Liet. matem. rink., **44**, *spec. nr.*, 2004, 482–485

M. Maknio įnašas į skaičių teoriją

Antanas LAURINČIKAS (VU) *
el. paštas: antanas.laurincikas@maf.vu.lt

Šiais metais Mindaugo Maknio kurso draugai švenčia savo jubiliejus. Rugpjūčio 10 dieną ir jam būtų sukakę 60 metų. Deja, jau 12 metų, kai nebėra Mindaugo. 1992 metų liepos 25 dieną nelaimingas atsitikimas nutraukė jo gyvenimo siūlą.

Matematika buvo M. Maknio mėgstamiausiasias dalykas jau vidurinėje mokykloje, nors ir varžėsi su sportu. Tačiau, norėdamas išvengti beprasmės karinės tarnybos, Mindaugas įstojo į tuometinį Kauno politechnikos institutą ir ruošėsi tapti inžinieriumi. Bet vis tiek jam buvo lemtas matematiko kelias. Rektorių J. Kubiliaus ir K. Baršausko bei doc. H. Jasiūno iniciatyva buvo sudarytos vadinamosios KPI grupės ir perkeltos į Vilniaus universiteto matematikos ir mechanikos fakultetą. Jų nariai studijavo matematiką Vilniuje, nors skaitėsi KPI studentais. Taip pavyko apgauti kariškius ir papildyti Lietuvos matematikų gretas jaunais gabiais žmonėmis.

Per trumpą savo gyvenimą M. Maknys paliko ryškų pėdsaką skaičių teorijoje ir apskritai matematikoje. Dar studijų metais, profesoriaus J. Kubiliaus paskatintas, jis susidomėjo vienu galingiausiu skaičių teorijos metodu – didžiuoju rėčiu. Šio metodo kūrėju yra laikomas garsus rusų matematikas J.V. Linikas (Linnik, 1915–1971), o pats metodas remiasi subtiliais trigonometrinių sumų įverčiais. J.V. Liniko idėjas toliau išplėtojo vengras A. Renjis (Rényi), anglas K.F. Rotas (Roth), italas E. Bombjeris (Bombieri) ir kiti žinomi matematikai. Savo diplominiame darbe M. Maknys pateikė didžiojo rėčio metodo tikimybinę interpretaciją, kuri apibendrino vieną A. Renjo rezultatą. Tegul p yra pirminis skaičius, m_j, $m_j \leqslant N$, $j = 1, \dots, z$, yra bet kokie natūralieji skaičiai, o $z(p, h)$ yra j reikšmių, kurioms

$$m_j \equiv h (\operatorname{mod} p),$$

skaičius. Remdamasis tikimybiniais samprotavimais, A. Renjis įrodė, kad

$$\sum_{p \leqslant X} p \sum_{h=1}^{p-1} \left(z(p, h) - \frac{z}{p} \right) \leqslant 2Nz \tag{1}$$

su $X = (N/12)^{1/3}$. Išradingai pritaikęs vieną A. Renjo rezultatą apie silpnai priklausomus atsitiktinius dydžius, 1967 metais M. Maknys apibendrino (1) nelygybę. Tegul $g(m)$ yra reali aritmetinė funkcija, o $M < n$. Tuomet jis įrodė, jog

*Paremtas Lietuvos mokslo ir studijų fondo.

$$\sum_{p<M} p \sum_{h=1}^{p-1} \Bigg(\sum_{\substack{m=1 \\ m \equiv h (\mathrm{mod}\, p)}}^{n} g(m) - \frac{1}{p} \sum_{m=1}^{n} g(m) \Bigg)^2 = Bn \sum_{m=1}^{n} g^2(m).$$

Čia B žymi dydį, kurio modulis yra aprėžtas konstanta. Pastaroji nelygybė yra plačiai naudojamos tikimybinėje skaičių teorijoje Kubiliaus nelygybės dualioji versija. Ją žinomas amerikiečių matematikas P. D. T. A. Elijotas (Elliott) atrado tik 1974 metais.

