Lietuvos matematikos rinkinys. LMD darbai ISSN 0132-2818
**51** tomas, 2010, 16–24 www.mii.lt/LMR/

# Analizinės ir tikimybinės skaičių teorijos tyrimai Šiaulių universitete

**Darius Šiaučiūnas**

*Šiaulių universitetas*
P. Višinskio 19, LT-77156 Šiauliai
E. paštas: siauciunas@fm.su.lt

**Santrauka.** Straipsnyje apžvelgiami analizinės ir tikimybinės skaičių teorijos tyrimai vykdyti Šiaulių universitete.

**Raktiniai žodžiai:** Dirichlė eilutės, dzeta funkcija, multiplikatyvioji funkcija, ribinė teorema, silpnasis konvergavimas, universalumas.

## Multiplikatyviųjų funkcijų reikšmių pasiskirstymas

Pagrindus skaičių teorijai Šiaulių universitete padėjo vienas iš prof. J. Kubiliaus gabiausių mokinių doc. A. Bakštys. Jo svarbiausi darbai yra susieti su multiplikatyviųjų funkcijų pasiskirstymu. Primename, jog $g(m)$, $m \in \mathbb{N}$, yra vadinama multiplikatyviąja funkcija, jei $g(1) = 1$ ir $g(mn) = g(m)g(n)$ su visais $(m, n) = 1$.

Pirmuosius tikimybinius rezultatus multiplikatyviosioms funkcijoms gavo P. Erdiošas (Erdös) (1946). Tegul $P_n$, $n \in \mathbb{N}$ ir $P$ yra tikimybiniai matai erdvėje $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ($\mathcal{B}(S)$ yra erdvės $S$ Borelio aibių klasė). Sakome, kad tikimybinis matas $P_n$, kai $n \to \infty$, konverguoja $m$-silpnai į tikimybinį matą $P$, jeigu tikimybinis matas $P_n$ konverguoja silpnai į tikimybinį matą $P$ ir $P_n(\{0\}) \to P(\{0\})$. Tegul

$$\nu_n(\dots) = \frac{1}{n}\#\{1 \leqslant m \leqslant n\colon \dots\},$$

čia vietoje daugtaškio rašoma sąlyga, kurią tenkina $m$. Be to, tegul

$$\|u\| = \begin{cases} u, & \text{jei } |u| \leqslant 1, \\ 1, & \text{jei } u > 1. \end{cases}$$

Tuomet P. Erdiošas [4] įrodė, kad jei $g(m) \geqslant 0$ yra multiplikatyvioji funkcija, tai dažniai

$$\nu_n(g(m) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

kai $n \to \infty$, konverguoja $m$-silpnai į kurį nors matą $P$ erdvėje $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $P(\{0\}) \neq 1$, tada ir tik tada, kai eilutės

$$\sum_p \frac{\|g(p) - 1\|}{p}, \qquad \sum_p \frac{\|g(p) - 1\|^2}{p} \tag{1}$$

konverguoja.

Pirmuosius rezultatus bet kokio ženklo multiplikatyviosioms funkcijoms gavo A. Bakštys (1968). Primename, jog matas $P$ erdvėje $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ yra vadinamas simetriniu, jeigu su kuriuo nors $a \in \mathbb{R}$

$$P(-\infty, a) = 1 - P(-\infty, -a].$$

**1 teorema.** (*Žr.* [1].) *Tarkime, jog $g(m)$ yra realioji multiplikatyvioji funkcija. Tuomet*

$$\nu_n(g(m) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

*kai $n \to \infty$ konverguoja $m$-silpnai į kurį nors nesimetrinį tikimybinį matą $P$ erdvėje $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tada ir tik tada, kai* (1) *eilutės ir eilutė*

$$\sum_{g(p)<0} \frac{1}{p}$$

*konverguoja, ir $\exists \alpha \in \mathbb{N}$, kad $g(2^\alpha) \neq -1$.*

A. Bakštys taip pat gavo bendresnius rezultatus, nagrinėdamas $m$-silpnąjį dažnių

$$\nu_n\Big(\big|e^{-A(m)} g(m)\big|^{1/B(n)} \operatorname{sgn} g(m) \in A\Big), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

konvergavimą, su normuojančiomis konstantomis $A(n)$ ir $B(n) > 0$.

