VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ IR SKAIČIAVIMO MATEMATIKOS KATEDRA

Magistro darbas

Laiko atžvilgiu periodinė Stokso sistema su nehomogenine kraštine sąlyga

Time periodic Stokes system with nonhomogeneous boundary condition

Rita Juodagalvytė

Darbo vadovė: Dr. Kristina Kaulakytė

VILNIUS 2017

Turinys

Įvadas

Navjė - Stokso lygtys yra diferencialinės lygtys dalinėmis išvestinėmis, kurios aprašo klampių nespūdžių skysčių tekėjimą. Šios lygtys buvo suformuluotos XIX a., o šių lygčių matematinė teorija pradėta plėtoti XX a. Tiesinė Navjė - Stokso lygčių sistema dar vadinama Stokso sistema.

Pirmasis periodines pagal laiką Navjė - Stokso lygtis pradėjo nagrinėti Serrin [9]. Jis darė prielaidą, kad periodiniams pagal laiką duomenims f ir bet kokiai pradinei sąlygai, sprendinys $u(x,t)$ priklausantis nuo tos pradinės reikšmės, konverguoja, kai $t \to \infty$ ir gauname periodinį pagal laiką sprendinį. Panašiu laiku šias lygtis nagrinėjo ir Yudovich [2] bei Prodi [7], kurie ieškojo periodinio pagal laiką sprendinio pradiniam uždaviniui. Pirmasis griežtą įrodymą pateikė Prouse [8]. Jis įrodė periodinio pagal laiką sprendinio egzistavimą dvimatėje srityje.

Šiame darbe nagrinėjama periodinė pagal laiką Stokso sistema su nehomogenine kraštine sąlyga. Darbo tikslas įrodyti šios sistemos silpnojo sprendinio egzistavimą ir vienatį neaprėžtoje srityje Ω, turinčioje išėjimą į begalybę. Uždavinys sprendžiamas keliais etapais. Pirmiausia panaikinamas Stokso sistemos kraštinės sąlygos nehomogeniškumas. Tai atliekama sukonstruojant tinkamą kraštinių duomenų pratęsimą, kurio pagalba nehomogeninę sistemą galime suvesti į ją atitinkančią homogeninę sistemą. Tai atlikus gauname naują periodinę pagal laiką Stokso sistemą su homogenine kraštine sąlyga ir ieškome jos silpnojo sprendinio, tačiau susiduriame su dar viena problema - neaprėžta sritimi. Šią problemą taip pat sprendžiame keliais etapais. Pirmiausia specialiu būdu pasirenkame aprėžtų sričių šeimą Ω_k ir įrodome silpnojo sprendinio egzistavimą ir vienatį kiekvienoje iš jų. Vėliau, perėję prie ribos, kai $k \to +\infty$, padengiame nagrinėjamą neaprėžtą sritį aprėžtomis sritimis ir gauname silpnojo sprendinio egsistavimą ir vienatį visoje nagrinėjamoje srityje. Ieškomą silpnąjį sprendinį užrašę kaip sukonstruoto pratęsimo ir homogeninio uždavinio silpnojo sprendinio sumą suformuluojame teoremą apie periodinės pagal laiką Stokso sistemos su nehomogenine kraštine sąlyga silpnojo sprendinio egzistavimą ir vienatį.

1 skyrius

1.1 Žymėjimai, pagalbinės nelygybės ir teoremos

Pastovius dydžius žymėsime $C, C_j, c, j = 1, 2, ...$, kurie gali priklausyti nuo parametrų. Skirtingose vietose ta pačia raide c gali būti pažymėtos skirtingos konstantos.

Tegu V - Banacho erdvė. Elemento u norma funkcinėje erdvėje V žymima $||u||_V$. Vektorinės erdvės elementus žymėsime pusjuodėmis raidėmis. Vektorines ir skaliarines erdves žymėsime vienodai. Sakysime, kad vektorius $\mathbf{u} = (u_1, ..., u_n)$ priklauso erdvei V, jei visos jo komponentės $u_1, ..., u_n$ priklauso V, o jo normą apibrėšime taip:

$$||\mathbf{u}||_V = \sum_{i=1}^{n} ||u_i||_V.$$

Tarkime $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ atviroji sritis. $C^\infty(\Omega)$ žymėsime visų be galo diferencijuojamų srityje Ω funkcijų aibę, o $C_0^\infty(\Omega)$ žymėsime visų funkcijų iš $C^\infty(\Omega)$ poaibį su kompaktine atrama srityje Ω. $L^q(\Omega)$ ir $W^{k,q}(\Omega)$ žymėsime atitinkamai Lebego ir Sobolevo erdves su normomis apibrėžtomis tokiu būdu:

$$||u||_{L^q(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^q dx \right)^{1/q}, \quad ||u||_{W^{k,q}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=0}^{k} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^q dx \right)^{1/q},$$

čia q ir k duotieji neneigiami sveikieji skaičiai, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ - multiindeksas, $\alpha_j,\ j = 1, 2, ..., n$ - sveikieji neneigiami skaičiai, $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$, $D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$ - funkcijos $u(x)$ dalinė $|\alpha|$ eilės išvestinė. $W^{k-1/q,q}(\partial\Omega)$ yra funkcijų iš $W^{k,q}(\Omega)$ pėdsako erdvė krašte $\partial\Omega$ su norma

$$||u||_{W^{k-1/q,q}(\partial\Omega)} = \inf\{||\hat{u}||_{W^{k,q}(\Omega)} : \hat{u} = u \ \text{ ant srities krašto } \ \partial\Omega\}.$$

$\mathring{W}^{k,q}(\Omega)$ - aibės $C_0^\infty(\Omega)$ uždarinys $W^{k,q}(\Omega)$ normos prasme; $W^{k,q}_{loc}(\overline{\Omega})$ žymėsime, jei $u \in W^{k,q}(\Omega')$ kiekvienai aprėžtai sričiai $\Omega', \Omega' \subset \Omega$.

Tegu $D(\Omega)$ - vektorinės aibės $C_0^\infty(\Omega)$ uždarinys Dirichlė normos prasme $||\mathbf{u}||_{D(\Omega)} = ||\nabla \mathbf{u}||_{L^2(\Omega)}$. $D(\Omega)$ yra Hilberto erdvė su skaliarine sandauga

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int\limits_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, dx;$$

čia $\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} = \sum\limits_{j=1}^n \nabla u_j \cdot \nabla v_j = \sum\limits_{j=1}^n \sum\limits_{k=1}^n \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_k}$. Pažymėkime $J_0^\infty(\Omega) = \{\mathbf{v} \in C_0^\infty(\Omega) : \mathrm{div}\mathbf{v} = 0\}$ - visų be galo diferencijuojamų srityje Ω, finičiųjų, solenoidinių funkcijų aibė. $H(\Omega) = \{\mathbf{u} \in D(\Omega) : \mathrm{div}\mathbf{u} = 0\}$ - $J_0^\infty(\Omega)$ uždarinys Dirichlė normos prasme.

1.1.1 lema. *(Koši - Švarco nelygybė). $\forall f \in L^2(\Omega)$, $\forall g \in L^2(\Omega)$ teisinga Koši-Švarco nelygybė:*

$$\left| \int\limits_\Omega f(x) g(x) dx \right| \leqslant \left(\int\limits_\Omega |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int\limits_\Omega |g(x)|^2 dx \right)^{1/2} = ||f||_{L^2(\Omega)} ||g||_{L^2(\Omega)}.$$

Koši - Švarco nelygybė yra atskiras Hiolderio nelygybės atvejis. Hiolderio nelygybę galima rasti [1] knygoje.

1.1.2 teorema. *(Fredholmo). Tegu $B : H \to H$ - tiesinis visiškai tolydus operatorius, čia H - Hilberto erdvė. Lygtis*

$$u - Bu = h, \quad h \in H,$$

turi sprendinį $u \in H$ tada ir tik tada, kai

$$(h, \omega) = 0 \quad \forall \omega \in H : \omega - B^* \omega = 0,$$

čia B^* operatoriaus B jungtinis operatorius. Jeigu lygtis $\omega - B^*\omega = 0$ turi tik trivialų sprendinį $\omega = 0$, tai $\forall\, h \in H$ lygtis $u - Bu = h$ turi vienintelį sprendinį $u \in H$.

1.1.3 teorema. *(Ryso). Tegu f - tiesinis tolydusis funkcionalas Hilberto erdvėje H, o jos jungtinė erdvė yra H^* (visų tolydžiųjų tiesinių funkcionalų $f : H \to \mathbb{R}$ erdvė). Tada egzistuoja vienintelis elementas $v_f \in H$, su kuriuo*

$$f(u) = (u, v_f) \;\; \forall u \in H$$

ir $||f||_{H^*} = ||v_f||_H$. Ir atvirkščiai, $\forall v \in H$ skaliarinė sandauga (u, v) apibrėžia tiesinį tolydųjį funkcionalą $f_v(u)$ su norma $||f_v||_{H^*} = ||v||_H$.

1.1.4 teorema. *(Puankarė - Fridrichso nelygybė). Tegu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - aprėžtoji sritis. Tada su bet kuria funkcija $u \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$ teisinga nelygybė*

$$\int\limits_\Omega |u(x)|^2 dx \leqslant c_p \int\limits_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx,$$

čia konstanta $c_p = c(diam(\Omega))^2$ ir konstanta c nepriklauso nuo srities.

1.1.5 teorema. *(Sobolevo įdėties teorema). Tegu* $G \subset \mathbb{R}^n$ *- aprėžtoji sritis.*

a) Jeigu $l \geqslant 1,\ q \geqslant 1,$

$$n \geqslant ql, \quad r \leqslant \frac{qn}{n-ql},$$

tai erdvė $W^{l,q}(G)$ *įdedama į* $L^r(G)$. *Be to,*

$$||u||_{L^r(G)} \leqslant c||u||_{W^{l,q}(G)}, \ \forall u \in W^{l,q}(G).$$

b) Jeigu $n < ql$, *tai* $W^{l,q}(G)$ *įdedama į* $C^h(\overline{G})$, *čia* $h \leqslant \frac{ql-n}{q}$. *Be to,*

$$||u||_{C^h(\overline{G})} \leqslant c||u||_{W^{l,q}(G)}, \ \forall u \in W^{l,q}(G).$$

c) Jeigu $n \geqslant ql$ *ir* $r < \frac{qn}{n-ql}$, *tai įdėties operatorius* $I : W^{l,q}(G) \hookrightarrow L^r(G)$ *yra visiškai tolydus. Tuo atveju, kai* $n < ql$, $h < \frac{ql-n}{q}$, *įdėties operatorius* $I : W^{l,q}(G) \hookrightarrow C^h(\overline{G})$ *taip pat yra visiškai tolydus.*

1.1.6 lema. *Tarkime, kad* Ω *- aprėžtoji sritis,* $\partial\Omega$ *tenkina Lipšico sąlygą,* $\boldsymbol{\varphi} \in W^{1/2,2}(\partial\Omega)$, *o* $\int\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n} dS = 0$. *Tada egzistuoja funkcijos* $\boldsymbol{\varphi}$ *solenoidinis pratęsimas* $\boldsymbol{\Phi} \in W^{1,2}(\Omega)$ *tenkinantis sąlygas:*

$$\begin{cases} \text{div}\boldsymbol{\Phi} = 0, \quad x \in \Omega \\ \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\varphi}, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Be to, galioja įvertis

$$||\boldsymbol{\Phi}||_{W^{1,2}(\Omega)} \leqslant c||\boldsymbol{\varphi}||_{W^{1/2,2}(\partial\Omega)}.$$

Lemos įrodymą galima rasti [4] straipsnyje.

