Liet. matem. rink., **44**, *spec. nr.*, 2004, 198–201

Геометрия полунеголономных гиперкомплексов $SNGr(1,4,5)$ четырехмерного проективного пространства

Казимерас НАВИЦКИС (VU)
e-mail: kazimieras.navickis@mif.vu.lt

Резюме. Рассматриваются различные внутренние оснащения полунеголономных гиперкомплексов $SNGr(1,4,5)$ пространства P_4.

Ключевые слова: многообразие Грассмана, распределение двумерных плоскостей, оснащение распределения.

Пусть четырехмерное действительное проективное пространство P_4 отнесено к подвижному реперу $\{A_i\}$, дифференциальные уравнения инфинитезимального смещения которого имеют вид $(i,j,\ldots=1,\ldots,5)$

$$dA_i=\omega_i^j A_j.$$

Пусть $Gr(1,4)$ – многообразие Грассмана всех прямых пространства P_4. Сопоставляя каждой прямой $l\in Gr(1,4)$ двумерную плоскость Π, проходящую через эту прямую l, мы получаем некоторое распределение (поле), которое называется полунеголономным гиперкомплексом $SNGr(1,4,5)$. Пусть репер $\{A_i\}$ выбран так, чтобы $l=(A_1A_2)$, $\Pi=(lA_5)$. Тогда в частично канонизированном репере рассматриваемый гиперкомплекс определится следующими дифференциальными уравнениями

$$\omega_5^\alpha=\lambda_\beta^{\alpha p}\omega_p^\beta+\lambda^{\alpha p}\omega_p^5, \tag{1}$$

где величины $\lambda_\beta^{\alpha p}$ и $\lambda^{\alpha p}$ удовлетворяют уравнениям

$$\nabla\lambda_\beta^{\alpha p}-\lambda_\beta^{\alpha p}\omega_5^5-\lambda^{\alpha p}\omega_\beta^5-\delta_\beta^\alpha\omega_5^p=\lambda_{\beta\gamma}^{\alpha pq}\omega_q^\gamma+\lambda_\beta^{\alpha pq}\omega_q^5,$$
$$\nabla\lambda^{\alpha p}-2\lambda^{\alpha p}\omega_5^5=\overline{\lambda}_\beta^{\alpha pq}\omega_q^\beta+\lambda^{\alpha pq}\omega_q^5$$

(соответствующие внешние квадратичные уравнения опускаются).

Величина $\Lambda=\det||\lambda^{\alpha p}||$ является относительным инвариантом, так как $(p,q,\ldots=1,2;\ \alpha,\beta,\ldots=3,4)$

$$d\ln\Lambda+\omega_p^p+\omega_\alpha^\alpha-4\omega_5^5=\Lambda_\alpha^p\omega_p^\alpha+\Lambda^p\omega_p^5.$$

Предпологая, что $\Lambda \neq 0$, введем следующий объект:

$$\mu_{p\alpha} = \frac{\partial \ln |\lambda|}{\partial \lambda^{\alpha p}}.$$

Компоненты этого объекта удовлетворяют уравнениям

$$\nabla \mu_{p\alpha} + 2\mu_{p\alpha}\omega_5^5 = \mu^q_{p\alpha\beta}\omega_q^\beta + \mu^q_{p\alpha}\omega_q^5.$$

Распределение (1) будем называть оснащенным (или нормализованным) в смысле Нордена–Гринцевичюса, если к каждой прямой l этого распределения присоединены два подпространства

$$\Pi_I(l): \ x^5 = \lambda_\alpha x^\alpha \qquad (2)$$

(нормальное пространство первого рода) и

$$\Pi_{II}(l): \ x^p = \lambda^p x^p, \ x^\alpha = 0$$

(нормальное пространство второго рода) проективного пространства P_4.

Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Уравнения*

$$\varrho^p = -\frac{1}{2}\left(\lambda^{\alpha p}_\alpha + \lambda_\alpha \lambda^{\alpha p}\right)$$

устанавливают соответствие между нормальными пространствами $\Pi_I(l)$ *и* $\Pi_{II}(l)$.

Систему величин

$$t_\alpha = \frac{1}{2}\lambda^{\beta p}_\alpha \mu_{p\beta}$$

будем называть квазинормальным пространством.

Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Геометрические объекты*

$$l^p = \frac{2}{3}\left(\lambda^{\alpha p} t_\alpha - \lambda^{\alpha p}_\alpha\right)$$

и

$$H_\alpha = -\left(\frac{1}{2} l^p \mu_{p\alpha} + t_\alpha\right)$$

определяют внутренние нормальные пространства.