Ilgą laiką A. Bakštys vedė skaičių teorijos seminarą.

## Dabartinių tyrimų kryptys

Nuo 1998 metų prasidėjo analizinės skaičių teorijos tyrimai. Buvo atnaujintas skaičių teorijos seminaras, kuris veikia iki šiol. Pagrindinė tyrimų kryptis – dzeta ir $L$-funkcijos. Primename, kad dzeta ir $L$-funkcijomis yra vadinamos kompleksinio kintamojo $s = \sigma + it$ funkcijos, kurioje nors pusplokštumėje apibrėžiamos Dirichlė eilutėmis

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s} \quad \text{arba bendriau} \quad \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\lambda_m s}$$

ir naudojamos skaičių teorijoje. Kitaip tariant, jos yra Rymano dzeta funkcijos

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}, \quad \sigma > 1,$$

įvairūs apibendrinimai.

Tyrimuose ryškios 3 kryptys: ribinės teoremos dzeta funkcijoms įvairiose erdvėse, universalumas ir jo išvados, momentai.

## Ribinės teoremos

Pirmąsias tikimybinio pobūdžio ribines teoremas 1930, 1932 m. Rymano dzeta funkcijai gavo H. Boras (Bohr) ir B. Jesenas (Jessen). Tarkime, jog $R$ yra stačiakampis kompleksinėje plokštumoje su kraštinėmis, lygiagrečiomis ašims. Savo darbe [2] jie įrodė jog su kiekvienu fiksuotu $\sigma > 1$ egzistuoja riba

$$\lim_{T\to\infty} \frac{m_{\check{Z}}\{t \in [0,T]\colon\ \log\zeta(\sigma+it) \in R\}}{T}.$$

Čia $m_{\check{Z}}$ yra Žordano matas kompleksinėje plokštumoje. 1932 m. rezultatą jie išplėtė [3] į sritį $\sigma > \frac{1}{2}$, darydami plokštumos įpjovas pagal funkcijos $\zeta(s)$ galimus nulius.

Boro ir Jesseno teoremos primena ribines teoremas silpnojo tikimybinių matų konvergavimo prasme, kurio teorija buvo sukurta praėjusio amžiaus 5–6 dešimtmetyje. Boro-Jeseno tyrimus tęsė A. Vintneris (Wintner), A. Selbergas (Selberg), P.D.T.A. Elijotas (Elliott) D. Džoineris (Joyner), K. Matsumoto, B. Bagčis (Bagchi), A. Laurinčikas ir kt.

Pirmąsias ribines teoremas dzeta funkcijoms Šiaulių universitete įrodė R. Kačinskaitė. Ji nagrinėjo Matsumoto dzeta funkciją, kurią 1990 m. apibrėžė [23] japonų matematikas K. Matsumoto. Ši funkcija yra apibrėžiama polinomine Oilerio sandauga pagal pirminius skaičius

$$\varphi(s) = \prod_{m=1}^{\infty} A_j^{-1}\bigl(p_m^{-1}\bigr).$$

Čia

$$A_j(x) = \prod_{k=1}^{g(m)} \bigl(1 - a_{mk}^{(j)} x^{f(j,m)}\bigr),$$

$g(m)$, $f(j,m) \in \mathbb{N}$, o $p_m$ žymi $m$-tąjį pirminį skaičių.