1.1.7 lema. *Tarkime* Ω *- aprėžtoji sritis,* $\partial\Omega$ *- tenkina Lipšico sąlygą,* $\mathcal{L} \subseteq \partial\Omega$, $\text{meas}(\mathcal{L}) > 0$, *o funkcija* $\mathbf{h} \in W^{1/2,2}(\partial\Omega)$ *tenkina sąlygas* $\int\limits_{\mathcal{L}} \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} dS = 0$ *ir* $\text{supp}\,\mathbf{h} \subset \mathcal{L}$. *Tuomet funkcija* $\mathbf{h}$ *gali būti pratęsta į sritį* Ω *tokiu pavidalu:*

$$\mathbf{b}_0^*(x,\varepsilon) = \text{curl}(\chi(x,\varepsilon)\mathbf{E}(x)),$$

čia $\mathbf{E} \in W^{2,2}(\Omega), \quad \text{curl}\,\mathbf{E}|_{\partial\Omega} = \mathbf{h}$, *o* χ *yra Hopfo tipo nupjautinė funkcija, t.y.,* χ *yra glodi,* $\chi(x,\varepsilon) = 1$ *ant kreivės* $\mathcal{L}$, $\text{supp}\,\chi$ *yra mažoje* $\mathcal{L}$ *aplinkoje, be to,*

$$|\nabla\chi(x,\varepsilon)| \leqslant \frac{\varepsilon c}{dist(x,\mathcal{L})},$$

čia konstanta c *nepriklauso nuo* ε.

Paskutinės lemos įrodymą galima rasti [5] straipsnyje.

1.1.8 apibrėžimas. *Reguliarizuotas atstumas* $\Delta_G(x)$ *nuo taško* x *iki uždaros aibės* $G \subset \mathbb{R}^n$ *yra be galo diferencijuojama aibėje* $\mathbb{R}^n \setminus G$ *funkcija tenkinanti nelygybes:*

$$a_1 d_G(x) \leqslant \Delta_G(x) \leqslant a_2 d_G(x), \quad |D^\alpha \Delta_G(x)| \leqslant a_3 d_G^{1-|\alpha|}(x), \tag{1.1}$$

čia $d_G(x) = dist(x, G)$ *- tikrasis atstumas nuo* x *iki aibės* G*, teigiamos konstantos* a_1, a_2 *priklauso nuo* n*, o* a_3 *priklauso nuo* n *ir nuo diferencijavimo eilės* $|\alpha|$ *(žr. [10]).*

Darbe naudosime nupjautines funkcijas $0 \leqslant \Psi \leqslant 1$ ir ϱ, kurios yra monotoniškos, glodžios bei turi tokias išraiškas:

$$\Psi(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0, \\ 1, & t \geqslant 1, \end{cases} \tag{1.2}$$

$$\varrho(\tau) = \begin{cases} \frac{a_1}{2} d_0, & \tau \leqslant \frac{a_2}{2} d_0, \\ \tau, & \tau \geqslant a_2 d_0, \end{cases} \tag{1.3}$$

čia d_0 yra mažas teigiamas skaičius, o a_1 ir a_2 yra konstantos apibrėžtos (1.1) nelygybėje.

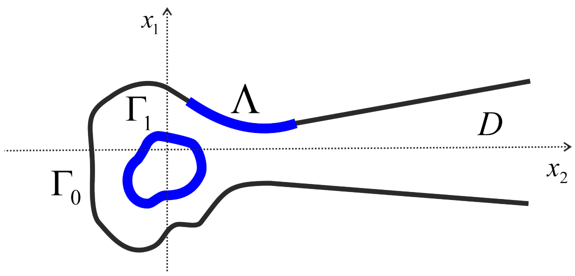
1.2 Uždavinio formulavimas

Nagrinėjame laiko atžvilgiu periodinę Stokso lygčių sistemą su nehomogenine kraštine sąlyga:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t - \nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad (x,t) \in \Omega \times (0, 2\pi), \\ \mathrm{div}\mathbf{u} = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0, 2\pi), \\ \mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0, 2\pi), \\ \mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}(x, 2\pi), \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.4}$$

čia $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(x)$ - kraštinė sąlyga, $x = (x_1, x_2)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ - sritis, turinti išėjimą į begalybę $D = \{x \in \Omega : |x_1| < g(x_2), x_2 > R_0\}$, t.y. $\Omega = \Omega_0 \cup D$, $\Omega_0 = G_0 \setminus \overline{G}_1$, $\overline{G}_1 \subset G_0$, G_0 ir G_1 aprėžtos vienjungės sritys. Pažymėkime $\partial G_1 = \Gamma_1$, taigi $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_0$.

Tarkime, kad kraštinė sąlyga $\boldsymbol{\varphi}$ turi kompaktinę atramą, $\mathrm{supp}\,\boldsymbol{\varphi} \subset \Gamma_1 \cup \Lambda$, tuomet $\Lambda = \mathrm{supp}\,\boldsymbol{\varphi} \cap \Gamma_0 \subset \Gamma_0 \cap B_{R_0}(0)$, čia $B_{R_0}(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < R_0, R_0 > 0\}$ - rutulys. Koordinačių sistemos pradžios taškas $(0,0)$ yra "skylės" G_1 viduje.



1.1 pav.: Sritis Ω

Funkcija g tenkina Lipšico sąlygą:

$$|g(t_1) - g(t_2)| \leqslant L|t_1 - t_2|, \quad t_1, t_2 \geqslant R_0, \quad g(t) \geqslant g_0 = const > 0 \;\; \forall t. \tag{1.5}$$

Pažymėkime

$$\Omega_k = \Omega_0 \cup D_k, \tag{1.6}$$

čia $D_k = \{x \in D : x_2 < R_k\}$, $R_1 = 1, R_{k+1} = R_k + \frac{g(R_k)}{2L}$, $k \geqslant 1$.

Tegul

$$\mathbb{F}^{(inn)} = \int\limits_{\Gamma_1} \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n} dS, \quad \mathbb{F}^{(out)} = \int\limits_{\Lambda} \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n} dS \tag{1.7}$$

yra srautai per vidinį ir išorinį srities kraštus, $\mathbf{n}$ - vienetinis išorinės normalės vektorius. Kadangi kraštinė sąlyga $\boldsymbol{\varphi}$ nepriklauso nuo laiko, tai ir srautai $\mathbb{F}^{(inn)}$ ir $\mathbb{F}^{(out)}$ nepriklauso nuo t, t.y., srautai yra pastovūs dydžiai.

Divergencijos lygtį $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$ suintegravę dalimis sritimi $\Omega \cap B_R(0)$, pakankamai dideliems R, turime:

$$0 = \int\limits_{\Omega\cap B_R(0)} \operatorname{div}\mathbf{u} dx = \int\limits_{\partial(\Omega\cap B_R(0))} \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} dx = \int\limits_{\Gamma_1} \boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{n} dS + \int\limits_{\Lambda} \boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{n} dS + \int\limits_{\sigma(R)} \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} dS, \tag{1.8}$$

čia $\sigma(R)$ išėjimo D skerspjūvis. Kadangi skystis yra nespūdus, todėl iš (1.7) ir (1.8) turime, kad

$$\int\limits_{\sigma(R)} \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} dS = -(\mathbb{F}^{(inn)} + \mathbb{F}^{(out)}). \tag{1.9}$$

Apibrėžkime (1.4) uždavinio silpnąjį sprendinį. Imkime funkciją $\boldsymbol{\eta} \in L^2(0, 2\pi; C_0^\infty(\Omega))$ su $\operatorname{div}\boldsymbol{\eta} = 0$. Padauginę pirmąją (1.4) sistemos lygtį skaliariškai iš funkcijos $\boldsymbol{\eta}$ ir suintegravę dalimis sritimi Ω, gauname:

$$\int\limits_\Omega \mathbf{u}_t(x,t)\cdot\boldsymbol{\eta}(x,t)dx + \nu\int\limits_\Omega \nabla\mathbf{u}(x,t) : \nabla\boldsymbol{\eta}(x,t)dx = \int\limits_\Omega \mathbf{f}(x,t)\cdot\boldsymbol{\eta}(x,t)dx.$$

Suintegravę pagal laiką nuo 0 iki 2π, gauname integralinę tapatybę:

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_\Omega \mathbf{u}_t(x,t)\cdot\boldsymbol{\eta}(x,t)dxdt + \nu\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_\Omega \nabla\mathbf{u}(x,t) : \nabla\boldsymbol{\eta}(x,t)dxdt = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_\Omega \mathbf{f}(x,t)\cdot\boldsymbol{\eta}(x,t)dxdt. \tag{1.10}$$

Tegul $L^2_\beta(\Omega)$ yra svorinė erdvė su norma

$$||w||_{L^2_\beta(\Omega)} = \sqrt{\int\limits_D |w|^2 g^{2\beta} dx} + \sqrt{\int\limits_{\Omega_0} |w|^2 dx}. \tag{1.11}$$

Nagrinėjamu atveju $\beta = 1$.

1.2.1 apibrėžimas. *Tegul išorinė jėga* $\mathbf{f} \in L^2(0, 2\pi; L^2_1(\Omega))$, *o kraštinė sąlyga* $\boldsymbol{\varphi} \in W^{1/2,2}(\partial\Omega)$ *turi kompaktinę atramą. Tuomet solenoidinis vektorinis laukas* $\mathbf{u} \in L^2(0, 2\pi; W^{1,2}_{loc}(\overline{\Omega}))$, $\mathbf{u}_t \in L^2(0, 2\pi; L^2_{loc}(\overline{\Omega}))$ *tenkinantis kraštinę* $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{\varphi}$ *bei periodiškumo* $\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}(x, 2\pi)$ *sąlygas, vadinamas* (1.4) *uždavinio silpnuoju sprendiniu, jeigu tenkina* (1.10) *integralinę tapatybę su kiekviena funkcija* $\boldsymbol{\eta} \in L^2(0, 2\pi; J_0^\infty(\Omega))$.

Nagrinėjant (1.4) uždavinį susiduriame su šiomis problemomis - nehomogenine kraštine sąlyga ir neaprėžta sritis. Pirmąją problemą sprendžiame sukonstruodami tinkamą kraštinių duomenų pratęsimą $\mathbf{A} = \mathbf{B}^{(inn)} + \mathbf{B}^{(out)}$, kurio pagalba nehomogeninį (1.4) uždavinį suvedame į jį atitinkantį homogeninį uždavinį. Neaprėžtos srities problema sprendžiama taip: pirmiausia pasirenkame tokią aprėžtų sričių šeimą Ω_k (žr. (1.6) formulę), kuri padengia visą sritį Ω, kai $k \to +\infty$. Tuomet įrodome apytikslio silpnojo sprendinio egzistavimą ir vienatį aprėžtoje srityje Ω_k, o perėję prie ribos, įrodome apytikslio sprendinio konvergavimą į tikslų sprendinį taip pat aprėžtoje srityje Ω_k. Galiausiai, perėję prie ribos pagal sritį, kai $k \to +\infty$, gauname silpnojo sprendinio egzistavimą ir vienatį visoje srityje Ω.

Pagrindinį rezultatą - (1.4) uždavinio vienintelio silpnojo sprendinio egzistavimą - suformuluosime teoremos pavidalu.

1.2.2 teorema. *Tarkime, kad turime sritį $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ su išėjimu į begalybę, o kraštinė sąlyga $\boldsymbol{\varphi} \in W^{1/2,2}(\partial\Omega)$ turi kompaktinę atramą, išorinė jėga $\mathbf{f} \in L^2(0, 2\pi; L^2_1(\Omega))$ yra periodinis pagal laiką vektorinis laukas. Jeigu $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx_2}{g^3(x_2)} < +\infty$, tai (1.4) uždavinys turi vienintelį silpnąjį sprendinį $\mathbf{u}$, kuris tenkina įvertį*

$$\begin{aligned} &||\mathbf{u}_t||_{L^2(0,2\pi;L^2(\Omega))} + ||\nabla \mathbf{u}||_{L^2(0,2\pi;L^2(\Omega))} \\ &\leqslant c\left(\left(||\boldsymbol{\varphi}||^2_{W^{1/2,2}(\partial\Omega)}\left(1 + \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{g^3(x_2)} dx_2\right)\right)^{1/2} + ||\mathbf{f}||_{L^2(0,2\pi;L^2_1(\Omega))}\right), \end{aligned} \tag{1.12}$$

čia konstanta c nepriklauso nuo k.

