)$, $D = \frac{\partial}{\partial x}$. Funkcijos u_j ir jų išvestinės sutampa intervalo galuose $x = -2$ ir $x = 2$. Rastos sprendinio sprogimo sąlygos.