ISSN 1392-9631 ELEKTRONIKA IR ELEKTROTECHNIKA. 2005. Nr. 1(57)

T 125 AUTOMATIZAVIMAS, ROBOTOTECHNIKA

Kontrolė sugriežtinant kontrolines ribas

J. Kruopis
*Matematikos ir informatikos fakultetas, Vilniaus universitetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius, Lietuva,
tel. +370 5 2136390, el. p. julius.kruopis@maf.vu.lt*
A. Vaišvila
*AB „Ekranas", Elektronikos g. 1, LT-5319 Panevėžys, Lietuva,
tel. +370 45 506766, faks. +370 45 436563, el. p. vaisvila@ekranas.lt*

Įvadas

Atliekant gaminių ar jų mazgų kontrolę arba reguliuojant technologinį procesą dėl techninių ar organizacinio pobūdžio priežasčių kartais vietoj kiekybinių parametrų matavimų tenka apsiriboti alternatyviais požymiais, – pateko ar nepateko matuojama parametro vertė už leistinų ribų, nurodytų techninėje dokumentacijoje. Aišku, kad tokiu atveju sumažėja priimamų sprendimų tikslumas arba padidėja matavimų, reikalingų pagrįstiems sprendimams priimti, apimtis. Šiame darbe atkreipiamas dėmesys į tai, kad matavimų apimtis ypač ryškiai padidėja tada, kai techninėje dokumentacijoje nurodytos leistinos ribos labai skiriasi nuo nominalių verčių, kas būdinga šiuolaikinėms aukštos technologijos įmonėms. Matavimų informatyvumui padidinti rekomenduojama dirbtinai nustatyti kontrolines ribas, žymiai griežtesnes už nurodytas technologinėje dokumentacijoje, ir naudoti jas pagrįstiems sprendimams priimti. Pasiūlytos rekomendacijos naudingumas iliustruojamas sprendžiant konkretų gaminių išleidžiamosios atrankinės kontrolės uždavinį.

Reikalingo imties tūrio priklausomybė nuo kontrolinių ribų

Tarkime, kad gaminio (detalės, mazgo) kokybę nusako parametrų vektorius $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_k)$; gaminys laikomas geru, jei $\boldsymbol{X} \in \mathcal{G}$, ir blogu, jei $\boldsymbol{X} \notin \mathcal{G}$. Paprastai $\mathcal{G}$ nusakoma nurodant leistinas kiekvienos vektoriaus $\boldsymbol{X}$ koordinatės ribas, t. y.

$$\mathcal{G} = \{(x_1, \ldots, x_k) : a_i \le x_i \le b_i, i = 1,2,\ldots,k\};$$

gaminys laikomas blogu, jeigu nors viena vektoriaus $\boldsymbol{X}$ koordinatė netenkina sąlygos $a_i \le x_i \le b_i,\ i = 1,\ldots,k.$

Tarkime, kad atsitiktinio vektoriaus $\boldsymbol{X}$ skirstinys priklauso nuo parametro $\theta = \theta(t)$, apibūdinančio technologinio proceso svyravimą kintant laikui t. Sprendžiant produkcijos kokybės kontrolės ar technologinio proceso reguliavimo uždavinius, reikia kuo operatyviau nustatyti parametro $\theta(t)$ nukrypimus nuo nominalios vertės θ_0, naudojant gaminių parametrų matavimo duomenis. Tokie duomenys gali būti atsitiktinai atrinktų n gaminių parametrų vektoriaus $\boldsymbol{X}$ matavimai $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n$. Tačiau ne visada yra techninės galimybės atlikti reguliarius parametrų vektoriaus $\boldsymbol{X}$ matavimus. Kartais tenka apsiriboti siauresne informacija. Pavyzdžiui, techninės galimybės leidžia nustatyti tik skaičių Y_i (čia $i = 1,\ldots,k$) tokių gaminių, kurių vektoriaus $\boldsymbol{X}$ koordinatė X_i netenkina sąlygos $a_i \le X_i \le b_i$, t. y. vietoj kiekybinių požymių tenka apsiriboti alternatyviais požymiais.

Suprantama, kad norint pastebėti tam tikrą θ nuokrypį nuo nominalo θ_0 su tuo pačiu patikimumu, naudojant alternatyvius požymius reikės atlikti daugiau gaminių matavimų, negu naudojant kiekybinius požymius, t. y. išvados bus gaunamos ne taip operatyviai. Ypač daug gaminių matavimų reikia atlikti tada, kai gaminių, kurių parametras X_i (čia $i = 1,\ldots,k$) nepatenka į leistinas ribas (a_i, b_i), yra mažai. Reikia pasakyti, kad aukštos technologijos įmonėse, pavyzdžiui, tokiose kaip „Ekranas", atskiro $\boldsymbol{X}$ parametro patekimo už leistinų ribų tikimybė yra dešimtųjų ar šimtųjų procento eilės.

