Liet. matem. rink., **44**, *spec. nr.*, 2004, 466–471

Matematikos uždavinių sprendimo psichologiniai momentai

Romualdas KAŠUBA (VU)
el. paštas: romualdas.kašuba@maf.vu.lt

Neįsigilinus galėtų pasirodyti, kad ir gilintis čia nėra ko – arba tu gali išspręsti uždavinį, arba ne. Jeigu negali, na ką padarysi, na, o jeigu gali, tai netrukus atsiremsi į kitą ir ten vėl bus arba taip, arba ne.

Tai psichologai vadina juodai baltu pasaulio matymu. O iš tikrųjų gyvenime mes jau seniai, o gal net ir visada gyvenome nelyginant spalvotos televizijos režimu – kitaip sakant, žmogui dviejų spalvų per mažai – jam duok daugiau, kontrastingiau, duok kitaip negu buvo, duok gyvenimo pilnatvę.

Juk galėtume tą analogiją vystyti – kai boksininkas eina į ringą, tai jis arba įveikia varžovą, arba ne, bet čia jau niekas nesiginčija, kad jam ten besikaunant už sėkmę psichologijos, įtampos nors vežimu vežk, viskas permaininga, sėkmės siūlas gali greitai išslysti iš tavo rankų. Žodžiu, iki pat gongo niekas galutinai neaišku.

Bet kažką daryti reikia, negalima nuleisti rankų.

Taip ir sprendžiant uždavinius, kaip ir gyvenime, mes esame nublokšti į situaciją, kai pilnos informacijos, pilno tikrumo nėra, o kažką nuveikti reikia ir kyla klausimas: nuo ko pradėti?

Teorinis patarimas labai paprastas – daryk ką nors.

Jį humoristiškai būtų galima performuluoti kad ir šitaip: jeigu jūs perskaitėte uždavinį ir nesumojate, ką daryti, tai skaitykite sąlygą dar kartą. Jeigu ir dabar tamsu, skaitykite ją trečią kartą. Jeigu ir vėl tas pats, tai dabar jau skaitykite nebe visą sąlygą, o tik tai, ką reikia rasti. Jeigu ir dabar neprašviesėjo, tai darykite ką nors – bet ką, tik nesėdėkite nuleidę rankų.

Atvirai pripažįstame, kad tokį patarimą lengviau duoti negu realizuoti. Bet žmogus yra atkaklus sutvėrimas.

Prieš keletą metų bene 2000 metų Raseinių krašto Olimpiadoje profesoriaus Jono Kubiliaus įsteigtai taurei laimėti buvau pasiūlęs tokį uždavinį, kuris tebuvo lengvesnė kažkada įprastinėje Lietuvos jaunųjų matematikų olimpiadoje pasitaikiusio uždavinio parafrazė – bet užtat jaunesnėms klasėms.

Štai to uždavinio sąlyga:

Lygtį $x^2 + y^2 + z^2 + 10 = xyz$ sprendžiame natūraliaisiais skaičiais.

Iš pradžių mūsų struktūruota sąlyga arba A dalis mūsų prašo visai nedidelio dalyko – rasti ar atspėti (tai tas pats) vieną tos lygties sprendinį. Paprastai kalbant, esame prašomi surasti 3 natūraliuosius skaičius, kurie tiktų tai lygčiai, arba kuriuos įrašę gauname teisingą lygybę – kaip besuksi, paprasčiau nepasakysi.

B dalis prašo surasti jau 7 tokius natūraliųjų skaičių trejetus.

C dalis visai drąsiai klausia, ar ta lygtis turi bent 2000 sprendinių – skaitytojas nepamiršo, kad siūlyta buvo 2000 metais (šiandien mes teirautumės, ar esama bent 2004 ar 2005 sprendinių).

Galiausiai D dalis jau kelia kone filosofinį klausimą, ar toji lygtis gali turėti neribotai daug arba kitaip be galo daug sprendinių.