1.3 Pratęsimo konstravimas

Kraštinių duomenų $\boldsymbol{\varphi}(x)$ pratęsimą konstruosime tokiu pavidalu (žr. [3]):

$$\mathbf{A}(x) = \mathbf{B}^{(inn)}(x) + \mathbf{B}^{(out)}(x), \tag{1.13}$$

čia $\mathbf{B}^{(inn)}$ yra pratęsimas nuo vidinio krašto Γ_1, o $\mathbf{B}^{(out)}$ pratęsimas nuo išorinio krašto Λ.

1.3.1 Pratęsimo $\mathbf{B}^{(inn)}$ konstravimas

Pirmiausia sukonstruosime tokį vektorinį lauką $\mathbf{b}^{(inn)}$, kuris yra solenoidinis ir tenkina sąlygas:

$$\mathbf{b}^{(inn)}|_{\partial D \cap \partial\Omega} = 0, \qquad \int\limits_{\sigma(R)} \mathbf{b}^{(inn)} \cdot \mathbf{n} dS = \mathbb{F}^{(inn)}.$$

Įveskime pusiau begalinę tiesę $\gamma_+ = \{x : x_1 = 0, x_2 > R_0\}$ bei pažymėkime, kad Δ_{γ_+} yra reguliarizuotas atstumas nuo taško $x \in D$ iki γ_+, o $\Delta_{\partial D \cap \partial\Omega}$ yra reguliarizuotas atstumas nuo taško $x \in D$ iki krašto $\partial D \cap \partial\Omega$.

Išėjime D apibrėžkime Hopfo nupjautinę funkciją:

$$\xi(x) = \Psi\left(\ln\left(\frac{\varrho(\Delta_{\gamma_+})}{\Delta_{\partial D\cap\partial\Omega}}\right)\right), \tag{1.14}$$

čia Ψ ir ϱ apibrėžtos atitinkamai (1.2) ir (1.3) formulėmis.

1.3.1 lema. *Funkcija $\xi(x) = 0$, kai $\varrho(\Delta_{\gamma_+}) \leqslant \Delta_{\partial D\cap\partial\Omega}$. Tiesės γ_+ pakankamai maža aplinka priklauso šiai aibei. Kai $\Delta_{\partial D\cap\partial\Omega} \leqslant e^{-1}\varrho(\Delta_{\gamma_+})$, tai $\xi(x) = 1$. Be to, galioja tokie įverčiai:*

$$\left|\frac{\partial\xi(x)}{\partial x_k}\right| \leqslant \frac{c}{\Delta_{\partial D\cap\partial\Omega}}, \quad \left|\frac{\partial^2\xi(x)}{\partial x_k\partial x_l}\right| \leqslant \frac{c}{\Delta^2_{\partial D\cap\partial\Omega}}, \quad \left|\frac{\partial^3\xi(x)}{\partial^2 x_k\partial x_l}\right| \leqslant \frac{c}{\Delta^3_{\partial D\cap\partial\Omega}}. \tag{1.15}$$

Įrodymas. Pasinaudoję logaritmo savybėmis, funkciją $\xi(x)$ galime perrašyti taip:

$$\xi(x) = \Psi\left(\ln\left(\frac{\varrho(\Delta_{\gamma_+})}{\Delta_{\partial D\cap\partial\Omega}}\right)\right) = \Psi(\ln\big(\varrho(\Delta_{\gamma_+})\big) - \ln(\Delta_{\partial D\cap\partial\Omega})).$$

Išdiferencijavę pagal x_k, gauname

$$\frac{\partial\xi(x)}{\partial x_k} = \Psi'\cdot\left(\frac{1}{\varrho(\Delta_{\gamma_+})}\varrho'(\Delta_{\gamma_+})\frac{\partial\Delta_{\gamma_+}}{\partial x_k} - \frac{1}{\Delta_{\partial D\cap\partial\Omega}}\frac{\partial\Delta_{\partial D\cap\partial\Omega}}{\partial x_k}\right).$$

Pasinaudoję reguliarizuoto atstumo savybėmis bei funkcijų Ψ' ir $\varrho'(\Delta_{\gamma_+})$ aprėžtumu, gauname įvertį:

$$\left|\frac{\partial\xi(x)}{\partial x_k}\right| \leqslant c_1\left(\frac{c_2c_3}{\varrho(\Delta_{\gamma_+})} - \frac{c_4}{\Delta_{\partial D\cap\partial\Omega}}\right) \leqslant c_1\left(\frac{c_2c_3}{\Delta_{\partial D\cap\partial\Omega}} - \frac{c_4}{\Delta_{\partial D\cap\partial\Omega}}\right) \leqslant \frac{c}{\Delta_{\partial D\cap\partial\Omega}}.$$

Skaičiuojame antrąją išvestinę

$$\frac{\partial^2\xi(x)}{\partial x_k\partial x_l} = \Psi''\cdot\left(\frac{(\varrho''(\Delta_{\gamma_+})\frac{\partial\Delta_{\gamma_+}}{\partial x_k} + \frac{\partial^2\Delta_{\gamma_+}}{\partial x_k\partial x_l}\varrho'(\Delta_{\gamma_+}))\varrho(\Delta_{\gamma_+})}{\varrho^2(\Delta_{\gamma_+})} - \frac{\frac{\partial^2\Delta_{\partial D\cap\partial\Omega}}{\partial x_k\partial x_l}\Delta_{\partial D\cap\partial\Omega} - (\frac{\partial\Delta_{\partial D\cap\partial\Omega}}{\partial x_k})^2}{\Delta^2_{\partial D\cap\partial\Omega}}\right).$$

Vėl pasinaudoję reguliarizuoto atstumo savybėmis ir funkcijų Ψ'' ir $\varrho''(\Delta_{\gamma_+})$ aprėžtumu, gauname įvertį:

$$\left|\frac{\partial^2\xi(x)}{\partial x_k\partial x_l}\right| = \Psi''\cdot\left(\frac{(\varrho''(\Delta_{\gamma_+})\frac{\partial\Delta_{\gamma_+}}{\partial x_k} + \frac{\partial^2\Delta_{\gamma_+}}{\partial x_k\partial x_l}\varrho'(\Delta_{\gamma_+}))\varrho(\Delta_{\gamma_+})}{\varrho^2(\Delta_{\gamma_+})} - \frac{\frac{\partial^2\Delta_{\partial D\cap\partial\Omega}}{\partial x_k\partial x_l}\Delta_{\partial D\cap\partial\Omega} - (\frac{\partial\Delta_{\partial D\cap\partial\Omega}}{\partial x_k})^2}{\Delta^2_{\partial D\cap\partial\Omega}}\right)$$
$$\leqslant \frac{c}{\Delta^2_{\partial D\cap\partial\Omega}}.$$

Skaičiuojame trečiąją išvestinę

$$\frac{\partial^3\xi(x)}{\partial^2 x_k\partial x_l} = \Psi''' \cdot \Bigg(\frac{(\varrho'''(\Delta_{\gamma_+})\frac{\partial\Delta_{\gamma_+}}{\partial x_k} + \frac{\partial^2\Delta_{\gamma_+}}{\partial x_k\partial x_l}\varrho''(\Delta_{\gamma_+}))\varrho^3(\Delta_{\gamma_+})}{\varrho^4(\Delta_{\gamma_+})} + \frac{\varrho''(\Delta_{\gamma_+})\frac{\partial\Delta_{\gamma_+}}{\partial x_k}\varrho'(\Delta_{\gamma_+})\varrho^2(\Delta_{\gamma_+})}{\varrho^4(\Delta_{\gamma_+})}$$

$$+ \frac{(\frac{\partial^3\Delta_{\gamma_+}}{\partial {x_k}^2\partial x_l}\varrho'(\Delta_{\gamma_+}) + \frac{\partial^2\Delta_{\gamma_+}}{\partial x_k\partial x_l}\varrho''(\Delta_{\gamma_+}))\varrho^3(\Delta_{\gamma_+})}{\varrho^4(\Delta_{\gamma_+})} + \frac{\frac{\partial^2\Delta_{\gamma_+}}{\partial x_k\partial x_l}(\varrho'(\Delta_{\gamma_+}))^2\varrho^2(\Delta_{\gamma_+})}{\varrho^4(\Delta_{\gamma_+})}$$

$$- \frac{\varrho''(\Delta_{\gamma_+})(\frac{\partial\Delta_{\gamma_+}}{\partial x_k})^2 2\varrho^2(\Delta_{\gamma_+})}{\varrho^4(\Delta_{\gamma_+})} + \frac{\frac{\partial^2\Delta_{\gamma_+}}{\partial x_k\partial x_l}\varrho'(\Delta_{\gamma_+})\varrho^2(\Delta_{\gamma_+})2\frac{\partial\Delta_{\gamma_+}}{\partial x_k}}{\varrho^4(\Delta_{\gamma_+})} - \frac{\frac{\partial^3\Delta_{\partial D\cap\partial\Omega}}{\partial {x_k}^2\partial x_l}\Delta^3_{\partial D\cap\partial\Omega}}{\Delta^4_{\partial D\cap\partial\Omega}}$$

$$- \frac{\frac{\partial^3\Delta_{\partial D\cap\partial\Omega}}{\partial {x_k}^2\partial x_l}\frac{\partial\Delta_{\partial D\cap\partial\Omega}}{\partial x_k}\Delta^2_{\partial D\cap\partial\Omega}}{\Delta^4_{\partial D\cap\partial\Omega}} + \frac{2\frac{\partial\Delta_{\partial D\cap\partial\Omega}}{\partial x_k}\frac{\partial^2\Delta_{\partial D\cap\partial\Omega}}{\partial x_k\partial x_l}\Delta^2_{\partial D\cap\partial\Omega}}{\Delta^4_{\partial D\cap\partial\Omega}} + \frac{\frac{\partial^2\Delta_{\partial D\cap\partial\Omega}}{\partial x_k\partial x_l}2\Delta^2_{\partial D\cap\partial\Omega}\frac{\partial\Delta_{\partial D\cap\partial\Omega}}{\partial x_k}}{\Delta^4_{\partial D\cap\partial\Omega}}$$

$$- \frac{(\frac{\partial\Delta_{\partial D\cap\partial\Omega}}{\partial x_k})^3 2\Delta_{\partial D\cap\partial\Omega}}{\Delta^4_{\partial D\cap\partial\Omega}}\Bigg).$$

Iš funkcijų Ψ''' ir $\varrho'''(\Delta_{\gamma_+})$ aprėžtumo ir reguliarizuoto atstumo savybių, gauname įvertį

$$\left|\frac{\partial^3\xi(x)}{\partial^2 x_k\partial x_l}\right| = \Bigg|\Psi''' \cdot \Bigg(\frac{\varrho'''(\Delta_{\gamma_+})\frac{\partial\Delta_{\gamma_+}}{\partial x_k} + \frac{\partial^2\Delta_{\gamma_+}}{\partial x_k\partial x_l}\varrho''(\Delta_{\gamma_+})}{\varrho(\Delta_{\gamma_+})} + \frac{\varrho''(\Delta_{\gamma_+})\frac{\partial\Delta_{\gamma_+}}{\partial x_k}\varrho'(\Delta_{\gamma_+})}{\varrho^2(\Delta_{\gamma_+})}$$

$$+ \frac{(\frac{\partial^3\Delta_{\gamma_+}}{\partial {x_k}^2\partial x_l}\varrho'(\Delta_{\gamma_+}) + \frac{\partial^2\Delta_{\gamma_+}}{\partial x_k\partial x_l}\varrho''(\Delta_{\gamma_+}))}{\varrho(\Delta_{\gamma_+})} + \frac{\frac{\partial^2\Delta_{\gamma_+}}{\partial x_k\partial x_l}(\varrho'(\Delta_{\gamma_+}))^2}{\varrho^2(\Delta_{\gamma_+})} - \frac{\varrho''(\Delta_{\gamma_+})(\frac{\partial\Delta_{\gamma_+}}{\partial x_k})^2}{\varrho^2(\Delta_{\gamma_+})}$$

$$+ \frac{\frac{\partial^2\Delta_{\gamma_+}}{\partial x_k\partial x_l}\varrho'(\Delta_{\gamma_+})2\frac{\partial\Delta_{\gamma_+}}{\partial x_k}}{\varrho^2(\Delta_{\gamma_+})} - \frac{\frac{\partial^3\Delta_{\partial D\cap\partial\Omega}}{\partial {x_k}^2\partial x_l}}{\Delta_{\partial D\cap\partial\Omega}} - \frac{\frac{\partial^3\Delta_{\partial D\cap\partial\Omega}}{\partial {x_k}^2\partial x_l}\frac{\partial\Delta_{\partial D\cap\partial\Omega}}{\partial x_k}}{\Delta^2_{\partial D\cap\partial\Omega}} + \frac{2\frac{\partial\Delta_{\partial D\cap\partial\Omega}}{\partial x_k}\frac{\partial^2\Delta_{\partial D\cap\partial\Omega}}{\partial x_k\partial x_l}}{\Delta^2_{\partial D\cap\partial\Omega}}$$

$$+ \frac{\frac{\partial^2\Delta_{\partial D\cap\partial\Omega}}{\partial x_k\partial x_l}2\frac{\partial\Delta_{\partial D\cap\partial\Omega}}{\partial x_k}}{\Delta^2_{\partial D\cap\partial\Omega}} - \frac{2(\frac{\partial\Delta_{\partial D\cap\partial\Omega}}{\partial x_k})^3}{\Delta^3_{\partial D\cap\partial\Omega}}\Bigg)\Bigg| \leqslant \frac{c}{\Delta^3_{\partial D\cap\partial\Omega}}.$$