Prie didžiojo rėčio M. Maknys grįžo ir vėlesniais savo mokslinės veiklos metais.

Svarbiausius rezultatus M. Maknys gavo analiziniais metodais nagrinėdamas pirminių idealiųjų skaičių $\mathfrak{p}$ pasiskirstymą kvadratiniuose skaičių kūnuose. Šios tematikos pradininku yra laikomas vokiečių matematikas E. Hekė (Hecke), o į Lietuvą, ją išvystęs, iš studijų aspirantūroje pas J.V. Liniką Leningrado universitete parsivežė J. Kubilius. Algebrinių skaičių kūnų pirminių idealiųjų skaičių uždaviniais jis sudomino savo mokinius J. Vaitkevičių, J. Urbelį, K. Bulotą, V. Kalinką, A.Matuliauską. 1969 metais šių uždavinių ėmėsi ir profesoriaus J. Kubiliaus aspirantas M. Maknys.

Gerai žinoma, jog nagrinėjant pirminių racionaliųjų skaičių pasiskirstymą geriausius rezultatus duoda analiziniai metodai, paremti Rymano dzeta funkcijos ir Dirichlė L-funkcijų teorija. Panaši, tik žymiai sudėtingesnė situacija yra ir algebrinių skaičių kūnuose. 1918–1920 metais E. Hekė apibrėžė algebrinių kūnų Z-funkcijas, kurios dabar yra vadinamos Hekės Z-funkcijomis, ir pritaikė jas pirminių idealiųjų skaičių pasiskirstymui tirti. Šių funkcijų apibrėžimui reikalingi Hekės charakteriai. Tarkime, jog K yra kvadratinis skaičių kūnas, $\mathfrak{m}$ – jo sveikasis idealas, o χ – likinių klasių grupės mod$\mathfrak{m}$ charakteris. Simboliu α žymėsime kūno K sveikuosius idealiuosius skaičius. Tuomet funkcija

$$\lambda^m(\alpha) = \begin{cases} \exp\{igm \arg \alpha\}, & K \text{ — menamas kvadratinis kūnas,} \\ \exp\left\{ \frac{\pi i m}{\log \eta} \log \left| \frac{\alpha}{\alpha'} \right| \right\}, & K \text{ — realus kvadratinis kūnas,} \end{cases}$$

yra vadinama pirmos rūšies Hekės charakteriu. Čia g yra vienetų mod $\mathfrak{m}$ skaičius, η yra pagrindinis vienetas, o α' yra skaičiaus α jungtinis. Tarkime, jog kiekvienam kūno K vienetui ε yra teisinga lygybė

$$\chi(\varepsilon)\lambda^m(\varepsilon) = 1.$$

Tuomet funkcija $\Xi(\alpha) = \chi(\alpha)\lambda^m(\alpha)$ yra vadinama antros rūšies Hekės charakteriu. Tegul $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis. Pusplokštumėje $\sigma > 1$ kūno K Hekės Z-funkcija $Z(s, \Xi)$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$Z(s, \Xi) = \sum_{\alpha}{}^{*} \frac{\Xi(\alpha)}{(N\alpha)^s}.$$

Čia sumuojama pagal fiksuotos klasės sveikuosius idealiuosius skaičius, išskyrus nulinį idealą. Žvaigždutė reiškia tik neasocijuotus skaičius, o $N\alpha$ yra skaičiaus α norma. Funkcija $Z(s, \Xi)$ yra meromorfiškai pratęsiama į visą s-plokštumą. Aukštesnio laipsnio kūnų Z-funkcijos yra dar sudėtingesnės.