Praėjus kiek laiko gavau tokį vieno skaitytojo, susidūrusio su tuo uždaviniu, laišką – jis man pasirodė labai įdomus – tai buvo tikrai rimtas rimto žmogaus laiškas. Jame buvo sakoma: aš esu informatikos docentas, aš pamačiau jūsų uždavinį, pasižiūrėjau į jį ir supratau, kad tą akimirką aš nesumečiau, ko čia griebtis. O už kadro gal būt liko ir neišreikštas, tačiau be galo natūralus klausimas: o juk tai buvo mokiniams skirtas uždavinys – kaip jiems suktis?

Labai rimtas ir natūralus klausimas.

Vėl pasižiūrėkime, ar tas uždavinys yra jau toks sunkus ir neprieinamas.

Skaitytojo laiškas ir pripažinimas, kad ne iš karto aišku, jau kreipia link minties, kad uždavinys visai geras.

Pirmoji, arba A, dalis teprašo surasti ar atspėti vieną tinkamą trejetą – jokių formulių čia nereikia. Imk ir parink. Tik tiek. Berinkdamas išgudrėsi, imsi daugiau matyti.

Žinoma, šioje vietoje reikėtų atvirai pasakyti, kad apskritai į spėliojimą žmonės, mes ir mokytojai žiūri įvairiai arba kai kada atsargiai. Niekas neneigia jo vertės, tik kartais būna abejonių, ar tikrai iš mūsų jis kyla? Tai visiškai natūralu, bet pačios spėliojimo arba, kitaip tariant, prognozavimo vertės tai nė kiek nemenkina.

Man yra tekę daugybę kartų pačiose įvairiausiose auditorijos – nuo penktokų iki mokytojų kalbėti apie tą uždavinį – nebuvo nė vieno atvejo, kad po kokių 30 sekundžių kas nors nepastebėtų: skaičių trejetas 3, 4 ir 5 (pa)tinka mūsų lygčiai.

Taigi uždavinio A dalis atlikta, ir dabar reikia dairytis, ką čia nuveikus toliau – o toliau 7 sprendiniai. Bet bespėliodami tą sprendinį 3, 4, 5 mes spėjome truputį apsidairyti, bet jau tą lygtį iš esmės pamatyti. Ką daugiau galėtume nesunkiai pasakyti – ogi kad nežinomieji, arba (galėtume pasakyti) ieškomieji nežinomieji, toje lygtyje dalyvauja vienodom teisėm, bet kuris kaip ir kitas kuris. Ta demokratija turi savo pavadinimą – lygtis yra simetriška – pervadinkime kintamuosius kaip tinkami, lygtis nepasikeis, liks kokia buvusi.

Bet tada iš vieno sprendinio pasidarys daug daugiau – sprendiniu bus ne tik (3, 4, 5), bet ir (3, 5, 4), (4, 3, 5), (4, 5, 3), (5, 3, 4) ir galiausiai (5, 4, 3). Taip iš vieno pasidarė 6 ir dabar jau iki sėkmingos B dalies atomazgos betrūksta vieno trejeto.

O viskas prasidėjo nuo vieno spėjimo ir vieno paprasto pastebėjimo.

Dabar reikėtų dar kažko, kad reikalai pajudėtų iš esmės – ta esme čia bus paprasta kvadratinės lygties idėja. Mūsų lygtyje yra 3 kintamieji, ir tokia forma užrašyta lygtis yra visiškai ne mokyklinis objektas.

Tačiau nuo nemokyklinių iki mokyklinių reikalų šiuo atveju yra vienas žingsnelis – užtenka įsivaizduoti, kad 2 kintamuosius, sakysime, y ir z žinome, o x – apsimesime, kad ne, ir tada būtų kvadratinė lygtis – kas kad mes ir $x = 3$ žinome, bet lygtis juk bus kvadratinė ir gali atnešti mums naują, dar neturėtą x.

Taigi įrašome 4 vietoje y, o 5 vietoje z ir nuduodami, kad pamiršome x (kuris buvo 3 (vis tiek kažkiek atsimename) gauname kvadratinę lygtį

$x^2 + 16 + 25 + 10 = 20x$, arba
$x^2 - 20x + 51 = 0$,
kuri turi dar ir kitą šaknį, lygią 17, arba gavome, kad trejetas (17, 4, 5) ir yra tas 7-sprendinys, ne tik baigiantis problemas su B dalimi, bet ir pakuždantis, kas čia toliau darytina.