□

Naudodamiesi (1.14) nupjautine Hopfo funkcija $\xi(x)$, apibrėžkime vektorinį lauką:

$$\mathbf{b}_1^{(inn)}(x) = -\mathbb{F}^{(inn)}\left(\frac{\partial\tilde{\xi}(x)}{\partial x_2}; -\frac{\partial\tilde{\xi}(x)}{\partial x_1}\right), \quad x \in D^+ = \{x \in D : x_1 > 0\}, \tag{1.16}$$

čia

$$\tilde{\xi}(x) = \begin{cases} \xi(x), & x \in D^+, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus D^+. \end{cases}$$

1.3.2 lema. *Vektorinis laukas $\mathbf{b}_1^{(inn)}(x)$ yra solenoidinis, be galo diferencijuojamas, lygus nuliui krašto $\partial D \cap \partial\Omega$ mažoje aplinkoje ir tiesės γ_+ mažoje aplinkoje. Funkcijos $\mathbf{b}_1^{(inn)}(x)$ atrama yra taškuose, kuriuose galioja nelygybė*

$$\varrho(\Delta_{\gamma_+})e^{-1} \leqslant \Delta_{\partial D\cap\partial\Omega} \leqslant \varrho(\Delta_{\gamma_+}). \tag{1.17}$$

Be to, galioja tokie įverčiai:

$$|\mathbf{b}_1^{(inn)}(x)| \leqslant \frac{c|\mathbb{F}^{(inn)}|}{d(x)}, \quad x \in D^+, \;\; d(x) = dist(x, \partial D \cap \partial\Omega), \tag{1.18}$$

$$|\mathbf{b}_1^{(inn)}(x)| \leqslant \frac{c|\mathbb{F}^{(inn)}|}{g(x_2)}, \quad |\nabla \mathbf{b}_1^{(inn)}(x)| \leqslant \frac{c|\mathbb{F}^{(inn)}|}{g^2(x_2)}, \quad |\Delta \mathbf{b}_1^{(inn)}(x)| \leqslant \frac{c|\mathbb{F}^{(inn)}|}{g^3(x_2)} \tag{1.19}$$

bei lygybė:

$$\int\limits_{\sigma(R)} \mathbf{b}_1^{(inn)} \cdot \mathbf{n} dS = \mathbb{F}^{(inn)}. \tag{1.20}$$

Įrodymas. (1.17) nelygybę gauname iš 1.3.1 lemos. (1.20) lygybę gauname taip:

$$\int\limits_{\sigma(R)} \mathbf{b}_1^{(inn)} \cdot \mathbf{n} dS = \int\limits_{-g(R)}^{g(R)} \mathbf{b}_1^{(inn)} \cdot \mathbf{n} dS = -\mathbb{F}^{(inn)} \int\limits_{-g(R)}^{g(R)} \left(\frac{\partial \tilde{\xi}(x)}{\partial x_2}, -\frac{\partial \tilde{\xi}(x)}{\partial x_1} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dx_1$$
$$= \mathbb{F}^{(inn)} \int\limits_{-g(R)}^{g(R)} \frac{\partial \tilde{\xi}(x)}{\partial x_1} dx_1 = \mathbb{F}^{(inn)}(\tilde{\xi}(g(R), R) - \tilde{\xi}(-g(R), R)) = \mathbb{F}^{(inn)}.$$

Iš (1.16) vektorinio lauko išraiškos ir (1.15) įverčių, gauname:

$$\begin{aligned} |\mathbf{b}_1^{(inn)}(x)| &= |\mathbb{F}^{(inn)}| \left| \left(\frac{\partial \tilde{\xi}(x)}{\partial x_2}; -\frac{\partial \tilde{\xi}(x)}{\partial x_1} \right) \right| \leqslant |\mathbb{F}^{(inn)}| \sqrt{\left(\frac{\partial \tilde{\xi}(x)}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{\xi}(x)}{\partial x_1} \right)^2} \\ &\leqslant |\mathbb{F}^{(inn)}| \sqrt{\frac{c^2}{\Delta^2_{\partial D \cap \partial\Omega}} + \frac{c^2}{\Delta^2_{\partial D \cap \partial\Omega}}} \leqslant \frac{c|\mathbb{F}^{(inn)}|}{\Delta_{\partial D \cap \partial\Omega}}; \end{aligned} \tag{1.21}$$

$$\begin{aligned} |\nabla \mathbf{b}_1^{(inn)}(x)| &\leqslant |\mathbb{F}^{(inn)}| \left| \nabla \left(\frac{\partial \tilde{\xi}(x)}{\partial x_2}; -\frac{\partial \tilde{\xi}(x)}{\partial x_1} \right) \right| \leqslant |\mathbb{F}^{(inn)}| \left| \left(\frac{\partial^2 \tilde{\xi}(x)}{\partial x_1 \partial x_2}; -\frac{\partial^2 \tilde{\xi}(x)}{\partial x_2 \partial x_1} \right) \right| \\ &\leqslant |\mathbb{F}^{(inn)}| \sqrt{\left(\frac{\partial^2 \tilde{\xi}(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \tilde{\xi}(x)}{\partial x_2 \partial x_1} \right)^2} \leqslant |\mathbb{F}^{(inn)}| \sqrt{\frac{c^2}{\Delta^4_{\partial D \cap \partial\Omega}} + \frac{c^2}{\Delta^4_{\partial D \cap \partial\Omega}}} \leqslant \frac{c|\mathbb{F}^{(inn)}|}{\Delta^2_{\partial D \cap \partial\Omega}}; \end{aligned} \tag{1.22}$$

$$\begin{aligned} |\Delta \mathbf{b}_1^{(inn)}(x)| &\leqslant |\mathbb{F}^{(inn)}| \left| \Delta \left(\frac{\partial \tilde{\xi}(x)}{\partial x_2}; -\frac{\partial \tilde{\xi}(x)}{\partial x_1} \right) \right| \leqslant |\mathbb{F}^{(inn)}| \left| \Delta \left(\frac{\partial^3 \tilde{\xi}(x)}{\partial^2 x_1 \partial x_2}; -\frac{\partial^3 \tilde{\xi}(x)}{\partial^2 x_2 \partial x_1} \right) \right| \\ &\leqslant |\mathbb{F}^{(inn)} \sqrt{\left(\frac{\partial^3 \tilde{\xi}(x)}{\partial^2 x_1 \partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^3 \tilde{\xi}(x)}{\partial^2 x_2 \partial x_1} \right)^2} \leqslant |\mathbb{F}^{(inn)}| \sqrt{\frac{c^2}{\Delta^6_{\partial D \cap \partial\Omega}} + \frac{c^2}{\Delta^6_{\partial D \cap \partial\Omega}}} \leqslant \frac{c|\mathbb{F}^{(inn)}|}{\Delta^3_{\partial D \cap \partial\Omega}}. \end{aligned} \tag{1.23}$$

□

Apibrėžkime vektorinį lauką:

$$\mathbf{h}_1(x) = \begin{cases} 0, \quad x \in \Gamma_1, \\ \mathbf{b}_1^{(inn)}|_{\partial\Omega_0 \cap \overline{D}} + \mathbf{b}_{\#}^{(inn)}|_{\partial\Omega_0 \cap \overline{D}}, \quad x \in \partial\Omega_0 \cap \overline{D}, \\ \mathbf{b}_{\#}^{(inn)}|_{\partial\Omega_0 \setminus \overline{D}}, \quad x \in \partial\Omega_0 \setminus (\overline{D} \cup \Gamma_1), \end{cases}$$

čia $\mathbf{b}_1^{(inn)}$ apibrėžtas (1.16) formule, o

$$\mathbf{b}_{\#}^{(inn)}(x) = \mathbb{F}^{(inn)}\nabla q(x),$$

kai $q(x) = \frac{1}{2\pi}\ln|x|$ yra fundamentalusis Laplaso operatoriaus erdvėje $\mathbb{R}^2$ sprendinys. Pastebėkime, kad $\mathbf{b}_{\#}^{(inn)}(x)$ tenkina sąlygą:

$$\mathrm{div}\mathbf{b}_{\#}^{(inn)} = \mathrm{div}\mathbb{F}^{(inn)}\nabla q(x) = \mathbb{F}^{(inn)}\mathrm{div}\nabla q(x) = \mathbb{F}^{(inn)}\Delta q(x) = 0.$$

Kadangi

$$\int\limits_{\Gamma_1} \nabla q(x)\cdot \mathbf{n}dS = 1, \quad \int\limits_{\partial\Omega_0} \nabla q(x)\cdot \mathbf{n}dS = -1,$$

tai

$$\int\limits_{\Gamma_1} \mathbf{b}_{\#}^{(inn)}\cdot \mathbf{n}dS = \int\limits_{\Gamma_1} \mathbb{F}^{(inn)}\nabla q(x)\cdot \mathbf{n}dS = \mathbb{F}^{(inn)}\int\limits_{\Gamma_1} \nabla q(x)\cdot \mathbf{n}dS = \mathbb{F}^{(inn)},$$

$$\int\limits_{\partial\Omega_0} \mathbf{b}_{\#}^{(inn)}\cdot \mathbf{n}dS = \int\limits_{\partial\Omega_0} \mathbb{F}^{(inn)}\nabla q(x)\cdot \mathbf{n}dS = \mathbb{F}^{(inn)}\int\limits_{\partial\Omega_0} \nabla q(x)\cdot \mathbf{n}dS = -\mathbb{F}^{(inn)}.$$

Tuomet iš $\mathbf{b}_1^{(inn)}$ ir $\mathbf{b}_{\#}^{(inn)}$ savybių, išplaukia, kad

$$\int\limits_{\partial\Omega_0} \mathbf{h}_1\cdot \mathbf{n}dS = \int\limits_{\partial\Omega_0\cap\overline{D}} \mathbf{b}_1^{(inn)}\cdot \mathbf{n}dS + \int\limits_{\partial\Omega_0} \mathbf{b}_{\#}^{(inn)}\cdot \mathbf{n}dS = \mathbb{F}^{(inn)} - \mathbb{F}^{(inn)} = 0. \tag{1.24}$$

Dėl to, kad galioja (1.24) sąlyga, funkcija $\mathbf{h}_1$ gali būti pratęsta į sritį Ω_0 tokio solenoidinio vektorinio lauko pavidalu $\mathbf{b}_{01}^{(inn)} \in W^{1,2}(\Omega_0)$, kuris tenkina įvertį:

$$||\mathbf{b}_{01}^{(inn)}||_{W^{1,2}(\Omega_0)} \leqslant c||\mathbf{h}_1||_{W^{1/2,2}(\partial\Omega_0)} \leqslant c\Big(||\mathbf{b}_{\#}^{(inn)}||_{W^{1/2,2}(\partial\Omega_0)} + ||\mathbf{b}_1^{(inn)}||_{W^{1/2,2}(\partial\Omega_0\cap D)}\Big) \leqslant c|\mathbb{F}^{(inn)}|, \tag{1.25}$$

čia konstanta c priklauso tik nuo srities Ω_0 (žr. 1.1.6 lemą).