Tokioje situacijoje, jeigu tenka apsiriboti alternatyviais požymiais, siūlome nustatyti sąlygines leistinas (kontrolines) ribas, kurios būtų žymiai griežtesnės už ribas (a_i, b_i), kai $i = 1,\ldots,k$. Tada tikimybės patekti už šių ribų bus didesnės ir matavimų skaičius, reikalingas parametro $\theta(t)$ nukrypimui nuo nominalo pastebėti, bus gerokai mažesnis.

Kad įsitikintume šio pasiūlymo pagrįstumu, panagrinėsime konkretų pavyzdį, iš kurio matysime, kaip reikalingas imties tūris priklauso nuo $\theta(t)$ nuokrypio nuo nominalo dydžio, kontrolinių ribų ir parinkto išvadų patikimumo.

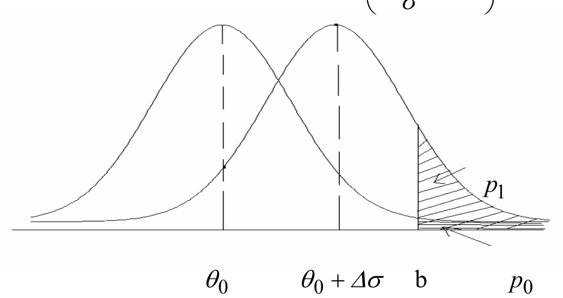
Tarkime, kad gaminio kokybę nusako vienmatis normalusis parametras X, o technologinio proceso svyravimą – atsitiktinio dydžio X vidurkio $\mathbf{M}X$ kitimas: $(X \mid \theta(t)) \sim \mathbf{N}(\theta(t), \sigma^2)$. Taip pat tarkim, kad dispersija σ^2 yra žinoma, vidurkio nominali vertė yra θ_0, o parametro X leistina riba yra vienpusė; taigi gaminys yra geras, jeigu $X \le b$.

Sakykime, kad dėl technologinio proceso pasikeitimo atsitiktinio dydžio X vidurkis padidėjo nuo nominalios vertės θ_0 iki vertės $\theta_0 + \Delta\sigma$. Kartu defektinių gaminių dalis padidėjo nuo vertės

$$p_0 = \mathbf{P}\{X > b \mid \theta_0\} = 1 - \Phi\left(\frac{b - \theta_0}{\sigma}\right) \qquad (1)$$

iki vertės (1 pav.)

$$p_1 = \mathbf{P}\{X > b \mid \theta_0 + \Delta\sigma\} = 1 - \Phi\left(\frac{b - \theta_0}{\sigma} - \Delta\right). \qquad (2)$$



1 pav. Parametro *X* skirstiniai

Hipotezę apie technologinio proceso pasikeitimą tikrinsime dviem būdais: naudodami atsitiktinio dydžio X matavimus $X_1, X_2, \ldots, X_n$ arba naudodami skaičių gaminių *Y*, kurių parametro X matavimas pateko už leistinos ribos *b* iš *N* patikrintųjų.

Tikrinant hipotezę $\mathrm{H}: \mathrm{M}X = \theta_0$ su alternatyva $\mathrm{K}: \mathrm{M}X = \theta_0 + \Delta\sigma$ pagal normalaus atsitiktinio dydžio X imtį $X_1, X_2, \ldots, X_n$, hipotezė H yra atmetama, kai galioja nelygybė

$$\sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \theta_0}{\sigma} > z_\alpha \ , \qquad \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \ ;$$

čia α – pirmosios rūšies klaida, z_α – standartinio normalaus dėsnio α eilės kritinė vertė.

Tarkim, antrosios rūšies klaida lygi β. Tada imties tūris *n*, kurio reikia norint patikrinti H su alternatyva K ir patikimumais (pirmos ir antros rūšies klaidos) α ir β, yra

$$n \ge \left(\frac{z_\alpha + z_\beta}{\Delta}\right)^2. \qquad (3)$$

Naudojant alternatyvų požymį *Y*, hipotezė apie technologinio proceso pasikeitimą faktiškai suvedama į hipotezės $\mathrm{H}: p = p_0$ su alternatyva $\mathrm{K}: p = p_1$ (žr. (1),(2) lygtis) apie binominio dėsnio tikimybės *p* vertę tikrinimą remiantis a.d. $Y \sim B(N, p)$. Hipotezę H priimame, kai $Y \le d$. Gauname nelygybes:

$$\begin{cases} \mathbf{P}\{Y \le d \mid p = p_0\} = \sum_{m=0}^{d} C_N^m p_0^m (1 - p_0)^{N-m} \ge 1 - \alpha, \\ \mathbf{P}\{Y \le d \mid p = p_1\} = \sum_{m=0}^{d} C_N^m p_1^m (1 - p_1)^{N-m} \le \beta. \end{cases}$$