Pirmiausiai tą naują trejetą vėl galima perstatinėti ir turėsime ne 7, o jau net 12 sprendinių ir toliau vėl darysime kaip darę – išrikiuosime trejetą didėjančiai (atsarga gėdos nedaro), imsime (4, 5, 17), vėl pirmąjį nežinomųjų užmiršime, kitus 2 įrašysime ir gausime naują kvadratinę lygtį
$x^2 - 85x + 324 = 0$,
kuri turi ne tik šaknį 4, bet ir kitą, lygią 81 ir kuri duoda mums naują trejetą (81, 5, 17), ir tą procesą galime tęsti neribotai – o tai mums duoda ir 2004, ir bet kokį skaičių sprendinių, ir atlieka tai, ko iš mūsų tikėjosi ir C, ir D dalys.

Apie niekuo nepamainomą konkretaus veiksmo naudą

Dažnas žmogus, kuriam dar ne visai yra išgaravę mokykliniai matematikos pamokų atsiminimai, sako, kad matematikoje reikia žinoti daug formulių ir mokėti prireikus susirasti tinkamiausią. Kalbos nėra, žinoti arba būti mačius kokių nors įdomių formulių yra naudinga ir pamokoma.

Todėl tūlas gavęs uždavinį kaip mat klausia: kokią čia formulę taikyti? Tačiau jei ieškosime formulės nejausdami situacijos, tai galime lengvai prašauti pro šalį – pritaikysime ne tą formulę, nes nesame susipažinę su tuo, koks kieme oras, ir pasirodysime jame su netinkama apranga.

Visada pravartu konkrečiai pasižvalgyti. Kad kas mūsų neapkaltintų abstrakčiais samprotavimais, paimsime pavyzdį arba prisiminsime dar vieną Lietuvos jaunųjų matematikų olimpiados uždavinį – vėl visai konkretų, vėl be jokio x sąlygoje.

Dešimtženklis skaičius ABCDEFGHIJ yra ne bet koks, o toks, kad pirmasis jo skaitmuo A pasako, kiek kartų jo užraše pasitaiko 0, B – kiek kartų 1, C – kiek kartų 2 ir t.t., galiausiai, paskutinysis 10-tasis jo skaitmuo J pasako, kiek jame yra 9.

Negi tokio skaičiaus apskritai esama?

Sprendimas. Šiuo atveju labai padeda pirmo pasitaikiusio dešimtženklio skaičiaus, pavyzdžiui, kad ir
3 120 004 568
apžiūra.

Ir pradžių jis net visai geras – pirmas skaičius yra 3, tai reiškia, kad jame turi būti 3 nuliai ir 3 nuliai jame yra, antras skaičius sako, kad jame turi būti 1 vienetas ir vienas vienetas jame yra, bet jau trečiasis skaičius sako, kad jame turi būti 2 dvejetai – o yra tik vienas. Vadinasi tas skaičius ne tas.

Paklauskime, ką mes laimėjome.

Laimėjome, kad ir tą vertingą įžvalgą, kad visų to skaičiaus skaitmenų suma turi būti 10, nes tai 10-ženklis skaičius.

Tačiau jeigu visų to skaičiaus skaitmenų suma yra 10, tai tame skaičiuje turbūt yra nemažai nulių.

Nuo to ir pradėkime.

Kadangi skaičius yra 10-ženklis, tai pirmasis skaitmuo ne 0, vadinasi, nulių jame tikrai yra. Imkime rūšiuoti pagal didžiausią įmanomą 0 skaičių – daugiausiai jų gali būti 9. Tačiau tada ieškomas skaičius turi atrodyti taip – pirmas skaitmuo 9, o kadangi visų skaitmenų suma 10, tai dar kažkur yra vienas 1. Tada tas 1 turi būti antrasis skaitmuo, o skaičius toks – 9 100 000 000. Bet jis netinka, nes paskutinysis jo skaitmuo „meluoja" – jis yra 0, o turi rodyti devynetus, kurių yra.

Taigi 10-ženklis skaičius 9 prasidėti negali.