Toliau apibrėžkime

$$\mathbf{b}^{(inn)} = \begin{cases} \mathbf{b}_{\#}^{(inn)} + \mathbf{b}_{01}^{(inn)}, & x \in \Omega_0, \\ \mathbf{b}_1^{(inn)}, & x \in D. \end{cases}$$

Taip sukonstruotas vektorinis laukas $\mathbf{b}^{(inn)}$ "nuima" nenulinius srautus nuo "skylės" krašto Γ_1. Apibrėždami

$$\mathbf{h}_0 = \begin{cases} \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{b}_{\#}^{(inn)}|_{\Gamma_1}, & x \in \Gamma_1, \\ 0, & x \in \partial\Omega_0 \setminus \Gamma_1, \end{cases}$$

gauname, kad

$$\int_{\Gamma_1} \mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n} dS - \int_{\Gamma_1} \mathbf{b}_{\#}^{(inn)} \cdot \mathbf{n} dS = \mathbb{F}^{(inn)} - \mathbb{F}^{(inn)} = 0.$$

Todėl funkcija $\mathbf{h}_0$ pratęsiama į visą sritį Ω tokio vektorinio lauko $\mathbf{b}_0^{(inn)}$ pavidalu

$$\mathbf{b}_0^{(inn)}(x) = \left(\frac{\partial(\chi(x)\mathbf{E}(x))}{\partial x_2}, -\frac{\partial(\chi(x)\mathbf{E}(x))}{\partial x_1} \right),$$

čia $\mathbf{E}(x) \in W^{2,2}(\Omega_0)$, $\left(\frac{\partial \mathbf{E}(x)}{\partial x_2}, -\frac{\partial \mathbf{E}(x)}{\partial x_1}\right) = \mathbf{h}_0$, χ yra nupjautinė Hopfo funkcija, kuri lygi vienetui ant Γ_1.

Tuomet

$$\mathbf{B}^{(inn)}(x) = \mathbf{b}^{(inn)}(x) + \mathbf{b}_0^{(inn)}(x). \tag{1.26}$$

Iš vektorinio lauko konstrukcijos ir įrodytų lemų, gauname, kad $\mathbf{B}^{(inn)}$ tenkina savybes, kurias suformuluosime lemos pavidalu.

1.3.3 lema. *Sukonstruotas vektorinis laukas* $\mathbf{B}^{(inn)}$ *yra solenoidinis,* $\mathbf{B}^{(inn)}|_{\Gamma_1} = \boldsymbol{\varphi}|_{\Gamma_1}$, $\mathbf{B}^{(inn)}|_{\partial\Omega\setminus\Gamma_1} = 0$, $\mathbf{B}^{(inn)} \in W^{2,2}_{loc}(\overline{\Omega})$ *bei tenkina įverčius:*

$$|\mathbf{B}^{(inn)}(x)| \leqslant \frac{c|\mathbb{F}^{(inn)}|}{g(x_2)}, \quad |\nabla \mathbf{B}^{(inn)}(x)| \leqslant \frac{c|\mathbb{F}^{(inn)}|}{g^2(x_2)}, \quad |\Delta \mathbf{B}^{(inn)}(x)| \leqslant \frac{c|\mathbb{F}^{(inn)}|}{g^3(x_2)}, \quad x \in D \tag{1.27}$$

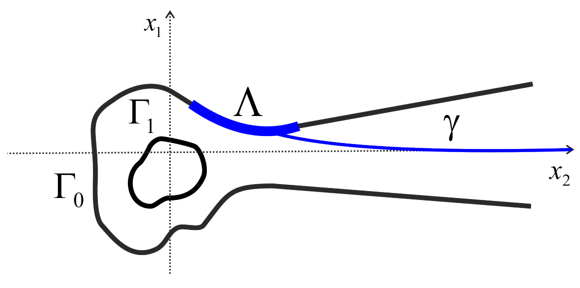
$$|\mathbf{B}^{(inn)}(x)| + |\nabla \mathbf{B}^{(inn)}(x)| + |\Delta \mathbf{B}^{(inn)}(x)| \leqslant c|\mathbb{F}^{(inn)}|, \quad x \in \Omega \setminus D. \tag{1.28}$$

1.3.2 Pratęsimo $\mathbf{B}^{(out)}$ konstravimas

Tegul $x^{(1)} \in \Lambda \subset \Gamma_0$. Įveskime pusiau begalinę kreivę γ, kuri turi tokį pavidalą

$$\gamma = \hat{\gamma} \cup \gamma_0,$$

čia $\hat{\gamma}$ yra pusiau begalinė tiesė, esanti išėjime D, γ_0 yra baigtinė kreivė, jungianti $\hat{\gamma}$ ir tašką $x^{(1)} \in \Lambda$.



1.2 pav.: Kreivė γ

Apibrėžkime nupjautinę Hopfo funkciją:

$$\zeta(x) = \Psi\left(\ln\frac{\varrho(\Delta_\gamma)}{\Delta_{\partial\Omega\setminus\Lambda}}\right) \tag{1.29}$$

čia Ψ ir ϱ apibrėžtos (1.2) ir (1.3) formulėmis.

1.3.4 lema. *Funkcija $\zeta(x) = 0$, kai $\varrho(\Delta_\gamma) \leqslant \Delta_{\partial\Omega\setminus\Lambda}$. Tiesės γ pakankamai maža aplinka priklauso šiai aibei. Kai $\Delta_{\partial\Omega\setminus\Lambda} \leqslant e^{-1}\varrho(\Delta_\gamma)$, tai $\zeta(x) = 1$. Be to, galioja tokie įverčiai:*

$$\left|\frac{\partial\zeta(x)}{\partial x_k}\right| \leqslant \frac{c}{\Delta_{\partial\Omega\setminus\Lambda}}, \quad \left|\frac{\partial^2\zeta(x)}{\partial x_k\partial x_l}\right| \leqslant \frac{c}{\Delta^2_{\partial\Omega\setminus\Lambda}}, \quad \left|\frac{\partial^3\zeta(x)}{\partial^2 x_k\partial x_l}\right| \leqslant \frac{c}{\Delta^3_{\partial\Omega\setminus\Lambda}}. \tag{1.30}$$

Lema įrodoma analogiškai kaip 1.3.1 lema.

Įveskime vektorinį lauką:

$$\mathbf{b}^{(out)}(x) = \mathbb{F}^{(out)}\left(\frac{\partial\tilde{\zeta}(x)}{\partial x_2}; -\frac{\partial\tilde{\zeta}(x)}{\partial x_1}\right),$$

čia $\tilde{\zeta}(x) = \zeta(x)$ virš kreivės γ, o $\tilde{\zeta}(x) = 0$ po kreive (žr. 1.2 pav.).

1.3.5 lema. *Vektorinis laukas $\mathbf{b}^{(out)}$ yra solenoidinis, be galo diferencijuojamas bei lygus nuliui krašto $\partial\Omega\setminus\Lambda$ aplinkoje ir kreivės γ aplinkoje. Be to, galioja tokie įverčiai:*

$$|\mathbf{b}^{(out)}(x)| \leqslant \frac{c}{d_{\partial\Omega\setminus\Lambda}}, \quad |\nabla\mathbf{b}^{(out)}(x)| \leqslant \frac{c}{d^2_{\partial\Omega\setminus\Lambda}}, \quad |\Delta\mathbf{b}^{(out)}(x)| \leqslant \frac{c}{d^3_{\partial\Omega\setminus\Lambda}}, \tag{1.31}$$

$$|\mathbf{b}^{(out)}(x)| \leqslant \frac{c|\mathbb{F}^{(out)}|}{g(x_2)}, \quad |\nabla\mathbf{b}^{(out)}(x)| \leqslant \frac{c|\mathbb{F}^{(out)}|}{g^2(x_2)}, \quad |\Delta\mathbf{b}^{(out)}(x)| \leqslant \frac{c|\mathbb{F}^{(out)}|}{g^3(x_2)}, \quad x \in D, \tag{1.32}$$

ir lygybė

$$\int\limits_\Lambda \mathbf{b}^{(out)}\cdot\mathbf{n}dS = \mathbb{F}^{(out)}. \tag{1.33}$$

Įrodymas. (1.31) ir (1.32) įverčiai įrodomi analogiškai kaip 1.3.2 lemoje. (1.33) lygybė gaunama taip:

$$\int\limits_\Lambda \mathbf{b}^{(out)}\cdot\mathbf{n}dS = -\int\limits_{\sigma(R)} \mathbf{b}^{(out)}\cdot\mathbf{n}dS = -\int\limits_{-g(R)}^{g(R)} \mathbf{b}^{(out)}\cdot\mathbf{n}dS = -\mathbb{F}^{(out)}\int\limits_{-g(R)}^{g(R)}\left(\frac{\partial\tilde{\zeta}(x)}{\partial x_2}, -\frac{\partial\tilde{\zeta}(x)}{\partial x_1}\right)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}dx_1$$

$$= -\mathbb{F}^{(out)}\int\limits_{-g(R)}^{g(R)}\left(-\frac{\partial\tilde{\zeta}(x)}{\partial x_1}\right)dx_1 = \mathbb{F}^{(out)}(\tilde{\zeta}(g(R),R) - \tilde{\zeta}(-g(R),R)) = \mathbb{F}^{(out)}.$$

$\square$

Kadangi srautas jau "nuimtas", tai apibrėžę vektorinį lauką

$$\mathbf{h}(x) = \boldsymbol{\varphi}(x)|_{\Lambda} - \mathbf{b}^{(out)}(x)|_{\Lambda},$$

gauname, kad

$$\int\limits_{\Lambda} \mathbf{h}(x) \cdot \mathbf{n} dS = \int\limits_{\Lambda} \boldsymbol{\varphi}(x) \cdot \mathbf{n} dS - \int\limits_{\Lambda} \mathbf{b}^{(out)}(x) \cdot \mathbf{n} dS = \mathbb{F}^{(out)} - \mathbb{F}^{(out)} = 0. \tag{1.34}$$

Todėl funkcija $\mathbf{h}(x)$ gali būti pratęsta į sritį Ω tokio vektorinio lauko $\mathbf{b}_0^{(out)}$ pavidalu

$$\mathbf{b}_0^{(out)}(x) = \left(\frac{\partial(\chi(x)\mathbf{E}(x))}{\partial x_2}; - \frac{\partial(\chi(x)\mathbf{E}(x))}{\partial x_1} \right), \tag{1.35}$$

čia $\mathbf{E}(x) \in W^{2,2}(\Omega_0)$, $\left(\frac{\partial \mathbf{E}(x)}{\partial x_2}; -\frac{\partial \mathbf{E}(x)}{\partial x_1}\right)|_{\Lambda} = \mathbf{h}$, χ yra Hopfo tipo nupjautinė funkcija, kuri lygi vienetui krašte Λ, o $\operatorname{supp}\chi$ yra mažoje Λ aplinkoje.

Tuomet

$$\mathbf{B}^{(out)}(x) = \mathbf{b}^{(out)}(x) + \mathbf{b}_0^{(out)}(x).$$

Taigi, iš vektorinio lauko konstrukcijos, gauname, jog jis tenkina savybes, kurias surašysime į lemą.