Minėtame straipsnyje K. Matsumoto įrodė Boro-Jeseno tipo rezultatus funkcijai $\varphi(s)$ reikalaudamas, kad su neneigiamomis konstantomis $c$, $\alpha$, $\beta$ galiotų nelygybės

$$g(m) \leqslant cp_m^{\alpha}, \qquad \bigl|a_m^{(j)}\bigr| \leqslant p_m^{\beta}. \tag{2}$$

Tuomet begalinė sandauga, apibrėžianti funkciją $\varphi(s)$, konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > \alpha+\beta+1$. Be to, jis reikalavo, kad funkcija $\varphi(s)$ būtų meromorfiškai pratęsiama į sritį $\sigma > \alpha+\beta+\frac{1}{2}$.

Ribines teoremas apie matų

$$\frac{1}{T}\bigl\{t \in [0,T]\colon \varphi(\sigma+it) \in A\bigr\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$
$$\frac{1}{T}\bigl\{\tau \in [0,T]\colon \varphi(s+i\tau) \in A\bigr\}, \quad A \in \mathcal{B}(M(D)),$$

silpnąjį konvergavimą [14] įrodė A. Laurinčikas. Čia $\mathcal{B}(S)$yra erdvės $S$ Borelio aibių klasė, $D = \{s \in \mathbb{C}\colon \sigma > \alpha+\beta+\frac{1}{2}\}$, o $M(D)$ yra meromorfinių srityje $D$ funkcijų erdvė su tolygaus konvergavimo ant kompaktų topologija.

R. Kačinskaitė įrodė diskrečiąsias ribines teoremas įvairiose erdvėse funkcijai $\varphi(s)$. Šiuo atveju yra nagrinėjami tikimybiniai matai, apibrėžiami ne postūmių $\varphi(\sigma+it)$ ir $\varphi(s+i\tau)$ pagalba, o postūmiais $\varphi(\sigma+imh)$ ir $\varphi(s+imh)$, su fiksuotu $h>0$ ir $m = 0,1,2,\dots$. Suformuluosime papraščiausią ribinę teoremą kompleksinėje plokštumoje. Tegul

$$\varOmega = \prod_p \gamma_p, \quad \gamma_p = \bigl\{s \in \mathbb{C}\colon |s| = 1\bigr\},$$

su visais pirminiais $p$. Su sandaugos topologija ir pataškine daugyba, toras $\Omega$ yra kompaktinė topologinė Abelio grupė, todėl erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ galime apibrėžti tikimybinį Haro matą $m_H$. Gauname tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Šioje erdvėje apibrėžkime $\mathbb{C}$-reikšmį atsitiktinį elementą

$$\varphi(\sigma, \omega) = \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{g(m)} \left(1 - \frac{\omega^{f(j,m)}(p_m) a_m^{(j)}}{p_m^{\sigma f(j,m)}}\right)^{-1}.$$

Čia $\omega(p)$ yra elemento $\omega \in \Omega$ projekcija į koordinatinę erdvę $\gamma_p$.

**2 teorema.** (*Žr.* [11]). *Tarkime, jog galioja* (2) *įverčiai, funkcija $\varphi(s)$ yra meromorfiškai pratęsiama į sritį $\sigma > \alpha+\beta+\frac{1}{2}$ ir šioje srityje galioja įverčiai $\varphi(\sigma+it) = O(|t|^a)$, $a > 0$, $|t| \geqslant t_0 > 0$ ir*

$$\int_0^T \left|\varphi(\sigma + it)\right|^2 dt = O(T).$$

*Tegul $\sigma > \alpha + \beta + \frac{1}{2}$. Tuomet tikimybinis matas*

$$\frac{1}{N+1} \#\left\{0 \leqslant m \leqslant N\colon \varphi(\sigma + it) \in A\right\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

*kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento $\varphi(\sigma, \omega)$ skirstinį.*

R. Šleževičienė įrodė daugiamates ribines teoremas tiek Rymano dzeta funkcijai [25], tiek ir Hurvico dzeta funkcijai $\zeta(s, \alpha)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, kuri pusplokštumėje $\sigma > 1$ apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m + \alpha)^s}$$

ir yra meromorfiškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą su vieninteliu poliumi taške $s = 1$.