Mėginame žiūrėti, ar gali jis prasidėti 8 – kitaip sakant ar jame gali būti 8 nuliai. Tada arba jame yra 2 vienetai arba 1 dvejetas – primename, kad pirmasis panagrinėtas konkretus skaičius mums pirštu prikišamai parodė, kad to skaičiaus skaitmenų suma yra 10.

Tačiau vėl negerai – jeigu jame yra 2 vienetai, tai antrasis skaitmuo turi būti 2 – jis privalo rodyti vienetų skaičių, vadinasi, jo skaitmenų suma jau 10 ir nebėra kam parodyti dvejeto, jau nekalbant apie aštuonetą.

O jeigu skaičius prasideda 8, ir kitas skaičius yra 2, tai vėl blogai, nes tada 3-čias jo skaitmuo turi būti 1 – suma vėl per didelė.

Panašiai samprotaudami tuoj susigaudytume, kad pirmasis skaitmuo negali būti 7, o štai 6 būti gali, nes skaičius

6 210 001 000

yra toks, kokio reikia, ir daugiau tokių skaičių nėra.

Kiek esu kam pasiūlęs šį uždavinį, visi, kurį jį sprendė pradėdami „konkrečiais parašinėjimais" vėliausiai po pusvalandžio jį išsprendė, o su tais, kurie pradėjo nuo formulių rašymo, buvo įvairiai.

Esu matęs 2 žmones, kurie padiktavus uždavinio sąlygą, iš karto pasakė atsakymą – tai muzikas Augustinas Maceina ir tuo laiku dar Raseinių „Žemaičio" gimnazijos moksleivis Giedrius Karalis. Esama gabių žmonių.

Ne viskas paprasta, kas paprasta, kas kukliai atrodo

Skaitytojas tikriausiai yra girdėjęs apie Ferma problemą. Jeigu ne, tai nesunku viena eilute ją priminti.

Mokykloje visi šimtus kartų yra kartoję, kad trys kvadratu plius keturi kvadratu yra penki kvadratu, ir panašių pavyzdžių, kai dviejų natūraliųjų skaičių kvadratų suma yra lygi trečiojo skaičiaus kvadratui, apstu.

Tačiau jeigu paklaustume, ar taip gali būti su didesniais laipsniais, arba jei paklaustume, ar galima rasti tokius du natūraliuosius skaičius, kad jų trečiųjų ar atitinkamai didesnių laipsnių suma būtų lygi trečiojo skaičiaus trečiajam ar atitinkamai tokiam pačiam didesniam laipsniui, tai iš karto tikrai tokių skaičių nerastume.

Tačiau jeigu mes negalime tokių trijų skaičių surasti, tai visai nereiškia, kad visi negali. Gal kiti sumanesni.

Žmonės tokių skaičių ieškojo gerus 300 metų. Nieko nerado. Galų gale šviesiausieji pasaulio protai nustatė, kad tokių natūraliųjų skaičių nesama.

Beįrodinėjant šią problemą buvo sukurtos naujos matematikos sritys, daugybė žmonių kankinosi, vargo ir stengėsi – kaip kitaip pavadintumėte situaciją, kai dirbi, dirbi ir vis tas pats. Galų gale problema tiek išgarsėjo, kad už jos sėkmingą sprendimą buvo pažadėtos premijos – vėl nieko. Ir tiktai 20-tojo amžiaus pabaigoje po Andrew Wiles darbų paaiškėjo – buvo įrodyta, kad tokių trejetų nėra ir neatsiras.

Specialistai sako, kad baigiamoji Ferma hipotezės įrodymo – arba, tiksliau sakant, paneigimo dalis yra 100 puslapių tiršto teksto, kurį pajėgūs suprasti gal koks tuzinas geriausių pasaulio matematikų.

Mes čia tik norėtume pridurti, kad visada, kai Jūs galynėjatės su uždaviniu, Jūs galynėjatės ne tik su juo, bet taip pat ir su žmogumi, kuris jį sugalvojo, o dažniausiai net ne su vienu, o su keliais, nes vienas sugalvojo, kitas tobulino, o septintas galutinai nušlifavo. Nepamirškite dar, kad tie žmonės veikiausiai daro jau nebe pirmą uždavinį ir todėl mums atrodo, kad teisingas požiūris į sutiktą – ypač rimtesnį uždavinį turėtų būti toks: jeigu uždavinys ypač sudėtingesnis pasirodo esąs įveikiamas, reikėtų džiaugtis, tačiau, jeigu nepavyko, tai galima palikti jį ramybėje ir kada nors vėl prie jo grįžti.