1.3.6 lema. *Sukonstruotas vektorinis laukas* $\mathbf{B}^{(out)}(x)$ *yra solenoidinis,* $\mathbf{B}^{(out)}|_{\Lambda} = \boldsymbol{\varphi}|_{\Lambda}$, $\mathbf{B}^{(out)}|_{\partial\Omega\setminus\Lambda} = 0$, $\mathbf{B}^{(out)} \in W^{2,2}_{loc}(\overline{\Omega})$. *Be to,* $\mathbf{B}^{(out)}(x)$ *tenkina įverčius:*

$$|\mathbf{B}^{(out)}(x)| \leqslant \frac{c|\mathbb{F}^{(out)}|}{g(x_2)}, \quad |\nabla \mathbf{B}^{(out)}(x)| \leqslant \frac{c|\mathbb{F}^{(out)}|}{g^2(x_2)}, \quad |\Delta \mathbf{B}^{(out)}(x)| \leqslant \frac{c|\mathbb{F}^{(out)}|}{g^3(x_2)}, \quad x \in D. \tag{1.36}$$

$$|\mathbf{B}^{(out)}(x)| + |\nabla \mathbf{B}^{(out)}(x)| + |\Delta \mathbf{B}^{(out)}(x)| \leqslant c|\mathbb{F}^{(out)}|, \quad x \in \Omega \setminus D. \tag{1.37}$$

Galiausiai, gauname lemą apie pratęsimo $\mathbf{A}$ savybes.

1.3.7 lema. *Sukonstruotas pratęsimas* $\mathbf{A} \in W^{2,2}_{loc}(\overline{\Omega})$ *yra solenoidinis, tenkina kraštinę sąlygą* $\mathbf{A}|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{\varphi}$ *bei įverčius:*

$$|\mathbf{A}(x)| \leqslant \frac{c(|\mathbb{F}^{(inn)}| + |\mathbb{F}^{(out)}|)}{g(x_2)}, \quad x \in D, \tag{1.38}$$

$$|\nabla \mathbf{A}(x)| \leqslant \frac{c(|\mathbb{F}^{(inn)}| + |\mathbb{F}^{(out)}|)}{g^2(x_2)}, \quad x \in D, \tag{1.39}$$

$$|\Delta \mathbf{A}(x)| \leqslant \frac{c(|\mathbb{F}^{(inn)}| + |\mathbb{F}^{(out)}|)}{g^3(x_2)}, \quad x \in D, \tag{1.40}$$

$$|\mathbf{A}(x)| + |\nabla \mathbf{A}(x)| + |\Delta \mathbf{A}(x)| \leqslant c(|\mathbb{F}^{(inn)}| + |\mathbb{F}^{(out)}|), \quad x \in \Omega \setminus D, \tag{1.41}$$

$$||\nabla \mathbf{A}||^2_{L^2(\Omega_k)} + ||\Delta \mathbf{A}||^2_{L^2(\Omega_k)} \leqslant c||\boldsymbol{\varphi}||^2_{W^{1/2,2}(\partial\Omega)} \left(1 + \int\limits_1^{R_k} \frac{1}{g^3(x_2)} dx_2 \right). \tag{1.42}$$

Įrodymas. (1.38) - (1.41) įverčiai išplaukia iš 1.3.3 ir 1.3.6 lemų. Įrodysime (1.42) įvertį. Pasinaudoję (1.39) - (1.40) įverčiais, galime įvertinti pratęsimo $\mathbf{A}$ normas:

$$\begin{aligned}
||\nabla \mathbf{A}||^2_{L^2(\Omega_k)} &= \int\limits_{\Omega_k} |\nabla \mathbf{A}|^2 dx \leqslant \int\limits_{\Omega_k} \left(\frac{c(|\mathbb{F}^{(inn)}| + |\mathbb{F}^{(out)}|)}{g^2(x_2)} \right)^2 dx \\
&\leqslant c^2(|\mathbb{F}^{(inn)}|^2 + |\mathbb{F}^{(out)}|^2) \left(1 + \int\limits_{\Omega_k} \frac{1}{g^4(x_2)} dx \right) \\
&= c^2(|\mathbb{F}^{(inn)}|^2 + |\mathbb{F}^{(out)}|^2) \left(1 + \int\limits_1^{R_k} \int\limits_{-g(x_2)}^{g(x_2)} \frac{1}{g^4(x_2)} dx_1 dx_2 \right) \\
&= c^2(|\mathbb{F}^{(inn)}|^2 + |\mathbb{F}^{(out)}|^2) \left(1 + \int\limits_1^{R_k} \frac{1}{g^4(x_2)} \cdot 2g(x_2) dx_2 \right) \\
&\leqslant c^2(|\mathbb{F}^{(inn)}|^2 + |\mathbb{F}^{(out)}|^2) \left(1 + \int\limits_1^{R_k} \frac{1}{g^3(x_2)} dx_2 \right).
\end{aligned} \tag{1.43}$$

Įvertiname $|\mathbb{F}^{(inn)}|^2$ ir $|\mathbb{F}^{(out)}|^2$:

$$\begin{aligned}
|\mathbb{F}^{(inn)}|^2 &= \left| \int\limits_{\Gamma_1} \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n} dS \right|^2 \leqslant \left(\left(\int\limits_{\Gamma_1} |\boldsymbol{\varphi}|^2 dS \right)^{1/2} \left(\int\limits_{\Gamma_1} |\mathbf{n}|^2 dS \right)^{1/2} \right)^2 \\
&\leqslant \left(\left(\int\limits_{\Gamma_1} |\boldsymbol{\varphi}|^2 dS \right)^{1/2} \right)^2 \left(\left(\int\limits_{\Gamma_1} |\mathbf{n}|^2 dS \right)^{1/2} \right)^2 \leqslant c||\boldsymbol{\varphi}||^2_{L^2(\Gamma_1)} \leqslant c||\boldsymbol{\varphi}||^2_{W^{1/2,2}(\Gamma_1)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\mathbb{F}^{(out)}|^2 &= \left| \int\limits_{\Lambda} \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n} dS \right|^2 \leqslant \left(\left(\int\limits_{\Lambda} |\boldsymbol{\varphi}|^2 dS \right)^{1/2} \left(\int\limits_{\Lambda} |\mathbf{n}|^2 dS \right)^{1/2} \right)^2 \\
&\leqslant \left(\left(\int\limits_{\Lambda} |\boldsymbol{\varphi}|^2 dS \right)^{1/2} \right)^2 \left(\left(\int\limits_{\Lambda} |\mathbf{n}|^2 dS \right)^{1/2} \right)^2 \leqslant c||\boldsymbol{\varphi}||^2_{L^2(\Lambda)} \leqslant c||\boldsymbol{\varphi}||^2_{W^{1/2,2}(\Lambda)}.
\end{aligned}$$

Todėl

$$|\mathbb{F}^{(inn)}|^2 + |\mathbb{F}^{(out)}|^2 \leqslant c||\boldsymbol{\varphi}||^2_{W^{1/2,2}(\partial\Omega)}. \tag{1.44}$$

Taigi, iš (1.43) ir (1.44), gauname

$$||\nabla \mathbf{A}||^2_{L^2(\Omega_k)} \leqslant c||\boldsymbol{\varphi}||^2_{W^{1/2,2}(\partial\Omega)} \left(1 + \int\limits_1^{R_k} \frac{1}{g^3(x_2)} dx_2 \right). \tag{1.45}$$

Analogiškai gauname

$$
\begin{aligned}
||\Delta \mathbf{A}||^2_{L^2(\Omega_k)} &= \int\limits_{\Omega_k} |\Delta \mathbf{A}|^2 dx \leqslant \int\limits_{\Omega_k} \left(\frac{c(|\mathbb{F}^{(inn)}| + |\mathbb{F}^{(out)}|)}{g^3(x_2)} \right)^2 dx \\
&\leqslant c^2(|\mathbb{F}^{(inn)}|^2 + |\mathbb{F}^{(out)}|^2) \left(1 + \int\limits_{\Omega_k} \frac{1}{g^6(x_2)} dx \right) \leqslant c||\boldsymbol{\varphi}||^2_{W^{1/2,2}(\partial\Omega)} \left(1 + \int\limits_1^{R_k} \int\limits_{-g(x_2)}^{g(x_2)} \frac{1}{g^6(x_2)} dx_1 dx_2 \right) \\
&= c||\boldsymbol{\varphi}||^2_{W^{1/2,2}(\partial\Omega)} \left(1 + \int\limits_1^{R_k} \frac{1}{g^6(x_2)} \cdot 2g(x_2) dx_2 \right) \leqslant c||\boldsymbol{\varphi}||^2_{W^{1/2,2}(\partial\Omega)} \left(1 + \int\limits_1^{R_k} \frac{2}{g^5(x_2)} dx_2 \right) \\
&\leqslant c||\boldsymbol{\varphi}||^2_{W^{1/2,2}(\partial\Omega)} \left(1 + \int\limits_1^{R_k} \frac{1}{g^3(x_2)} dx_2 \right).
\end{aligned}
$$

Taigi,

$$
||\Delta \mathbf{A}||^2_{L^2(\Omega_k)} \leqslant c||\boldsymbol{\varphi}||^2_{W^{1/2,2}(\partial\Omega)} \left(1 + \int\limits_1^{R_k} \frac{1}{g^3(x_2)} dx_2 \right). \tag{1.46}
$$

Susumavę (1.45) ir (1.46) nelygybes, gauname (1.42) įvertį. □

1.4 Silpnojo sprendinio egzistavimas ir vienatis

1.3 skyriuje sukonstravome kraštinių duomenų $\boldsymbol{\varphi}$ pratęsimą $\mathbf{A} \in W^{2,2}(\Omega)$, kurio pagalba galime panaikinti kraštinės sąlygos nehomogeniškumą. Tai leidžia nehomogeninį uždavinį suvesti į jį atitinkantį homogeninį uždavinį. Todėl (1.4) uždavinio silpnojo sprendinio $\mathbf{u}(x,t)$ ieškosime tokiu pavidalu $\mathbf{u}(x,t) = \mathbf{A}(x) + \mathbf{v}(x,t)$. Tuomet (1.4) uždavinys su nehomogenine kraštine sąlyga yra suvedamas į uždavinį su homogenine kraštine sąlyga:

$$
\begin{cases}
\mathbf{v}_t - \nu\Delta\mathbf{v} + \nabla p = \nu\Delta\mathbf{A} + \mathbf{f}, \quad (x,t) \in \Omega \times (0, 2\pi), \\
\text{div}\mathbf{v} = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0, 2\pi), \\
\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0, 2\pi), \\
\mathbf{v}(x,0) = \mathbf{v}(x, 2\pi), \quad x \in \Omega.
\end{cases} \tag{1.47}
$$

Padauginę abi (1.47_1) lygybės puses skaliariškai iš $\boldsymbol{\eta}(x,t) \in L^2(0, 2\pi; J_0^\infty(\Omega))$ ir suintegravę dalimis sritimi Ω, gauname:

$$
\int\limits_\Omega \mathbf{v}_t(x,t) \cdot \boldsymbol{\eta}(x,t) dx + \nu \int\limits_\Omega \nabla\mathbf{v}(x,t) : \nabla\boldsymbol{\eta}(x,t) dx = -\nu \int\limits_\Omega \nabla\mathbf{A}(x) : \nabla\boldsymbol{\eta}(x,t) dx + \int\limits_\Omega \mathbf{f}(x,t) \cdot \boldsymbol{\eta}(x,t) dx.
$$

Suintegravę nuo 0 iki 2π, turime

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_\Omega \mathbf{v}_t(x,t)\cdot\boldsymbol{\eta}(x,t)dxdt+\nu\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_\Omega \nabla\mathbf{v}(x,t):\nabla\boldsymbol{\eta}(x,t)dxdt\\&=-\nu\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_\Omega \nabla\mathbf{A}(x):\nabla\boldsymbol{\eta}(x,t)dxdt+\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_\Omega \mathbf{f}(x,t)\cdot\boldsymbol{\eta}(x,t)dxdt,\quad\forall\boldsymbol{\eta}\in L^2(0,2\pi;J_0^\infty(\Omega)).\end{aligned}\tag{1.48}$$

1.4.1 apibrėžimas. *Tarkime, išorinė jėga* $\mathbf{f}\in L^2(0,2\pi;L_1^2(\Omega))$. *Solenoidinis vektorinis laukas* $\mathbf{v}\in L^2(0,2\pi;W^{1,2}_{loc}(\overline{\Omega}))$, $\mathbf{v}_t\in L^2(0,2\pi;L^2_{loc}(\overline{\Omega}))$ *tenkinantis kraštinę* $\mathbf{v}|_{\partial\Omega}=0$ *bei periodiškumo* $\mathbf{v}(x,0)=\mathbf{v}(x,2\pi)$ *sąlygas, vadinamas* (1.47) *uždavinio silpnuoju sprendiniu, jeigu tenkina* (1.48) *integralinę tapatybę su kiekviena funkcija* $\boldsymbol{\eta}\in L^2(0,2\pi;J_0^\infty(\Omega))$.