J. Genys nagrinėjo bendrųjų Dirichlė eilučių

$$f(s) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\lambda_m s}, \quad \sigma > \sigma_0,$$

čia $a_m \in \mathbb{C}$, o $\{\lambda_m\}$ yra didėjanti realiųjų skaičių seka, $\lim_{m\to\infty} = +\infty$, reikšmių pasiskirstymą. Jis kartu su A. Laurinčiku [8] išplėtė A. Laurinčiko, W. Schwarz'o ir J. Steuding'o rezultatus platesnei bendrųjų Dirichlė eilučių klasei vietoje aibės $\{\log 2\} \cup_{m=1}^{\infty} \{\lambda_m\}$ tiesinio nepriklausomumo apsiribodami tik aibės $\{\lambda_m\}$ tiesiniu nepriklausomumu virš $\mathbb{Q}$.

R. Macaitienė pradėjo įrodinėti diskrečiąsias ribines teoremas bendrosioms Dirichlė eilutėms. Dirichlė eilučių atveju ribinis atsitiktinis elementas apibrėžiamas kiek kitaip. Yra nagrinėjamas toras

$$\hat{\Omega} = \prod_{m=1}^{\infty} \gamma_m, \quad \gamma_m = \left\{s \in \mathbb{C}\colon |s| = 1\right\},$$

su visais $m \in \mathbb{N}$. Panašiu būdu, kaip ir Matsumoto funkcijos atveju yra gaunama tikimybinė erdvė $(\hat{\Omega}, \mathcal{B}(\hat{\Omega}), \hat{m}_H)$ su Haro matu $\hat{m}_H$. Tegul $\hat{\omega}(m)$ yra elemento $\hat{\omega} \in \hat{\Omega}$ projekcija į koordinatinę erdvę $\gamma_m$. Tarkime, jog funkcija $f(s)$ yra meromorfiškai pratęsiama į pusplokštumę $\sigma > \sigma_1$, $\sigma_1 < \sigma_0$, ir šioje srityje galioja įverčiai

$$f(\sigma + it) = O\big(|t|^a\big), \quad a > 0,\ |t| \geqslant t_0 > 0,$$

ir

$$\int_0^T \big|f(\sigma + it)\big|^2\, dt = O(T), \quad T \to \infty.$$

Tegul $D_1 = \{s \in \mathbb{C}\colon \sigma > \sigma_1\}$. Tikimybinėje erdvėje $(\hat{\Omega}, \mathcal{B}(\hat{\Omega}), \hat{m}_H)$ apibrėžiame $H(D_1)$-reikšmį atsitiktinį elementą ($H(D_1)$ yra analizinių srityje $D_1$ funkcijų erdvė su tolygaus konvergavimo ant kompaktų topologija)

$$f(s, \hat{\omega}) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \hat{\omega}(m) e^{-\lambda_m s}.$$

**3 teorema.** (*Žr.* [21]). *Tarkime, jog funkcija $f$ tenkina visas anksčiau minėtas sąlygas, o rodiklių sistema $\{\lambda_m\}$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$. Tuomet*

$$\frac{1}{N+1}\#\big\{0 \leqslant m \leqslant N\colon f(\sigma + it) \in A\big\}, \quad A \in \mathcal{B}\big(M(D_1)\big),$$

*kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento $f(\sigma, \hat{\omega})$ skirstinį.*

Pastaruoju metu J. Genys ir A. Laurinčikas pradėjo įrodinėti ribines teoremas su svoriu bendrosioms Dirichlė eilutėms [9] ir [10].