Iš jų, taikydami normaliąją aproksimaciją, gauname [1]:

$$N \ge \left[\frac{z_\alpha\sqrt{p_0(1-p_0)} + z_\beta\sqrt{p_1(1-p_1)}}{p_1 - p_0}\right]^2. \qquad (4)$$

Jeigu klaidos α ir β vienodos, tai santykis $\kappa = N/n$ priklauso ne nuo z_α ir z_β, o nuo pokyčio Δ ir leistinos ribos *b* (nemažinant bendrumo, galima tarti, kad $\sigma = 1$, $\theta_0 = 0$):

$$\kappa = \kappa(\Delta, b) = \frac{N}{n} = \left\{\frac{\Delta\left(\sqrt{p_0(1-p_0)} + \sqrt{p_1(1-p_1)}\right)}{2(p_1 - p_0)}\right\}^2 \ ; \qquad (5)$$

čia p_1 ir p_0 apibrėžti (1) ir (2).

1 lentelėje pateikti skaičiavimo rezultatai imant α=β=0,05, Δ=0,1; 0,2 0,3; b=0,5(0,5)3,5. Šios lentelės antrame stulpelyje pateikti reikalingi imčių tūriai *n* iš (3), atliekant kiekybinius matavimus; trečiame stulpelyje – leistinos ribos *b*; ketvirtame ir penktame stulpeliuose – tikimybės p_0 ir p_1 iš (1) ir (2), kai duoti *b* ir Δ; priešpaskutiniame stulpelyje – reikalingas imties tūris *N*, taikant alternatyvųjį požymį (4); paskutiniame stulpelyje – imčių tūrių santykis $\kappa = N/n$ iš (5).

1 lentelė. Imčių tūrio santykis

Δ	n	b/σ	p_0	p_1	N	κ
0,1	1083	0,5	0,30854	0,34458	1830	1,69
		1,0	0,15866	0,18406	2377	2,19
		1,5	0,06681	0,08076	3791	3,50
		2,0	0,02275	0,02872	7595	7,01
		2,5	0,00621	0,00819	19491	17,99
		3,0	0,00135	0,00187	64845	59,88
		3,5	0,00023	0,00034	280826	259,30
0,2	271	0,5	0,30854	0,38209	450	1,66
		1,0	0,15866	0,21186	573	2,11
		1,5	0,06681	0,09680	895	3,30
		2,0	0,02275	0,03593	1751	6,46
		2,5	0,00621	0,01072	4376	16,15
		3,0	0,00135	0,00256	14163	52,26
		3,5	0,00023	0,00048	59628	220,03
0,3	121	0,5	0,30854	0,42074	197	1,63
		1,0	0,15866	0,24196	246	2,03
		1,5	0,06681	0,11507	376	3,12
		2,0	0,02275	0,04457	719	5,94
		2,5	0,00621	0,01390	1750	14,46
		3,0	0,00135	0,00347	5505	45,49
		3,5	0,00023	0,00069	22507	186,01

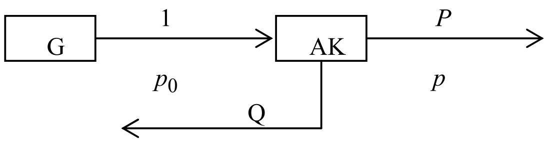
Matome, kad santykis κ ypač staigiai padidėja tada, kai riba *b* yra 3σ eilės, t. y. tikimybė p_0 iš (1) yra dešimtųjų procento eilės, kas yra būdinga šiuolaikinėms aukštos technologijos įmonėms. Šioje zonoje imties tūris *N* gali viršyti *n* apie 50–200 kartų. Perskaičiavus į laiką, tai reikštų, kad, jeigu atliekant kiekybinius matavimus technologinio proceso pokyčiui pastebėti pakaktų, tarkime, vienos dienos, tai, atliekant alternatyvius matavimus, tam reikėtų 2–7 mėnesių, kas praktiškai neturi prasmės.

Nustačius kontrolinę sąlyginę priėmimo ribą, *B*<<*b*, imties tūrio padidėjimas nebus toks didelis ir praktiškai gali būti visai priimtinas.

Panagrinėsime, kaip pasiūlytoji rekomendacija atsispindi gaminių atrankinėje išleidžiamojoje kontrolėje.