Įrodysime (1.47) sistemos silpnojo sprendinio egzistavimą ir vienatį. Įrodymą skaidysime į du pagrindinius etapus:

1. Įrodysime (1.47) sistemos apytikslio sprendinio $\mathbf{v}^{(k,N)}$ (žr. (1.50) formulę) egzistavimą ir vienatį aprėžtoje srityje $\Omega_k\subset\Omega$ (žr.(1.6) formulę).
2. Įrodysime apytikslio silpnojo srendinio $\mathbf{v}^{(k,N)}$ konvergavimą į tikslų sprendinį $\mathbf{v}^{(k)}$ aprėžtoje srityje $\Omega_k\subset\Omega$ ir pereisime nuo aprėžtos srities Ω_k prie visos srities Ω, kai $k\to+\infty$.

1. Įrodysime (1.47) sistemos apytikslio silpnojo sprendinio $\mathbf{v}^{(k,N)}$ egzistavimą ir vienatį aprėžtoje srityje $\Omega_k\subset\Omega$. Tam į (1.47) sistemą formaliai įsistatome apytikslio sprendinio $\mathbf{v}^{(k,N)}$ išraiškas Furjė eilute. Tą padaryti galime, nes kiekviena $2\pi-$periodinė $L^2(0,2\pi)$ funkcija gali būti išreikšta Furjė eilute. Tuomet ieškomas apytikslis sprendinys $\mathbf{v}^{(k,N)}(x,t)$ tenkina tokią sistemą:

$$\begin{cases}\mathbf{v}_t^{(k,N)}-\nu\Delta\mathbf{v}^{(k,N)}+\nabla p^{(k,N)}=\nu\Delta\mathbf{A}+\mathbf{f}^{(N)},\\ \mathrm{div}\mathbf{v}^{(k,N)}=0,\\ \mathbf{v}^{(k,N)}|_{\partial\Omega_k\times(0,2\pi)}=0,\\ \mathbf{v}^{(k,N)}(x,0)=\mathbf{v}^{(k,N)}(x,2\pi),\end{cases}\tag{1.49}$$

čia

$$\mathbf{v}^{(k,N)}(x,t)=\frac{\mathbf{b}_0^{(c)}(x)}{2}+\sum_{n=1}^N(\mathbf{a}_n^{(s)}(x)\sin(nt)+\mathbf{b}_n^{(c)}(x)\cos(nt));\tag{1.50}$$

$$p^{(k,N)}(x,t)=\frac{p_0^{(c)}(x)}{2}+\sum_{n=1}^N(p_n^{(s)}(x)\sin(nt)+p_n^{(c)}(x)\cos(nt));\tag{1.51}$$

$$\mathbf{f}^{(N)}(x,t) = \frac{\mathbf{f}_0^{(c)}(x)}{2} + \sum_{n=1}^{N}(\mathbf{f}_n^{(s)}(x)\sin(nt) + \mathbf{f}_n^{(c)}(x)\cos(nt)). \tag{1.52}$$

Tam, kad įrodytume apytikslio silpnojo sprendinio $\mathbf{v}^{(k,N)}(x,t)$ egzistavimą ir vienatį, įrodysime (1.50) apytikslio silpnojo sprendinio Furjė eilutės koeficientų egzistavimą ir vienatį.

(1.50) - (1.52) išraiškas statome į (1.49_1) lygtį:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\mathbf{b}_0^{(c)}(x)}{2} + \sum_{n=1}^{N}(\mathbf{a}_n^{(s)}(x)\sin(nt) + \mathbf{b}_n^{(c)}(x)\cos(nt))\right)_t \\
&- \nu\Delta\left(\frac{\mathbf{b}_0^{(c)}(x)}{2} + \sum_{n=1}^{N}(\mathbf{a}_n^{(s)}(x)\sin(nt) + \mathbf{b}_n^{(c)}(x)\cos(nt))\right) \\
&+ \nabla\left(\frac{p_0^{(c)}(x)}{2} + \sum_{n=1}^{N}(p_n^{(s)}(x)\sin(nt) + p_n^{(c)}(x)\cos(nt))\right) \\
&= \nu\Delta\frac{2\mathbf{A}(x)}{2} + \left(\frac{\mathbf{f}_0^{(c)}(x)}{2} + \sum_{n=1}^{N}(\mathbf{f}_n^{(s)}(x)\sin(nt) + \mathbf{f}_n^{(c)}(x)\cos(nt))\right).
\end{aligned}$$

Išdiferencijavę turime tokį reiškinį:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N} n\mathbf{a}_n^{(s)}(x)\cos(nt) - \sum_{n=1}^{N} n\mathbf{b}_n^{(c)}(x)\sin(nt) - \nu\Delta\frac{\mathbf{b}_0^{(c)}(x)}{2} - \nu\sum_{n=1}^{N}\Delta\mathbf{a}_n^{(s)}(x)\sin(nt) \\
&- \nu\sum_{n=1}^{N}\Delta\mathbf{b}_n^{(c)}(x)\cos(nt) + \nabla\frac{p_0^{(c)}(x)}{2} + \sum_{n=1}^{N}\nabla p_n^{(s)}(x)\sin(nt) + \sum_{n=1}^{N}\nabla p_n^{(c)}(x)\cos(nt) \\
&= \nu\Delta\frac{2\mathbf{A}(x)}{2} + \frac{\mathbf{f}_0^{(c)}(x)}{2} + \sum_{n=1}^{N}\mathbf{f}_n^{(s)}(x)\sin(nt) + \sum_{n=1}^{N}\mathbf{f}_n^{(c)}(x)\cos(nt).
\end{aligned}$$

Tuomet, sugrupavę atitinkamus narius prie sinusų ir kosinusų funkcijų, gauname šias lygčių sistemas:

$$\begin{cases}
-\nu\Delta\mathbf{b}_0^{(c)}(x) + \nabla p_0^{(c)}(x) = 2\nu\Delta\mathbf{A}(x) + \mathbf{f}_0^{(c)}(x), \\
\operatorname{div}\mathbf{b}_0^{(c)}(x) = 0, \\
\mathbf{b}_0^{(c)}(x)|_{\partial\Omega_k} = 0.
\end{cases} \tag{1.53}$$

$$\begin{cases}
n\mathbf{a}_n^{(s)}(x) - \nu\Delta\mathbf{b}_n^{(c)}(x) + \nabla p_0^{(c)}(x) = \mathbf{f}_n^{(c)}(x), \\
-n\mathbf{b}_n^{(c)}(x) - \nu\Delta\mathbf{a}_n^{(s)}(x) + \nabla p_0^{(s)}(x) = \mathbf{f}_n^{(s)}(x), \\
\operatorname{div}\mathbf{a}_n^{(s)}(x) = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{b}_n^{(c)}(x) = 0, \\
\mathbf{a}_n^{(s)}(x)|_{\partial\Omega_k} = 0, \quad \mathbf{b}_n^{(c)}(x)|_{\partial\Omega_k} = 0, \quad n = 1, 2, ..., N.
\end{cases} \tag{1.54}$$

Pastebėkime, kad (1.53) sistema yra Stokso sistema su homogenine kraštie sąlyga. Šios sistemos sprendinio egzistavimo ir vienaties įrodymą galima rasti [6] knygoje.

Įrodysime (1.54) sistemos silpnojo sprendinio egzistavimą ir vienatį aprėžtoje srityje Ω_k. Tam (1.54_1) lygtį dauginame iš $\boldsymbol{\eta} \in H(\Omega_k)$, o ($1.54_2$) lygtį dauginame iš $\boldsymbol{\xi} \in H(\Omega_k)$ ir suintegruojame dalimis sritimi Ω_k. Tuomet turime tokią sistemą:

$$\begin{cases} n \int\limits_{\Omega_k} \mathbf{a}_n^{(s)} \cdot \boldsymbol{\eta} dx + \nu \int\limits_{\Omega_k} \nabla \mathbf{b}_n^{(c)} : \nabla \boldsymbol{\eta} dx = \int\limits_{\Omega_k} \mathbf{f}_n^{(c)} \cdot \boldsymbol{\eta} dx, \\ -n \int\limits_{\Omega_k} \mathbf{b}_n^{(c)} \cdot \boldsymbol{\xi} dx + \nu \int\limits_{\Omega_k} \nabla \mathbf{a}_n^{(s)} : \nabla \boldsymbol{\xi} dx = \int\limits_{\Omega_k} \mathbf{f}_n^{(s)} \cdot \boldsymbol{\xi} dx. \end{cases} \tag{1.55}$$

Vadinasi, gavome, kad egzistuoja (1.54) uždavinio silpnieji sprendiniai $\mathbf{a}_n^{(s)} \in H(\Omega_k)$ ir $\mathbf{b}_n^{(c)} \in H(\Omega_k)$, kurie tenkina (1.55) sistemą. Kadangi Ω_k yra aprėžta sritis, naudosime Fredholmo teoremą. Tam (1.55) sistemos lygybes suvesime į operatorines lygtis. Nagrinėjame integralinę tapatybę

$$n \int\limits_{\Omega_k} \mathbf{a}_n^{(s)} \cdot \boldsymbol{\eta} dx + \nu \int\limits_{\Omega_k} \nabla \mathbf{b}_n^{(c)} : \nabla \boldsymbol{\eta} dx = \int\limits_{\Omega_k} \mathbf{f}_n^{(c)} \cdot \boldsymbol{\eta} dx.$$

Skaliarinė sandauga erdvėje $H(\Omega_k)$ apibrėžiama taip:

$$[\mathbf{b}_n^{(c)}, \boldsymbol{\eta}] = \int\limits_{\Omega_k} \nabla \mathbf{b}_n^{(c)} : \nabla \boldsymbol{\eta} dx. \tag{1.56}$$

Pasinaudoję Koši - Švarco ir Puankarė - Fridrichso nelygybėmis įvertiname likusius integralus:

$$\begin{aligned} \left| \int\limits_{\Omega_k} \mathbf{f}_n^{(c)} \cdot \boldsymbol{\eta} dx \right| &\leqslant \left(\int\limits_{\Omega_k} |\mathbf{f}_n^{(c)}|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int\limits_{\Omega_k} |\boldsymbol{\eta}|^2 dx \right)^{1/2} = ||\mathbf{f}_n^{(c)}||_{L^2(\Omega_k)} ||\boldsymbol{\eta}||_{L^2(\Omega_k)} \\ &\leqslant c_p^{1/2} ||\mathbf{f}_n^{(c)}||_{L^2(\Omega_k)} \left(\int\limits_{\Omega_k} |\nabla \boldsymbol{\eta}|^2 dx \right)^{1/2} = c_p^{1/2} ||\mathbf{f}_n^{(c)}||_{L^2(\Omega_k)} ||\boldsymbol{\eta}||_{H(\Omega_k)}, \end{aligned}$$

čia c_p Puankarė - Fridrichso nelygybės konstanta.