Pirmieji rezultatai apie funkcijos

$$\pi(x;\nu,\mathfrak{m},\varphi_1,\varphi_2)=\sum_{\substack{N\mathfrak{p}\leqslant x\\ \mathfrak{p}\equiv\nu(\mathrm{mod}\,\mathfrak{m})\\ \varphi_1<\arg\mathfrak{p}\leqslant\varphi_2}}1$$

asimptotiką, kai $x\to\infty$, priklauso E. Hekei ir H. Rademacheriui (Rademacher), tačiau tiksliausius ir bendriausius rezultatus 1951–1955 metais gavo J. Kubilius. Apskritai, idealieji skaičiai nėra vienmačiai, todėl tenka nagrinėti jų skaičių įvairiuose sektoriuose. Tai gerokai sukomplikuoja problemos sprendimą. J. Kubilius funkcijai $Z(s,\Xi)$ ištobulino nulių tankio metodą ir įrodė asimptotinę formulę

$$\pi(x;\nu,\mathfrak{m},\varphi_1,\varphi_2)=\frac{g'(\varphi_2-\varphi_1)x}{2\pi h\varphi(\mathfrak{m})\log x}\big(1+\mathrm{o}(1)\big)+Bx^{c+\varepsilon} \tag{2}$$

su $c<0,9$. Čia g' yra kūno K vienetų skaičius, h – idealų klasių skaičius, $\varphi(\mathfrak{m})$ yra apibendrintoji Oilerio funkcija. Pastarąjį rezultatą tikslino K. Bulota ir M. Maknys. Aštuntojo dešimtmečio pradžioje K. Bombjeris, A.I. Vinogradovas (Vinogradov), H.L. Montgomeris (Montgomery) ir kiti gavo naujus gilius rezultatus apie Dirichlė L-funkcijų nulių tankį. M. Maknys išvystė jų idėjas ir pritaikė funkcijos $Z(s,\Xi)$ atvejui. Tegul $N(\sigma,T)$ yra funkcijos $Z(s,\Xi)$ nulių stačiakampyje $\sigma\leqslant\beta\leqslant 1$, $1/2\leqslant\sigma\leqslant 1$, $2<|\gamma|\leqslant T$, skaičius, o $M>1$. Tuomet jis įrodė [1], [2], [3], jog

$$\sum_{\substack{\Xi\\ 0<|m|\leqslant M}}N(\sigma,T)=B\begin{cases}\big(MT(M+T)\big)^{\frac{2(1-\sigma)}{2-\sigma}}\log^{c_1}MT, & 1/2\leqslant\sigma\leqslant 1,\\ MT^{\frac{4(37\sigma-25)(1-\sigma)}{13\sigma(4\sigma-3)}}\log^{c_2}MT, & 3/4<\sigma\leqslant 1.\end{cases}$$

Tai leido [4] liekaną (2) įvertyje sumažinti iki $Bx^{\frac{25}{37}+\varepsilon}$.

Spręsdamas minėtus uždavinius, M. Maknys ištobulino ir didžiojo rėčio metodą kvadratiniuose kūnuose. Pateiksime vieną jo rezultatą menamojo kvadratinio kūno atveju [5]. Tegul $P>0$, $N>1$, $M>1$, $Q>1$, a_m yra kompleksiniai skaičiai, o $b(\alpha)$ – kūno skaičiai. Trumpumo dėlei tegul

$$\delta=\min_{\substack{0<\arg\alpha\neq\arg\beta\leqslant 2\pi\\ P\leqslant|N\alpha|\leqslant P+N,\,P\leqslant|N\beta|\leqslant P+N}}|\arg\alpha-\arg\beta|.$$

Tuomet galioja nelygybės

$$\sideset{}{^*}\sum_{P\leqslant|N\alpha|\leqslant P+N}\Big|\sum_{|m|\leqslant M}\lambda^m(\alpha)a_m\Big|^2\leqslant c_3\max(\delta^{-1},M)\sum_{|m|\leqslant M}|a_m|^2$$

$$\sum_{|N\mathfrak{m}|\leqslant Q}\sum_{\chi}\Big|\sideset{}{^*}\sum_{P\leqslant|N\alpha|\leqslant P+N}\sum_{|m|\leqslant M}b(\alpha)a_m\Xi(\alpha)\Big|^2$$

$$\leqslant c_4Q^2\max(\delta^{-1},M)\sum_{|m|\leqslant M}|a_m|^2\sum_{P\leqslant|N\alpha|\leqslant P+N}|b(\alpha)|^2.$$

Šios nelygybės apibendrino žinomus rezultatus Dirichlė charakteriams. Tačiau M. Maknio išnagrinėtas kvadratinių kūnų atvejis žymiai sudėtingesnis, nes į įvertinamas sumas įeina daug parametrų, ir visi įverčiai turi būti tolygūs tų parametrų atžvilgiu.