V. Garbaliauskienė nagrinėjo tiek tolydžiąsias [6], tiek diskrečiąsias [5] ribines teoremas elipsinių kreivių $L$-funkcijoms. Tarkime, kad elipsinė kreivė $E$ yra duota Vejerštraso lygtimi

$$y^2 = x^3 + ax + b, \quad a, b \in \mathbb{Z}.$$

Tegul jos diskriminantas $\Delta \neq 0$. Su kiekvienu pirminiu $p$, $\nu(p)$ tegul yra lyginio

$$y^2 \equiv x^3 + ax + b (\mathrm{mod}\ p)$$

sprendinių skaičius. Tegul

$$\lambda(p) = p - \nu(p).$$

Hasse įrodė, jog $|\lambda(p)| \leqslant 2\sqrt{p}$. Elipsinės kreivės $L$-funkcija $L_E(s)$ pusplokštumėje $\sigma > \frac{3}{2}$ yra apibrėžiama Oilerio sandauga

$$L_E(s) = \prod_{p \mid \Delta} \left(1 - \frac{\lambda(p)}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p \nmid \Delta} \left(1 - \frac{\lambda(p)}{p^s} + \frac{1}{p^{2s-1}}\right)^{-1}.$$

Ji yra analiziškai pratęsiama iki sveikosios funkcijos ir suvaidino svarbų vaidmenį paskutiniosios Ferma problemos įrodyme.

Tegul $\lambda \in \mathbb{R}$ ir $0 < \alpha \leqslant 1$. Lercho dzeta funkcija $L(\lambda, \alpha, s)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama eilute

$$L(\lambda, \alpha, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda m}}{(m + \alpha)^s}.$$

D. Genienė su bendraautoriais [7] įrodė ribines teoremas funkcijai $L(\lambda, \alpha, s)$ su algebriniu iracionaliuoju parametru $\alpha$. Tai yra pats sudėtingiausias atvejis. Paprasčiausias atvejis yra transcendenčiojo $\alpha$, šiek tie sudėtingesnis yra racionalaus $\alpha$ atvejis. Šiais atvejais ribines teoremas funkcijai $L(\lambda, \alpha, s)$ yra įrodę R. Garunkštis ir A. Laurinčikas [15].

Algebrinio iracionalaus $\alpha$ atvejis yra sudėtingas todėl, kad nėra tikslios informacijos apie aibės

$$L(\alpha) = \left\{ \log(m + \alpha) \colon m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}$$

tiesinį nepriklausomumą virš $\mathbb{Q}$. D. Genienė rėmėsi Cassels'o rezultatu, kad bent 51% aibės $L(\alpha)$ elementų yra tiesiškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$.

R. Macaitienė su A. Laurinčiku [16] įrodė ribines teoremas Estermano dzeta funkcijai.

Doktorantė A. Kolupayeva [13] nagrinėjo ribines teoremas parabolinių formų $L$-funkcijų sąsūkoms su Dirichlė charakteriais, kai charakterio modulis neaprėžtai auga.

## Universalumas

Su ribinėmis teoremomis analizinių funkcijų erdvėje yra glaudžiai susijęs dzeta funkcijų universalumas. Primename, jog Rymano dzeta funkcijos $\zeta(s)$ universalumą 1975 m. atrado Voroninas. Dabartinis jo teoremos variantas yra toks.

**4 teorema.** *Tegul $K$ yra kompaktinė juostos $D = \{s \in \mathbb{C} \colon \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$ aibė, turinti jungųjį papildinį, o funkcija $f(s)$ yra tolydi ir nelygi nuliui aibėje $K$, ir analizinė jos viduje. Tuomet, su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T \to \infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas} \left\{ \tau \in [0, T] \colon \left| \zeta(s + i\tau) - f(s) \right| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Grubiai kalbant, tai reiškia, jog kiekvieną analizinę funkciją tolygiai juostos $D$ kompaktinėse aibėse galima aproksimuoti postūmiais $\zeta(s + it)$.

Galimas ir diskretusis universalumas, kai analizinės funkcijos yra aproksimuojamos postūmiais $\zeta(s + imh)$, $h > 0$, $m \in \mathbb{N}_0$.

