

Геометрия неголономных комплексов $NGr(1, 4, 4)$ четырехмерного аффинного пространства

Казимерас НАВИЦКИС (VU)

e-mail: kazimieras.navickis@mif.vu.lt

Резюме. Рассматриваются различные вопросы дифференциальной геометрии неголономных комплексов $NGr(1, 4, 4)$ четырехмерного аффинного пространства.

Ключевые слова: многообразии Грассмана, проективное соответствие, комплекс прямых.

Рассмотрим четырехмерное подмногообразие $Gr(1, 4, 4)$ шестимерного многообразия Грассмана $Gr(1, 4)$ всех прямых четырехмерного аффинного пространства A_4 . Пусть $\{A, \vec{e}_i\}$ – подвижной репер пространства $A_4(i, j, k, \dots = 1, \dots, 4)$. Инфинитезимальное смещение такого репера определяется уравнениями

$$d\vec{A} = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j.$$

Пусть l – образующий элемент многообразия $Gr(1, 4)$. Будем считать, что прямая l имеет направление вектора \vec{e}_1 , а A лежит на l . В репере первого порядка дифференциальные уравнения комплекса $Gr(1, 4, 4)$ запишем в виде:

$$\begin{cases} \omega_1^2 + \omega^3 = 0, \\ \omega_1^3 + \omega^4 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

(соответствующие внешние квадратичные уравнения опускаются).

Геометрическим местом прямых, проходящих через фиксированную точку $\vec{M}(t) = \vec{A} + t\vec{e}_1$ прямой l и принадлежащих комплексу $Gr(1, 4, 4)$, является конус $\Gamma_2(t)$ с вершиной в точке $\vec{M}(t)$. Касательной плоскостью $\Pi_2(t)$ конуса $\Gamma_2(t)$ вдоль образующей l является плоскость

$$\Pi_2(t) : x^2 = tx^3, \quad x^3 = tx^4.$$

Плоскость $\Pi_2(t)$ назовем ассоциированной плоскостью точки $\vec{M}(t)$ прямой l , принадлежащей комплексу (1). Соответствие

$$K_1(l) : \vec{M}(t) = \vec{A} + t\vec{e}_1 \leftrightarrow \Pi_2(t) \quad (2)$$

между точками $\vec{M}(t)$ прямой l и плоскостями $\Pi_2(t)$, проходящими через прямую l , будем называть основным соответствием комплекса $Gr(1, 4, 4)$.

Когда точка $\vec{M}(t)$ пробегает прямую l , плоскости $\Pi_2(t)$ меняются и описывают гиперконус

$$K_3 : x^2x^4 - (x^3)^2 = 0$$

второго порядка с вершиной l . Основное соответствие (2) порождает соответствие

$$\left(\vec{M}(t_1), \vec{M}(t_2) \right) \leftrightarrow \Pi_3(t_1, t_2),$$

сопоставляющее двум точкам $\vec{M}(t_1)$ и $\vec{M}(t_2)$ прямой l гиперплоскость

$$\Pi_3(t_1, t_2) : x^2 - (t_1 + t_2)x^3 + t_1t_2x^4 = 0,$$

проходящую через прямую l . В предельном случае, когда $t_2 \rightarrow t_1 = t$, получаем гиперплоскость

$$\Pi_3(t) : x^2 - 2tx^3 + t^2x^4 = 0$$

и соответствующее соответствие

$$K_2(l) : \vec{M}(t) \leftrightarrow \Pi_3(t).$$

Неголономным комплексом $NGr(1, 4, 4)$ назовем многообразие Грассмана $Gr(1, 4)$ вместе с полем соответствий $K_1(l)$. Условия стационарности прямой l и инвариантности соответствия $K_1(l)$ определяются вполне интегрируемой системой $(p, q, \dots, p_1, p_2, \dots = 1, 2; I, J, \dots = 2, 3, 4)$

$$\theta_{p_1p_2} = 0, \quad \theta_{p_1\dots p_4} = 0, \quad \omega^I = 0, \quad \omega_1^I = 0$$

(1-формы $\theta_{p_1p_2}, \theta_{p_1\dots p_4}$ симметричные относительно всех индексов), где

$$4\theta_{11} = 4\omega^1 - \omega_3^2 - 2\omega_4^3,$$

$$4\theta_{12} = 2\omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_4^4,$$

$$\theta_{22} = \omega_3^4 + 2\omega_2^3,$$

$$\theta_{1111} = \omega_4^2, \quad 4\theta_{1112} = \omega_3^2 - 2\omega_4^3,$$

$$6\theta_{1122} = \omega_2^2 - 2\omega_3^3 + \omega_4^4,$$

$$4\theta_{1222} = \omega_3^4 - 2\omega_2^3, \quad \theta_{2222} = \omega_2^4.$$

Дифференциальные уравнения неголономного комплекса $NGr(1, 4, 4)$ в частично канонизированном репере запишем в следующем виде:

$$\theta_{p_1p_2} = L_{p_1p_2,I}\omega^I + M_{p_1p_2,I}\omega_1^I,$$

$$\theta_{p_1\dots p_4} = L_{p_1\dots p_4,I}\omega^I + M_{p_1\dots p_4,I}\omega_1^I,$$

где соответствующие внешние квадратичные уравнения опускаются.