Absoliučiai nepatartina mąstyti taip: jeigu aš tokio uždavinio neįveikiu, tai aš esu niekam tikęs.

Didelių skaičių baimės mažinimas arba vienas natūralus būdas prisijaukinti arba perprasti užduotį

Dideli skaičiai, panašiai kaip ir dideli žmonės, gali daryti tam tikrą psichologinį poveikį jautresniam arba tiesiog mažai su jais susidūrusiam žmogui, ir jis gali išleisti iš akių, kad su dideliu skaičiumi gali būti tiek pat nesudėtinga susitvarkyti, kaip ir su mažu, o su mažu mums psichologiškai visada ramiau – tokiose situacijose mes labiau savimi pasitikime, mes akylesni, mes ten puikiai susigaudome.

Pademonstruosime kone chrestomatinį ir dar priedo filosofinį pavyzdį, kuris ne taip paprastai leidžiasi išsprendžiamas.

Turime 2004×2004 matmenų lentelę (vėl nujaučiame didelio skaičiaus spaudimą), į kurios kiekvieną langelį įrašytas skaičius. Leidžiama paimti bet kurią eilutę arba bet kurį stulpelį ir visus jame esančių skaičių ženklus pakeisti priešingais, ir tokį veiksmą tęsti, kiek tik beprireiktų.

Įrodykite, jog užsispyrę mes visados galime pereiti prie tokios lentelės, kurioje visų kiekvienos eilutės ir lygiai taip pat visų kiekvieno stulpelio skaičių suma yra neneigiama.

Paimkime ir labai drastiškai sumažinkime lentelės matmenis, sumažinkime tiek, kad daugiau jau ir sumažinti nebeįmanoma – imkime vadinamąją lentelę 1×1, arba paprastai kalbant vieną skaičių.

Jeigu jis neneigiamas, tai nieko jam daryti ir nereikia, o jeigu tas vienintelis skaičius, tai pakeisime jo ženklą ir visa bus atlikta.

Sekantis pagal paprastumą atvejis yra 2×2 matmenų lentelė. Jeigu imtume konkrečią lentelę, tai tuojau pat visa atliktume – todėl dabar labai norėtųsi bendro samprotavimo, kad ir dabar būtų aišku, ir kad tas samprotavimas apšviestų ir didesnes lenteles.

Kaip bežiūrėtum, nepaneigsi, kad 2×2 matmenų lentelėje yra 4 skaičiai a, b, c ir d. Jie, kad ir ką bedarytum, nebus kitokie kaip kad plius a arba minus a, plius b arba minus b, plius c arba minus c ir galop plius d arba minus d. Kitokiose būsenose jie nebus. Jeigu kiekvienas skaičius gali būti dviejose būsenose, tai tie 4 skaičiai pagal kombinatorinės daugybos (arba sveiko proto) principą gali rastis $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ būsenų.

Daugiau būsenų lentelė neturi. Todėl viena iš 16 tų galimų lentelės būsenų turi pačią didžiausią įmanomą visų lentelės skaičių sumą.

Tada mes tvirtiname, kad tada ir kiekvienos eilutės ir kiekvieno stulpelio skaičių suma yra neneigiama.

Tikrai, jeigu turėdami pačią didžiausią įmanomą visos lentelės skaičių sumą mes kurioje nors eilutėje ar stulpelyje atrastume neigiamą visų skaičių sumą, tai ten pakeitę visus ženklus priešingais mes tą sumą tikrai padidintume, bet to padaryti nebeįmanoma, nes ta suma jau dabar yra pasirinkta pati didžiausia.

SUMMARY

R. Kašuba. A psychological aspects of solving of mathematical problems

Some natural problems which occur by solving of mathematical problems are being regarded.

Keywords: mayhematical problem, psychology.