Matematinis modelis

Nagrinėsime tokią gamybos ir po jos einančios išleidžiamosios atrankinės kontrolės schemą [2]:



2 pav. Atrankinės kontrolės schema

2 pav. G žymi gamybos operacijas, po kurių gaminiai sukomplektuojami į dydžio N partijas, kurios patenka į atrankinę kontrolę AK. Tarkim, gaminio kokybę nusako parametrų vektorius $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_k)$; gaminys laikomas geru, jei $\mathbf{X} \in \mathcal{G}$. Paprastai $\mathcal{G}$ nusakoma nurodant kiekvienos vektoriaus **X** koordinatės leistinas ribas, t. y. $\mathcal{G} \in \{(x_1, \ldots x_k) : a_i \le x_i \le b_i ; i = 1,2,\ldots,k\}$. Gaminys laikomas defektiniu, jei nors viena **X** koordinatė X_i netenkina sąlygos $a_i \le X_i \le b_i$ $\left(\text{čia } i = 1,2,\ldots,k\right)$. Nagrinėdami visumą produkcijos po operacijos G, tarkime, kad vektorius **X** yra atsitiktinis.Tada defektinių gaminių dalis po operacijos G (vidutinis defektingumo lygis)

$$p_0 = 1 - \mathbf{P}\{\mathbf{X} \in \mathcal{G}\}. \qquad (6)$$

Atrankinės kontrolės metu iš gautos tūrio N partijos atsitiktinai, be grąžinimo yra atrenkama n gaminių. Tikrinant šiuos gaminius gaunami matavimo rezultatai T_n. Priklausomai nuo T_n vertės visa partija yra pripažįstama gera arba bloga: jeigu T_n patenka į priėmimo sritį $\mathcal{G}^*$, tai partija pripažįstama gera, priešingu atveju – bloga.

Geromis pripažintų partijų srauto dydį žymėsime $P = \mathbf{P}\{T_n \in \mathcal{G}^*\}$, o blogomis – $Q = 1 - P$.

Vidutinis produkcijos, kuri yra pripažinta gera, defektingumo lygis $p = 1 - \mathbf{P}\{\mathbf{X} \in \mathcal{G} \mid T_n \in \mathcal{G}^*\}$.

1 pav. schemoje rodyklėmis nurodyti srautai; virš rodyklių nurodytos srautų apimtys, o po rodyklėmis – vidutiniai tų srautų defektingumo lygiai. Atrankinė kontrolė AK yra tuo geresnė, kuo didesnis srautas P ir kuo žemesnis defektingumo lygis p. Suprantama, kad P ir p priklauso nuo statistikos T_n ir nuo srities $\mathcal{G}^*$ parinkimo.

Žinoma, kad imties tūris, reikalingas tam tikram technologinio proceso pokyčiui nustatyti parinktu patikimumu, yra žymiai didesnis, kai vietoj vektoriaus **X** kiekybinių parametrų matavimų atliekami alternatyvaus požymio (pateko ar nepateko a.v. **X** už srities $\mathcal{G}^*$) matavimai. Kadangi atrankinės kontrolės metu faktiškai irgi stengiamasi nustatyti technologinio proceso pokyčius, t. y. dažniau brokuoti partijas, pagamintas išsiderinus technologiniam procesui, kai defektinių gaminių dalis yra didesnė, tai turi atsispindėti ir vertinant atrankinės kontrolės efektyvumą. Tiksliau, esant tam pačiam srauto dydžiui P, vidutinis defektingumo lygis p turėtų būti gerokai mažesnis, kai statistikai T_n imame vektoriaus **X** kiekybinių matavimų rezultatus, negu tada, kai imame alternatyvaus požymio matavimo rezultatus.

Norint pagrįsti šį tvirtinimą toliau nagrinėjamas konkretus atvejis, kai a.v. **X** skirstinys yra normalus, o technologinio proceso svyravimai veikia tik a.v. **X** vidurkį **MX**.

Nagrinėjami trys atrankinės kontrolės variantai:

1) kai atliekami atsitiktinai parinktų n gaminių parametrų vektoriaus **X** kiekybiniai matavimai;

2) kai užregistruojamas tik skaičius Y tokių gaminių iš n patikrintų, kurių nors viena vektoriaus **X** koordinatė netenkina sąlygos $a_i \le X_i \le b_i ; i = 1,2,\ldots,k$;

3) tarpinis variantas, kai užregistruojamas skaičius Y_i tokių gaminių iš n tikrinamų, kurių vektoriaus **X** koordinatė X_i netenkina sąlygos $c_i \le X_i \le d_i ; i = 1,\ldots,k;$ čia (c_i, d_i) yra dirbtinai nustatytos kur kas griežtesnės kontrolinės ribos, t. y. $(c_i, d_i) \subset (a_i, b_i), i = 1,2,\ldots,k.$

Gamybos ir po jos einančios atrankinės kontrolės funkcionavimą formalizuojame taip:

1. Generuojame parametro θ, apibūdinančio technologinį procesą, vertę, laikydami, kad $\theta \sim N_k(\mu, \mathbf{B})$; μ – vidurkių vektorius, **B** – kovariacinė matrica.