Kaip pastebėjo J. Kubilius, menamojo kvadratinio skaičių kūno pirminių idealiųjų skaičių pasiskirstymas siauruose sektoriuose turi ryšį su garsia E. Landau hipoteze, tvirtinančia, jog yra be galo daug pavidalo

$$p = a^2 + 1$$

pirminių skaičių p. Pasirodė, jog galima kelti šiek tiek paprastesnį klausimą, ar yra be galo daug pavidalo

$$p = a^2 + b^2 \tag{3}$$

pirminių skaičių? Iš (2) formulės išplaukia, kad yra be galo daug (3) pavidalo pirminių skaičių su $|b| \leqslant p^{c-1/2+\varepsilon}$. Jeigu yra teisingas Rymano hipotezės analogas funkcijoms $Z(s, \Xi)$, tai tuomet $|b|$ galima sumažinti iki $|b| \leqslant c_5 \log p$. Pats J. Kubilius ne kartą gerino savo rezultatą. Paskui K. Bulota sumažino $|b|$ iki $|b| \leqslant p^{1/3+\varepsilon}$. Tačiau geriausi aštuntojo dešimtmečio rezultatai priklauso M. Makniui. Iš pradžių jis nelygybėje $|b| \leqslant p^{\theta+\varepsilon}$ konstantą θ sumažino iki $11/49 = 0,22916...$, o dar vėliau [4] – iki $13/74 = 0,17567....$ Jo svajonė buvo dar toliau sumažinti θ ir iš tų rezultatų apginti tuometinę fizikos ir matematikos mokslų daktaro disertaciją.

Suminėjome tik dalį M. Maknio rezultatų. Be jų jis dar surado naujus įverčius tarp gretimų pirminių idealiųjų skaičių sektoriuose [6], gavo tikslius Hekės polinomų įverčius [7], [8]. Buvo pradėjęs plėsti anksčiau minėtus savo rezultatus aukštesniems algebriniams kūnams, vienas iš pirmųjų Lietuvoje domėjosi kriptografija.

Literatūra

1. М. Макнис, О Z-функциях мнимого квадратического поля, *Liet. matem. rink.*, **15**(1), 157–172 (1975).
2. М. Макнис, Нули Z-функции Гекке и распределение простых чисел мнимого поля, *Liet. matem. rink.*, **15**(1), 173–184 (1975).
3. М. Макнис, Плотностные теоремы Z-функции Гекке и распределение простых чисел мнимого квадратического поля, *Liet. matem. rink.*, **16**(1), 173–180 (1976).
4. М. Макнис, Уточнение остаточного члена в законе распределение простых чисел мнимого квадратического поля в секторах, *Liet. matem. rink.*, **17**(1), 133–137 (1977).
5. М. Макнис, Большое решето в квадратичных полях, *Liet. matem. rink.*, **20**(2), 79–86 (1980).
6. M. Maknys, On the distance between consecutive prime ideal numbers in sectors, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **42**(1–2), 131–138 (1983).
7. M. Maknys, On the „large value" estimate of Hecke polynomials, *Ann. Univ. Sci. Budap., Sect.math.*, **27**, 21–29 (1985).
8. M. Maknys, Large value estimates for Hecke polynomials, *in: New Trends in Probab. and Statist.*, **2**, *Analytic and Probab. Methods in Number Theory, Proc. of Intern.Conf. in Honour of J. Kubilius*, Palanga, 1991, *F. Schweiger and E. Manstavičius* (Eds.), Vilnius, TEV, Utrecht, VSP (1992), pp.355–365.

SUMMARY

A. Laurinčikas. Contribution of M. Maknys to number theory

In the paper a survey of works in the number theory of M. Maknys is presented.

Keywords: Hecke Z-function, ideal number, Landau conjecture.