R. Kačinskaitė su A. Laurinčiku [12] gavo Matsumoto dzeta funkcijos diskretųjį universalumą.

R. Macaitienė [22] įrodė įvairių bendrųjų Dirichlė eilučių klasių diskretųjį universalumą, gavo [17] periodinių Hurvico dzeta funkcijų

$$\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(m + \alpha)^s}, \quad \sigma > 1,$$

$\mathfrak{a} = \{a_m\}$ yra periodinė kompleksinių skaičių seka, diskretųjį universalumą.

D. Šiaučiūnas su A. Laurinčiku [19] išnagrinėjo periodinės dzeta funkcijos

$$\zeta(s; \mathfrak{a}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s}, \quad \sigma > 1,$$

universalumą, kai periodinė kompleksinių skaičių seka $\mathfrak{a} = \{a_m\}$ yra multiplikatyvioji ($a_1 = 1$, $a_{mn} = a_m a_n$, kai $(m, n) = 1$).

V. Garbaliauskienės daktaro disertacija yra skirta elipsinių kreivių $L$-funkcijų įvairių tipų universalumui.

## Momentai

Momentų problema yra svarbi dzeta funkcijų teorijoje. Jie įvairiose taikymuose dažnai pakeičia individualiąsias tų funkcijų reikšmes, kurias apskaičiuoti yra gana sudėtinga. Pavyzdžiui, Rymano dzeta funkcijos atveju yra žinoma hipotezė, jog

$$\int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^{2k} dt \sim c_k T(\log T)^2, \quad T \to \infty,$$

kuri yra įrodyta tik 3 atvejais:

$$k=1, \qquad c_1 = 1, \quad (\text{Hardy, 1918}),$$
$$k=2, \qquad c_2 = \frac{1}{2\pi^2}, \quad (\text{Ingham}, 1924),$$
$$k = c(\log\log T)^{-\frac{1}{2}}, \quad c>0,\ c_k = 1, \quad (\text{A. Laurinčikas, 1996}).$$

Momentų problema yra susijusi su Lindeliofo hipoteze, kuri tvirtina, jog su kiekvienu $\varepsilon > 0$ yra teisingas įvertis

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) = O_\varepsilon\big(t^\varepsilon\big), \quad t \geqslant t_0 > 0.$$

Lindeliofo hipotezė yra ekvivalenti įverčiui: su kiekvienu $\varepsilon > 0$

$$\int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^{2k} dt = O\big(T^{1+\varepsilon}\big), \quad k \in \mathbb{N}.$$

D. Šiaučiūnas [18] gavo funkcijos $\zeta(s;\mathfrak{a})$ antrojo momento asimptotinę formulę

$$\int_0^T \big|\zeta(\sigma+it;\mathfrak{a})\big|^2 dt = \frac{T}{k^{2\sigma}} \sum_{q=1}^{k} |a_q|^2 \zeta\left(2\sigma, \frac{q}{k}\right) + BC(\sigma)k^{2-2\sigma}K(k)T^{2-2\sigma},$$

čia $K(k) = \sum_{q=1}^{k} |a_q|^2$, $C(\sigma) = \max((2\sigma-1)^{-1}, (1-\sigma)^{-1})$, o $B$ yra dydis aprėžtas konstanta, įrodė šios funkcijos ketvirtojo momento įverčius. Jis kartu su A. Laurinčiku [20] gavo funkcijos

$$\zeta_\lambda(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\lambda m}}{m^s}, \quad \sigma > 1,$$

ketvirto momento asimptotinę formulę, kai $\lambda$ yra iracionalusis skaičius juostoje $\frac{1}{2} < \sigma < 1$, bei juostoje $\frac{3}{4} < \sigma < 1$, kai $\lambda$ yra racionalusis skaičius.