2. Tarkime, kad per tą laiką, kol pagaminama tūrio N partija, parametras θ nekinta; esant fiksuotam θ, gaminių partijos pagaminimą traktuojame kaip a.v. **X** nepriklausomų realizacijų generavimą, tardami, kad $(\mathbf{X} \mid \theta) \sim N_k(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma})$; vidutinis defektingumo lygis po gamybos operacijos

$$p_0 = 1 - \mathbf{M}_{\boldsymbol{\Theta}} \mathbf{P}\{\mathbf{X} \in \mathcal{G} \mid \theta\} = 1 - \boldsymbol{\Phi}_k([a,b] \mid \mu, \boldsymbol{\Sigma} + \mathbf{B}) ; (7)$$

čia $\boldsymbol{\Phi}_k([a,b] \mid \mu, \boldsymbol{\Sigma} + \mathbf{B})$ – tikimybė, kad k-matis normalusis vektorius su vidurkių vektoriumi μ ir kovariacine matrica **Σ**+**B** patenka į intervalą

$$[a,b] = \{(x_1, \ldots x_k) : a_i \le x_i \le b_i ; i = 1,2,\ldots,k\}. \qquad (8)$$

3. Atrankinės kontrolės metu iš partijos atsitiktinai, be grąžinimo atrenkame n gaminių ir išmatuojame vektoriaus **X** vertes. Esant fiksuotam θ, gaunama n nepriklausomų vektoriaus **X** realizacijų $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$:

$$(\mathbf{X}_j \mid \theta) \sim N_k(\theta, \boldsymbol{\Sigma}), i = 1,2,\ldots,n. \qquad (9)$$

Vidurkio θ pakankamoji statistika yra stebėtų realizacijų aritmetinis vidurkis

$$\overline{\mathbf{X}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{X}_j ; \quad (\overline{\mathbf{X}} \mid \theta) \sim N_k(\theta, \frac{1}{n} \boldsymbol{\Sigma}). \qquad (10)$$

Norėdami nuspręsti, kurias $\overline{\mathbf{X}}$ vertes reikia įtraukti į priėmimo sritį $\mathcal{G}^*$, raskime $p(\overline{\mathbf{X}})$ partijų vidutinį defektingumo lygį, kai vertė yra fiksuota:

$$p(\overline{\mathbf{X}}) = 1 - \mathbf{P}\{\mathbf{X} \in \mathcal{G} \mid \overline{\mathbf{X}}\}. \qquad (11)$$

Norint rasti **X** sąlyginį skirstinį, kai $\overline{\mathbf{X}}$ fiksuotas, reikia pažymėti, jog priimtos sąlygos yra ekvivalenčios tam, kad

$$\begin{cases} \mathbf{X} = \boldsymbol{\theta} + \mathbf{e}, \\ \overline{\mathbf{X}} = \boldsymbol{\theta} + \overline{\mathbf{e}}; \end{cases} \tag{12}$$

čia $\boldsymbol{\theta}, \mathbf{e}, \overline{\mathbf{e}}$ yra nepriklausomi dydžiai; $\mathbf{e} \sim N_k(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$; $\boldsymbol{\theta} \sim N_k(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{B})$; $\overline{\mathbf{e}} \sim N_k(\mathbf{0}, \frac{1}{n}\boldsymbol{\Sigma})$.

Taigi

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \overline{\mathbf{X}} \end{pmatrix} \sim N_{2k}\left(\begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma} + \mathbf{B} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \frac{1}{n}\boldsymbol{\Sigma} + \mathbf{B} \end{pmatrix} \right). \tag{13}$$

Naudodamiesi daugiamačio normalaus skirstinio savybėmis, gauname:

$$\begin{cases} (\mathbf{X} \mid \overline{\mathbf{X}}) \sim N_k(\mu(\overline{\mathbf{X}}), \boldsymbol{\Sigma}_1), \\ \mu(\overline{\mathbf{X}}) = \mu + \mathbf{B}\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{\Sigma} + \mathbf{B} \right)^{-1} (\overline{\mathbf{X}} - \mu), \\ \boldsymbol{\Sigma}_1 = \boldsymbol{\Sigma} + \mathbf{B} - \mathbf{B}\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{\Sigma} + \mathbf{B} \right)^{-1} \mathbf{B}. \end{cases} \tag{14}$$

Taigi

$$p(\overline{\mathbf{X}}) = 1 - \boldsymbol{\Phi}_k([a,b] \mid \mu(\overline{\mathbf{X}}), \boldsymbol{\Sigma}_1). \tag{15}$$