Система величин

$$T_\alpha = \mu^p_{p\alpha} + \mu_{p\alpha}\lambda^{\beta p}_\beta - 3H_\alpha + 6\mu_{p\alpha}l^p$$

образует тензор, так как

$$\nabla T_\alpha + T_\alpha\omega^5_5 = T^p_{\alpha\beta}\omega^\beta_p + T^p_\alpha\omega^5_p.$$

Пусть σ – любой абсолютный инвариант распределения (1). Пучок геометрических объектов

$$H_\alpha(\sigma) = H_\alpha + \sigma T_\alpha$$

определяет пучок нормальных пространств первого рода.

Положим

$$\tau^p = -\frac{1}{2}\lambda^{\alpha p}T_\alpha.$$

Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. *Пучок геометрических объектов* $l^p(\sigma) = l^p + \sigma\tau^p$ *определяет пучок нормальных пространств второго рода.*

Распределение (1) будем называть оснащенным в смысле Э. Картана, если каждой прямой l этого распределения отнесена прямая

$$C(l):\ x^p = m^p_\alpha x^\alpha,\ x^5 = m_\alpha x^\alpha.$$

Характеристика гиперплоскости (2), когда прямая l описывает линейчатую поверхность

$$L:\ \omega^\alpha_p = l^\alpha_p\Theta,\quad \omega^5_p = \widetilde{l}_p\Theta,$$

определяется уравнениями

$$\begin{aligned}&x^5 = \lambda_\alpha x^\alpha,\\ &\big[(\lambda^p_{\alpha\beta} - \lambda_\alpha\lambda_\gamma\lambda^{\gamma p})l^\beta_p + (\lambda^p_\alpha - \lambda_\alpha\lambda_\beta\lambda^{\beta p})\widetilde{l}_p\big]x^\alpha + (\widetilde{l}_p - \lambda_\alpha l^\alpha_p)x^p = 0.\end{aligned} \tag{3}$$

Если линейчатая поверхность L такова, что $\widetilde{l}_p = \lambda_\alpha l^\alpha_p$, то уравнения характеристики (3) принимает вид:

$$x^5 = \lambda_\alpha x^\alpha,\quad \widetilde{H}^p_{\alpha\beta}l^\beta_p x^\alpha = 0,$$

где

$$\widetilde{H}^p_{\alpha\beta} = \lambda^p_{\alpha\beta} + \lambda^p_\alpha\lambda_\beta - \lambda_\alpha\lambda_\gamma\lambda^{\gamma p}_\beta - \lambda_\alpha\lambda_\beta\lambda_\gamma\lambda^{\gamma p}.$$

Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. *Тензор* $\widetilde{H}^p_{\alpha\beta}$ *определяет соответствие между точками гиперплоскости* (2), *точкой* $a_p x^p = 0,\ x^I = 0$ *и точками копрямой* $u_p = 0,\ T^I u_I = 0\quad (I = 3, 4, 5)$:

$$\widetilde{H}^p_{\alpha\beta} x^\alpha T^\beta a_p = 0. \tag{4}$$

Соответствие (4) симметрично относительно величин x^α и T^β тогда и только тогда, когда

$$\widetilde{H}^p_{[\alpha\beta]} p^{\alpha\beta} a_p = 0, \tag{5}$$

где $p^{\alpha\beta} = x^\alpha T^\beta - x^\beta T^\alpha$. Соответствие (5) не зависит от выбора точки $a_p x^p = 0,\ \ x^I = 0$, если

$$\widetilde{H}^p_{[\alpha\beta]} p^{\alpha\beta} = 0. \tag{6}$$

Уравнения (6) определяют инвариантный двумерный линейный комплекс прямых. Уравнения

$$\widetilde{H}^p_{(\alpha\beta)} x^\alpha x^\beta = 0$$

определяют инвариантный двумерный конус второго порядка.

Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5. *Геометрический объект* $\{H_\alpha, \overline{H}^p_\alpha\}$, *где*

$$\overline{H}^p_\alpha = H_\alpha H_\beta \lambda^{\beta p} - H^p_\alpha,$$

определяет внутреннее оснащение распределения (1) *в смысле Э. Картана.*

REZIUMĖ

K. Navickis. Pusiauneholonominių keturmatės projektyvinės erdvės hiperkompleksų SNGr(1,4,5) geometrija

Nagrinėjami erdvės P_4 pusiauneholonominių hiperkompleksų SNGr(1,4,5) įvairūs vidiniai papildymai.

SUMMARY

K. Navickis. Geometry of semi-nonholonomic hypercomplexes $SNGr(1,4,5)$ ***in a four-dimensional projective space***

In this article the problem of intrinsic normalizations of plane distributions in an four-dimensional projective space is considered.

Keywords: Grassman manifold, projectiv relation, complex if straight lines.