S. Zamarys [24] gavo normuotos parabolinių formų dzeta funkcijos momentų asimptotines formules.

## Apgintos disertacijos, organizuotos konferencijos

Nuo 1998 m. vykstantys analizinės skaičių teorijos tyrinėjimai Šiaulių universitete netruko duoti savo vaisių. Vadovaujant prof. A. Laurinčikui, šių tyrinėjimų pagrindu buvo apgintos šios daktaro disertacijos Nuo 1998 m. vykstantys analizinės skaičių teorijos tyrinėjimai Šiaulių universitete netruko duoti savo vaisių. Vadovaujant prof. A. Laurinčikui, šių tyrinėjimų pagrindu buvo apgintos šios daktaro disertacijos

1. Roma Kačinskaitė, Discrete limit theorems for the Matsumoto zeta functions, (2002);
2. Rasa Šleževičienė, Joint limit theorems and universality for the Riemann and allied zeta functions, (2002);
3. Darius Šiaučiūnas, The investigations of the periodic zeta-function, (2004),
4. Jonas Genys, Limit theorems and joint universality for general Dirichlet series, (2005);
5. Virginija Garbaliauskienė, The universality of $L$-functions of elliptic curves, (2005);
6. Renata Macaitienė, Discrete limit theorems for general Dirichlet series, (2006);
7. Saulius Zamarys, Moments of $L$-functions, (2007);
8. Danutė Genienė, Limit theorems for Lerch zeta-functions with algebraic irrational parameter, (2009).

2008 m. prof. Antanas Laurinčikas šventė savo 60-tąjį gimtadienį. Jo garbei Šiaulių universitete buvo suorganizuota tarptautinė skaičių teorijos konferencija, skirta šiai sukakčiai pažymėti. Konferencijoje dalyvavo 68 dalyviai iš 14 valstybių: Lietuvos (J. Kubilius, A. Dubickas, E. Manstavičius ir kiti), Airijos (N. Budarina), Baltarusijos (V. Bernik, S. Rogozin ir kiti), Čekijos (S. Porubsky), Estijos (A. Leibak), Japonijos (K. Matsumoto, H. Mishou ir kiti), JAV (L. Eriksen), Lenkijos (W. Narkiewicz, L. Pankowski), Norvegijos (A. Prosolov), Rusijos (J. Nesterenko, V. Bykovsky, N. Moščevitin, S. Koniagin, A. Ustinov ir kiti), Suomijos (E. Suvitie, A. M. Ernvall-Hytonen), Švedijos (J. Andersson), Vengrijos (I. Katai), Vokietijos (K.-H. Indlekofer, R. Steuding, J. Steuding ir kiti). Konferencijos metu buvo perskaityti 47 pranešimai aktualiausiomis skaičių teorijos temomis.

## Literatūra


[1] A. Bakštys. Apie aritmetinių multiplikatyviųjų funkcijų ribinį pasiskirstymo dėsnį. *Liet. matem. rink.*, **8**:5–20, 1968 (rusiškai).

[2] H. Bohr and B. Jessen. Über die Werteverteilung der Riemannschen Zetafunktion. (Erste Mitteilung. Das Verhalten der Funktion in der Halbebene $\sigma > 1$). *Acta Math.*, **54**:1–35, 1930.

[3] H. Bohr and B. Jessen. Über die Werteverteilung der Riemannschen Zetafunktion. (Zweite Mitteilung. Das Verhalten der Funktion im Streifen $\frac{1}{2} < \sigma \leqslant 1$). *Acta Math.*, **58**:1–55, 1932.

[4] P. Erdös. Some remarks about additive and multiplicative functions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52**:527–537, 1946.

[5] V. Garbaliauskienė and A. Laurinčikas. Discrete value – distribution of $L$-functions of elliptic curves. *Publications de l'Institut Mathématique*, **79**(90):65–71, 2004.

[6] V. Garbaliauskienė and A. Laurinčikas. Some analytic properties for $L$-functions of elliptic curves. *Trudy Inst. Mat.*, **13**(1):75–82, 2005.