Natūralu geromis pripažinti tokias partijas, kurių $p(\overline{\mathbf{X}})$ yra kuo mažesnis, t. y. partijų priėmimo sritis $\mathcal{G}^*$ turi tokį pavidalą:

$$\mathcal{G}^* = \mathcal{G}^*(c) = \{\overline{\mathbf{X}} : p(\overline{\mathbf{X}}) \le c\}. \tag{16}$$

Tokių partijų aibės vidutinis defektingumo lygis

$$p = p_c = 1 - \mathbf{P}\{\mathbf{X} \in \mathcal{G} \mid \overline{\mathbf{X}} \in \mathcal{G}^*(c)\} =$$
$$= 1 - \frac{\mathbf{M}_\theta \mathbf{P}\{\mathbf{X} \in \mathcal{G},\ \ \overline{\mathbf{X}} \in \mathcal{G}^*(c) \mid \theta\}}{\mathbf{M}_\theta \mathbf{P}\{\overline{\mathbf{X}} \in \mathcal{G}^*(c) \mid \theta\}}. \tag{17}$$

Matome, kad

$$\left(\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \overline{\mathbf{X}} \end{pmatrix} \middle| \theta \right) \sim N_{2k}\left(\begin{pmatrix} \theta \\ \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & \frac{1}{n}\Sigma \end{pmatrix} \right). \tag{18}$$

Nagrinėsime kitą atrankinės kontrolės variantą, paremtą alternatyvaus požymio matavimais.

Tarkime, kad galime užregistruoti tik skaičių Y tokių gaminių iš n patikrintųjų, kurių parametrų vektorius $\mathbf{X}$ nepatenka į sritį $\mathcal{G}$. Kai θ yra fiksuotas, a.d. Y turi binominį skirstinį $(Y \mid \theta) \sim B(n, q(\theta))$, tai

$$q(\theta) = 1 - \mathbf{P}\{\mathbf{X} \in \mathcal{G} \mid \theta\} = 1 - \boldsymbol{\Phi}_k([a,b] \mid \theta, \boldsymbol{\Sigma}). \tag{19}$$

Raskime partijų, kurių Y vertė yra fiksuota ir lygi m, vidutinį defektingumo lygį:

$$p'(m) = 1 - \mathbf{P}\{\mathbf{X} \in \mathcal{G} \mid Y = m\} =$$
$$= \frac{\mathbf{M}_\theta\{[q(\theta)]^{m+1}[1-q(\theta)]^{n-m} \mid \theta\}}{\mathbf{M}_\theta\{[q(\theta)]^{m}[1-q(\theta)]^{n-m} \mid \theta\}}. \tag{20}$$

Galima įrodyti, kad [3]

$$p'(0) < p'(1) < \ldots < p'(n). \tag{21}$$

Taigi priėmimo sritis $\mathcal{G}_1^*$ turi tokį pavidalą:

$$\mathcal{G}_1^* = \mathcal{G}_1^*(d) = \{Y : Y \le d\}. \tag{22}$$

Tokių partijų aibės vidutinis defektingumo lygis

$$p' = p'(d) = 1 - \mathbf{P}\{\mathbf{X} \in \mathcal{G} \mid Y \le m\} =$$
$$= \frac{\mathbf{M}_\theta\{\sum_{m=0}^{d} C_n^m [q(\theta)]^{m+1}[1-q(\theta)]^{n-m} \mid \theta\}}{\mathbf{M}_\theta\{\sum_{m=0}^{d} C_n^m [q(\theta)]^{m}[1-q(\theta)]^{n-m} \mid \theta\}}. \tag{23}$$

Nagrinėsime trečiąjį atrankinės kontrolės variantą.

Tarkime, kad galime užregistruoti skaičių Y_i gaminių iš n patikrintųjų, kurių vektoriaus $\mathbf{X}$ i-toji koordinatė X_i nepateko į intervalą (c_i, d_i), $i = 1, \ldots, k$; čia (c_i, d_i) yra dirbtinai nustatytos griežtesnės kontrolės ribos, t. y. $(c_i, d_i) \subset (a_i, b_i)$.

Norėdami supaprastinti išraiškas, tarkime, kad a.v. $\boldsymbol{\theta}$ koordinatės yra nepriklausomos a.d., o a.v. $\mathbf{X}$, kai $\boldsymbol{\theta}$ fiksuotas, koordinatės irgi yra nepriklausomos. Tiksliau, tarkime, kad kovariacinės matricos $\mathbf{B}$ ir $\boldsymbol{\Sigma}$ yra diagonalinės, o jų diagonaliniai elementai yra $\beta_1^2, \beta_2^2, \ldots, \beta_k^2$ ir $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_k^2$. Tada a.v. $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_k)$ koordinatės yra nepriklausomi binominiai dydžiai

$$(Y_i \mid \theta) \sim B(n, q_i(\theta_i)); \quad q_i(\theta_i) = 1 - \mathbf{P}\{c_i \le X_i \le d_i \mid \theta_i\} =$$
$$= 1 - \boldsymbol{\Phi}([c_i, d_i] \mid \theta_i, \sigma_i^2), \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{24}$$