Имеет место следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Дифференциально-геометрический объект

$$\{L_{p_1 p_2, I}, L_{p_1 \dots p_4, I}, M_{p_1 p_2, I}, M_{p_1 \dots p_4, I}\}$$

алгебраически подобен дифференциально-геометрическому объекту

$$\{A_{p_1 \dots p_5}, A_{p_1 p_2 p_3}, \tilde{A}_p, \tilde{C}_{p_1 p_2 p_3}, C_p, B_{p_1 \dots p_7}, \\ B_{p_1 \dots p_5}, B_{p_1 p_2 p_3}, B_p, C_{p_1 \dots p_5}, C_{p_1 p_2 p_3}\}.$$

ТЕОРЕМА 2. Система величин $B_{p_1 \dots p_7}$ является тензором и определяет семь точек на прямой l

$$B_{p_1 \dots p_7} t^{p_1} \dots t^{p_7} = 0$$

(инфлекссионные центры; здесь положено $t = t^2 : t^1$).

ТЕОРЕМА 3. Система 1-форм $\omega_1^2 + \omega^3$, $\omega_1^3 + \omega^4$ является вполне интегрируемой тогда и только тогда, когда все компоненты геометрических объектов g_p , $g_{p_1 p_2 p_3}$, $g_{p_1 \dots p_5}$ равны нулю; здесь

$$2g_p = A_p + 5B_p, \quad 2g_{p_1 p_2 p_3} = 2A_{p_1 p_2 p_3} - 3B_{p_1 p_2 p_3},$$

$$2g_{p_1 \dots p_5} = A_{p_1 \dots p_5} + 7B_{p_1 \dots p_5}.$$

ТЕОРЕМА 4. Система 1-форм

$$\omega^2, \quad \omega_1^2 - 2\omega^3, \quad \omega^4 - 2\omega_1^3, \quad \omega_1^4$$

является вполне интегрируемой тогда и только тогда, когда все компоненты геометрического объекта

$$f_{p_1 p_2 p_3} = 2(5C_{p_1 p_2 p_3} + \tilde{C}_{p_1 p_2 p_3})$$

равны нулю.

Положим

$$2L_p = A_p - 3B_p,$$

$$2L_{p_1 p_2 p_3} = 2A_{p_1 p_2 p_3} + 9B_{p_1 p_2 p_3}.$$

Рассмотрим линейчатую поверхность $L : \omega^I = l^I$, $\omega_1^I = l_1^I \theta$ ($D\theta = 0$) пространства A_4 , для которой

$$l_1^2 + l^3 = 0, \quad l_1^3 + l^4 = 0,$$

т.е. интегральную линейчатую поверхность комплекса $NGr(1, 4, 4)$.

Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5. Линейный комплекс

$$p^2 + p^{31} = (L_{122} - 2L_2)p^{23} + (L_{112} - L_1)p^{24} + L_{111}p^{34},$$

$$p^3 + p^{41} = -L_{222}p^{23} - (L_{122} + L_2)p^{24} - (L_{112} + 2L_1)p^{34}$$

является инвариантным и имеет касание первого порядка с любой интегральной линейчатой поверхностью L . Особой плоскостью этого линейного комплекса является плоскость

$$\Pi_2 : \begin{cases} -L_{222}x^2 + (L_2 - 2L_{122})x^3 + (L_1 - L_{112})x^4 = 1, \\ (L_2 + L_{122})x^2 + (L_1 + 2L_{112})x^3 + L_{111}x^4 = x^1. \end{cases}$$

Неголономный комплекс $NGr(1, 4, 4)$ назовем оснащенным (или нормализованным), если на этом комплексе определено поле инвариантных плоскостей

$$\Pi_2(l) : h_I x^I = 1, \quad H_I x^I = x^1.$$

Примерами внутренних оснащений являются поле плоскостей Π_2 , а также поле плоскостей

$$\begin{cases} -6B_{222}x^2 - (6B_{112} + 4B_1)x^3 - (12B_{122} + 4B_2)x^4 = 1, \\ (6B_{122} - 4B_2)x^2 + 6B_{111}x^3 + (12B_{112} - 4B_1)x^4 = x^1. \end{cases}$$

В данной работе геометрическим путем построены различные внутренние оснащения рассматриваемого неголономного комплекса.

REZIUMĒ
K. Navickis. Keturmatės afininės erdvės neholonominių kompleksų $NGr(1,4,4)$ geometrija

Nagrinėjami keturmatės afininės erdvės neholonominių kompleksų $NGr(1,4,4)$ įvairūs diferencialinės geometrijos klausimai.

SUMMARY
K. Navickis. Geometry of non-holonomic complexes $NGr(1, 4, 4)$ in a four-dimensional affine space

In this article intrinsic normalizations of a non-holonomic complexes in affine space A_4 is constructed in an invariant form.

Keywords: Grassman manifold, distribution of two-dimensional planes, equipment of distribution.