[7] D. Genienė, A. Laurinčikas and R. Macaitienė. Value distribution of the Lerch zeta-function with algebraic irrational parameter. III. *Lith. Math. J.*, **48**(3):282–293, 2008.

[8] J. Genys and A. Laurinčikas. Bendrųjų Dirichlė eilučių reikšmių pasiskirstymas. IV. *Liet. mat. rink.*, **43**(3):342–358, 2003 (rusiškai).

[9] J. Genys and A. Laurinčikas. Weighted joint limit theorems for general Dirichlet series. *Uniform Distribution Theory*, **2**(2):49–66, 2007.

[10] J. Genys and A. Laurinčikas. Weighted joint limit theorems for general Dirichlet series. II. *Uniform Distribution Theory*, **4**(1):9–26, 2009.

[11] R. Kačinskaitė. Diskrečioji ribinė teorema Matsumoto dzeta funkcijai kompleksinėje plokštumoje. *Liet. matem. rink.*, **40**(4):475–492, 2000 (rusiškai).

[12] R. Kačinskaitė. A discrete universality theorem for the Matsumoto zeta-function. *Liet. matem. rink.*, **42**(spec. nr.):55–58, 2002.

[13] A. Kolupayeva and A. Laurinčikas. Value distribution of twisted automorphic $L$-functions. *Lith. Math. J.*, **48**(2):203–211, 2008.

[14] A. Laurinčikas. Limit theorems for the Matsumoto zeta-function. *J. Théor. Nombres Bordeux*, **8**(1):143–158, 1996.

[15] A. Laurinčikas and R. Garunkštis. *The Lerch Zeta-Function*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.

[16] A. Laurinčikas and R. Macaitienė. Limit theorems for the Estermann zeta-function. IV. *Chebyshevsky sbornik*, **8**(2):148–161, 2007.

[17] A. Laurinčikas and R. Macaitienė. The discrete universality of the periodic Hurwitz zeta-function. *Integral Transforms and Special Functions*, **20**(9):673–686, 2009.

[18] A. Laurinčikas and D. Šiaučiūnas. Apie periodinę dzeta funkciją. II. *Liet. matem. rink.*, **41**(4):461–476, 2001 (rusiškai).

[19] A. Laurinčikas and D. Šiaučiūnas. Remarks on the universality of the periodic zeta-function. *Mathematical Notes*, **80**(3–4):532–538, 2006.

[20] A. Laurinčikas and D. Šiaučiūnas. On the fourth power moment of the function $\zeta_\lambda(s)$. *Integral Transforms and Special Functions*, **18**(9):629–638, 2007.

[21] R. Macaitienė. Discrete limit theorem for general Dirichlet series in the space of meromorphic function. *Liet. mat. rink.*, **44**(spec. nr.):83–89, 2004.

[22] R. Macaitienė. A discrete universality theorem for general Dirichlet series. *Analysis*, **26**:373–381, 2006.

[23] K. Matsumoto. Value-distribution of zeta-functions. In *Analytic number theory* (*Tokyo, 1988*), Lecture Notes in Math., vol. 1434, pp. 178–187, Berlin, 1990. Springer.

[24] S. Zamarys. On fractional moments of twists $L$-functions attached to cuspform. *Šiauliai Math. Sem.*, **4**(12):211–231, 2009.

[25] R. Šleževičienė. Joint limit theorems for the Riemann zeta-function. *Fiz. Mat. Fak. Moksl. Semin. Darb.*, **4**:96–103, 2001.

SUMMARY

**Investigations of the analytic and probabilistic number theory in Šiauliai University**

*D. Šiaučiūnas*

In this paper, the investigations of analytic and probabilistic number theory which were done in Šiauliai University are reviewed.

*Keywords*: Dirichlet series, limit theorem, multiplicative function, universality, weak convergence, zeta function.