Raskime partijų, kurių vektoriaus $\mathbf{Y}$ vertė yra fiksuota ir lygi

$$\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_k), \tag{25}$$

vidutinį defektingumo lygį $p''(m_1, \ldots, m_k)$

$$p''(m_1, \ldots, m_k) = 1 - \mathbf{P}\{\mathbf{X} \in \mathcal{G} \mid Y_1 = m_1, \ldots, Y_k = m_k\} =$$
$$= 1 - \frac{\mathbf{M}_\theta\{\prod_{j=1}^{k} P_j(\theta_j) \prod_{i=1}^{k} C_n^{m_i}[q_i(\theta_i)]^{m_i}[1-q_i(\theta_i)]^{n-m_i}\}}{\mathbf{M}_\theta\{\prod_{i=1}^{k} C_n^{m_i}[q_i(\theta_i)]^{m_i}[1-q_i(\theta_i)]^{n-m_i}\}}; \tag{26}$$

čia $p_i(\theta_i) = \mathbf{P}\{a_i \le X_i \le b_i \mid \theta_i\} = \boldsymbol{\Phi}([a_i, b_i] \mid \theta_i, \sigma_i^2)$.

Todėl priėmimo sritis $\mathcal{G}_2^*$ turėtų būti tokio pavidalo:

$$\mathcal{G}_2^* = \mathcal{G}_2^*(c) = \{(Y_1, Y_2, \ldots, Y_k) : p''(Y_1, Y_2, \ldots, Y_k) \le c\}. \tag{27}$$

Tokių partijų aibės vidutinis defektingumo lygis

$$p'' = p''(c) = 1 - \mathbf{P}\{\mathbf{X} \in \mathcal{G} \mid \mathbf{Y} \in \mathcal{G}_2^*\} =$$
$$= 1 - \frac{\mathbf{M}_\theta \mathbf{P}\{\mathbf{X} \in \mathcal{G},\ \ \mathbf{Y} \in \mathcal{G}_2^* \mid \theta\}}{\mathbf{M}_\theta \mathbf{P}\{\mathbf{Y} \in \mathcal{G}_2^* \mid \theta\}}. \tag{28}$$

Skaitinis pavyzdys

Išnagrinėtiems trims atrankinės kontrolės variantams palyginti panagrinėkime skaitinį pavyzdį, atlikę supaprastinimus ir sumažinę kintamųjų skaičių.

Tarkime, kad k=10, kovariacinės matricos **B** ir **Σ** yra diagonalinės, o dispersijos vienodos: $\sigma_1^2 = \ldots = \sigma_k^2 = 1$; $\beta_1^2 = \ldots = \beta_k^2 = 0{,}25$; $\mu_1 = \ldots = \mu_k = 0$; $a_1 = \ldots = a_k = -3{,}455$; $b_1 = \ldots = b_k = 3{,}455$; n=50; nagrinėsime du sugriežtintų kontrolinių ribų atvejus: $d_i = -c_i = 2{,}19$; $d_i = -c_i = 1{,}84$; $i = 1,2,\ldots,k$.

Vidutinis defektingumo lygis po gamybos operacijos

$$p_0 = 1 - \mathbf{P}\{\mathbf{X} \in \mathcal{G}\} = 1 - \left[\mathbf{\Phi}\left(2b/\sqrt{5}\right) - \mathbf{\Phi}\left(-2b/\sqrt{5}\right)\right]^{10} \approx 0{,}02. \quad (29)$$

Labiausiai defektingumo lygis sumažėja tada, kai matuojami kiekybiniai parametrai ir $\bar{x} = 0$:

$$p(0) = 1 - \mathbf{\Phi}_k([a,b] \mid \mu(\theta), \mathbf{\Sigma}_1) = 0{,}0062. \quad (30)$$

Skaičiavimo rezultatai pateikiami 2 lentelėje.

2 lentelėje pateikiami geromis pripažintų partijų srautai P, P', P_1'', P_2'' ir vidutiniai šių srautų defektingumo lygiai p, p', p_1'', p_2''.

Matome, kad, esant tam pačiam defektingumo lygiui p, srauto dydis P yra žymiai didesnis, kai atliekami kiekybiniai matavimai, negu tuo atveju, kai naudojamas alternatyvus požymis. Nustatę sąlygines kontrolines ribas, gauname tarpinius rezultatus.

2 lentelė. Srauto P priklausomybė nuo p

Kiekybiniai požymiai			Alternatyvus požymis		
c	P	p	d	P'	p'
0,010	0,0427	0,0089	0	0,3976	0,0168
0,011	0,0851	0,0100	1	0,7385	0,0181
0,012	0,1377	0,0102	2	0,9053	0,0190
0,013	0,2010	0,0110	3	0,9685	0,0195
0,015	0,3322	0,0130	4	0,9898	0,0198
0,016	0,3980	0,0130			
0,017	0,4600	0,0135			
0,018	0,5179	0,0142			
0,020	0,6219	0,0150			
0,024	0,7687	0,0164			
0,028	0,8600	0,0175			
0,032	0,9137	0,0183			
0,040	0,9660	0,0194			

2 lentelės tęsinys

Kontrolinė riba d_i=2,19			Kontrolinė riba d_i=1,84		
d	P_1''	p_1''	d	P_2''	p_2''
3	0,0683	0,0119	6	0,0661	0,0115
4	0,2221	0,0131	8	0,2928	0,0133
5	0,4106	0,0143	10	0,5455	0,0150
6	0,5765	0,0154	12	0,7302	0,0164
7	0,7033	0,0162	14	0,8464	0,0174
8	0,7946	0,0170	16	0,9150	0,0182
9	0,8585	0,0176	18	0,9541	0,0188
10	0,9027	0,0180	20	0,9758	0,0192
11	0,9331	0,0184			
12	0,9540	0,0187			

Tarkime, kad vidutinis defektingumo lygis p=0,0168 yra priimtinas. Atliekant alternatyvų matavimą, šis lygis yra pasiekiamas, kai priėmimo skaičius d=0 ir priimtų partijų dalis sudaro apie 40 % (atmesta apie 60 % partijų). Atliekant kiekybinius matavimus, toks lygmuo pasiekiamas, kai priimtų partijų srauto dydis P yra apie 80 %, t. y. išbrokuojama apie 20 % partijų (tris kartus mažiau). Nustatant sąlygines kontrolines ribas, tas pats lygis pasiekiamas, kai priimtų partijų srauto dydis yra apie 75 % (grąžinama apie 25 %).

Pastaba. Trečiame variante skaičiavimai atlikti imant paprastesnę stačiakampio pavidalo sritį $\mathcal{G}^* = \{\mathbf{Y} : Y_i \le d, i = 1,\ldots,k\}$, o ne optimalią sritį (7).

Literatūra

1. **Kruopis J**. Matematinė statistika. – Vilnius: Mokslo ir enciklopedijų leidykla, 1993. – 416 p.
2. **Vaišvila A., Kalnius R., Eidukas D.** Kineskopų priimamosios kontrolės matematiniai modeliai // Elektronika ir elektrotechnika.– Kaunas: Technologija, 2002. –Nr. 5(40). – P. 7-15.
3. **Беляев Ю.К.** Вероятностные методы выборочного контроля. – М.: Наука, 1975. – 407 с.

Pateikta spaudai 2004 02 18

J. Kruopis, A.Vaišvila. Kontrolė sugriežtinant kontrolines ribas // Elektronika ir elektrotechnika. – Kaunas: Technologija, 2005. – Nr. 1(57). – P. 62–66.

Išnagrinėtas imties tūrio, reikalingo pagrįstiems sprendimams priimti, padidėjimas vietoj kiekybinių parametrų matavimų imant alternatyvius požymius. Matavimų informatyvumui padidinti rekomenduojama dirbtinai nustatyti sugriežtintas kontrolines ribas. Rekomendacija pritaikyta sprendžiant gaminių atrankinės išleidžiamosios kontrolės uždavinį. Il. 2, bibl. 3 (lietuvių kalba; santraukos lietuvių, anglų ir rusų k.).

J. Kruopis, A.Vaišvila. The Control using More Rigid Control Limits // Electronics and Electrical Enginering. – Kaunas: Technologija, 2005. – No. 1(57). - P. 62–66.

The increase of the sample size necessary for acceptance of the correct decisions at transition from quantitative measurements of parameters to alternative attributes is investigated. The recommendation to introduce more rigid control limits for increase infomativeness of measurements is given. The recommendation is applied in a task of the final sampling control of products. Ill. 2, bibl. 3 (in Lithuanian; summaries in Lithuanian, Russian, English).

Ю. Круопис, А. Вайшвила. Контроль с использованием более жестких контрольных границ // Электроника и электротехника. – Каунас: Технология, 2005. - № 1(57). - С. 62–66.

Исследовано увеличение объема выборки, необходимого для принятия обоснованных решений при переходе от количественных измерений параметров к альтернативным признакам. Дана рекомендация об искусственном введении более жестких контрольных границ для увеличения информативности измерений. Рекомендация применена в задаче выпускного выборочного контроля изделий. Ил. 2, библ. 3 (на литовском языке; рефераты на литовском, английском и русском яз.).