Kadangi $\mathbf{f}_n^{(c)} \in H(\Omega_k)$, tai remiantis Ryso teorema (žr. 1.1.3 teoremą) egzistuoja toks vienintelis $\mathbf{F}^{(c)} \in H(\Omega_k)$, kad integralas $\int\limits_{\Omega_k} \mathbf{f}_n^{(c)} \cdot \boldsymbol{\eta} dx$ erdvėje $H(\Omega_k)$ apibrėžia tiesinį aprėžtąjį funkcionalą, t.y.,

$$\int\limits_{\Omega_k} \mathbf{f}_n^{(c)} \cdot \boldsymbol{\eta} dx = [\mathbf{F}^{(c)}, \boldsymbol{\eta}], \ \forall \boldsymbol{\eta} \in H(\Omega_k). \tag{1.57}$$

Analogiškai gauname

$$\begin{aligned}
&\left| n \int\limits_{\Omega_k} \mathbf{a}_n^{(s)} \cdot \boldsymbol{\eta} dx \right| \leqslant |n| \left| \int\limits_{\Omega_k} \mathbf{a}_n^{(s)} \cdot \boldsymbol{\eta} dx \right| \leqslant |n| \left(\int\limits_{\Omega_k} |\mathbf{a}_n^{(s)}|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int\limits_{\Omega_k} |\boldsymbol{\eta}|^2 dx \right)^{1/2} \\
&= |n| \cdot ||\mathbf{a}_n^{(s)}||_{L^2(\Omega_k)} ||\boldsymbol{\eta}||_{L^2(\Omega_k)} \leqslant |n| c_p^{1/2} \left(\int\limits_{\Omega_k} |\nabla \mathbf{a}_n^{(s)}|^2 dx \right)^{1/2} c_p^{1/2} \left(\int\limits_{\Omega_k} |\nabla \boldsymbol{\eta}|^2 dx \right)^{1/2} \\
&= |n| c_p ||\mathbf{a}_n^{(s)}||_{H(\Omega_k)} ||\boldsymbol{\eta}||_{H(\Omega_k)}.
\end{aligned} \tag{1.58}$$

Todėl su kiekvienu fiksuotu $\mathbf{a}_n^{(s)} \in H(\Omega_k)$ integralas $n \int\limits_{\Omega_k} \mathbf{a}_n^{(s)} \cdot \boldsymbol{\eta} dx$ apibrėžia tiesinį tolydųjį funkcionalą erdvėje $H(\Omega_k)$, ir pagal Ryso teoremą jį galima išreikšti skaliarine sandauga

$$n \int\limits_{\Omega_k} \mathbf{a}_n^{(s)} \cdot \boldsymbol{\eta} dx = [\mathcal{B}\mathbf{a}_n^{(s)}, \boldsymbol{\eta}],$$

čia $\mathcal{B}\mathbf{a}_n^{(s)} \in H(\Omega_k)$. Iš (1.58) nelygybės turime:

$$\begin{aligned}
&||\mathcal{B}\mathbf{a}_n^{(s)}||^2_{H(\Omega_k)} = [\mathcal{B}\mathbf{a}_n^{(s)}, \mathcal{B}\mathbf{a}_n^{(s)}] \leqslant n \int\limits_{\Omega_k} \mathbf{a}_n^{(s)} \cdot \mathcal{B}\mathbf{a}_n^{(s)} dx \leqslant |n| \cdot ||\mathbf{a}_n^{(s)}||_{L^2(\Omega_k)} ||\mathcal{B}\mathbf{a}_n^{(s)}||_{L^2(\Omega_k)} \\
&\leqslant |n| c_p ||\mathbf{a}_n^{(s)}||_{H(\Omega_k)} ||\mathcal{B}\mathbf{a}_n^{(s)}||_{H(\Omega_k)}.
\end{aligned}$$

Iš čia išplaukia, jog

$$||\mathcal{B}\mathbf{a}_n^{(s)}||_{H(\Omega_k)} \leqslant c ||\mathbf{a}_n^{(s)}||_{H(\Omega_k)}.$$

Vadinasi, $\mathcal{B} : H(\Omega_k) \to H(\Omega_k)$ yra tiesinis aprėžtasis operatorius. Parodysime, kad $\mathcal{B}$ yra visiškai tolydus. Tegul $\mathbf{a}_n^{(s,m)}$ yra erdvėje $H(\Omega_k)$ silpnai konverguojanti seka. Tuomet remiantis operatoriaus $\mathcal{B}$ apibrėžimu ir (1.58) įverčiu, gauname

$$\begin{aligned}
&||\mathcal{B}\mathbf{a}_n^{(s,l)} - \mathcal{B}\mathbf{a}_n^{(s,m)}||^2_{H(\Omega_k)} = [\mathcal{B}\mathbf{a}_n^{(s,l)} - \mathcal{B}\mathbf{a}_n^{(s,m)}, \mathcal{B}\mathbf{a}_n^{(s,l)} - \mathcal{B}\mathbf{a}_n^{(s,m)}] \\
&\leqslant n \int\limits_{\Omega_k} (\mathbf{a}_n^{(s,l)} - \mathbf{a}_n^{(s,m)}) \cdot (\mathcal{B}\mathbf{a}_n^{(s,l)} - \mathcal{B}\mathbf{a}_n^{(s,m)}) dx \leqslant |n| \cdot ||\mathbf{a}_n^{(s,l)} - \mathbf{a}_n^{(s,m)}||_{L^2(\Omega_k)} ||\mathcal{B}\mathbf{a}_n^{(s,l)} - \mathcal{B}\mathbf{a}_n^{(s,m)}||_{L^2(\Omega_k)} \\
&\leqslant c ||\mathbf{a}_n^{(s,l)} - \mathbf{a}_n^{(s,m)}||_{L^2(\Omega_k)} ||\mathcal{B}\mathbf{a}_n^{(s,l)} - \mathcal{B}\mathbf{a}_n^{(s,m)}||_{H(\Omega_k)}.
\end{aligned}$$

Taigi,

$$||\mathcal{B}\mathbf{a}_n^{(s,l)} - \mathcal{B}\mathbf{a}_n^{(s,m)}||_{H(\Omega_k)} \leqslant c ||\mathbf{a}_n^{(s,l)} - \mathbf{a}_n^{(s,m)}||_{L^2(\Omega_k)}. \tag{1.59}$$

Pagal Sobolevo įdėties teoremą (žr. 1.1.5 teoremą) įdėtis $H(\Omega_k) \hookrightarrow L^2(\Omega_k)$ yra visiškai tolydi. Todėl kiekviena silpnai konverguojanti erdvėje $H(\Omega_k)$ seka konverguoja pagal erdvės $L^2(\Omega_k)$ normą. Vadinasi, (1.59) nelygybės dešinė pusė artėja į nulį, kai $l, m \to \infty$, ir seka $\{\mathcal{B}\mathbf{a}_n^{(s,m)}\}$ yra fundamentali erdvėje $H(\Omega_k)$. Kadangi erdvė $H(\Omega_k)$ yra pilna, tai ši seka konverguoja pagal erdvės $H(\Omega_k)$ normą. Taigi, operatorius $\mathcal{B}$ yra visiškai tolydus.

Vadinasi, integralinę tapatybę

$$n\int\limits_{\Omega_k}\mathbf{a}_n^{(s)}\cdot\boldsymbol{\eta}dx+\nu\int\limits_{\Omega_k}\nabla\mathbf{b}_n^{(c)}:\nabla\boldsymbol{\eta}dx=\int\limits_{\Omega_k}\mathbf{f}_n^{(c)}\cdot\boldsymbol{\eta}dx,$$

galime perrašyti taip:

$$[\mathcal{B}\mathbf{a}_n^{(s)},\boldsymbol{\eta}]+\nu[\mathbf{b}_n^{(c)},\boldsymbol{\eta}]=[\mathbf{F}^{(c)},\boldsymbol{\eta}],\ \forall\boldsymbol{\eta}\in H(\Omega_k),\tag{1.60}$$

t.y. gauname tokią operatorinę lygtį:

$$\mathcal{B}\mathbf{a}_n^{(s)}+\nu\mathbf{b}_n^{(c)}=\mathbf{F}^{(c)},\ \forall\boldsymbol{\eta}\in H(\Omega_k).\tag{1.61}$$

Analogiškai, integralinę tapatybę

$$-n\int\limits_{\Omega_k}\mathbf{b}_n^{(c)}\cdot\boldsymbol{\xi}dx+\nu\int\limits_{\Omega_k}\nabla\mathbf{a}_n^{(s)}:\nabla\boldsymbol{\xi}dx=\int\limits_{\Omega_k}\mathbf{f}_n^{(s)}\cdot\boldsymbol{\xi}dx,$$

galime perrašyti taip:

$$[\mathcal{B}\mathbf{b}_n^{(c)},\boldsymbol{\xi}]+\nu[\mathbf{a}_n^{(s)},\boldsymbol{\xi}]=[\mathbf{F}^{(s)},\boldsymbol{\xi}],\ \forall\boldsymbol{\xi}\in H(\Omega_k),\tag{1.62}$$

t.y. gauname operatorinę lygtį

$$\mathcal{B}\mathbf{b}_n^{(c)}+\nu\mathbf{a}_n^{(s)}=\mathbf{F}^{(s)},\ \forall\boldsymbol{\xi}\in H(\Omega_k).\tag{1.63}$$

Taigi, turime operatorinių lygčių sistemą

$$\begin{cases}\mathcal{B}\mathbf{a}_n^{(s)}+\nu\mathbf{b}_n^{(c)}=\mathbf{F}^{(c)},\ \forall\boldsymbol{\eta}\in H(\Omega_k),\\ \mathcal{B}\mathbf{b}_n^{(c)}+\nu\mathbf{a}_n^{(s)}=\mathbf{F}^{(s)},\ \forall\boldsymbol{\xi}\in H(\Omega_k).\end{cases}$$

Kai įrodėme, kad operatorius $\mathcal{B}$ yra visiškai tolydus, galime taikyti Fredholmo teoremą. Nagrinėjame homogeninių lygčių sistemą

$$\begin{cases}\mathcal{B}\mathbf{a}_n^{(s)}+\nu\mathbf{b}_n^{(c)}=0,\ \forall\boldsymbol{\eta}\in H(\Omega_k),\\ \mathcal{B}\mathbf{b}_n^{(c)}+\nu\mathbf{a}_n^{(s)}=0,\ \forall\boldsymbol{\xi}\in H(\Omega_k).\end{cases}$$

Tuomet

$$\begin{cases}n\int\limits_{\Omega_k}\mathbf{a}_n^{(s)}\cdot\boldsymbol{\eta}dx+\nu\int\limits_{\Omega_k}\nabla\mathbf{b}_n^{(c)}:\nabla\boldsymbol{\eta}dx=0,\\ -n\int\limits_{\Omega_k}\mathbf{b}_n^{(c)}\cdot\boldsymbol{\xi}dx+\nu\int\limits_{\Omega_k}\nabla\mathbf{a}_n^{(s)}:\nabla\boldsymbol{\xi}dx=0.\end{cases}$$

Įsistatę $\boldsymbol{\eta}(x)=\mathbf{b}_n^{(c)}(x)$ ir $\boldsymbol{\xi}(x)=\mathbf{a}_n^{(s)}(x)$ į šią sistemą, gauname:

$$\begin{cases}n\int\limits_{\Omega_k}\mathbf{a}_n^{(s)}(x)\cdot\mathbf{b}_n^{(c)}(x)dx+\nu\int\limits_{\Omega_k}\nabla\mathbf{b}_n^{(c)}(x):\nabla\mathbf{b}_n^{(c)}(x)=0;\\ -n\int\limits_{\Omega_k}\mathbf{b}_n^{(c)}(x)\cdot\mathbf{a}_n^{(s)}(x)dx+\nu\int\limits_{\Omega_k}\nabla\mathbf{a}_n^{(s)}(x):\nabla\mathbf{a}_n^{(s)}(x)=0.\end{cases}$$

Sudėję šias lygybes, turime:

$$\nu \int\limits_{\Omega_k} |\nabla \mathbf{b}_n^{(c)}(x)|^2 dx + \nu \int\limits_{\Omega_k} |\nabla \mathbf{a}_n^{(s)}(x)|^2 dx = 0$$

Iš čia,

$$\mathbf{b}_n^{(c)}(x) = 0, \quad \mathbf{a}_n^{(s)}(x) = 0.$$

Remiantis Fredholmo teorema gauname, kad (1.54) sistema turi vienintelį sprendinį. Kadangi Furjė koeficientai egzistuoja, tai egzistuoja ir vienintelis apytikslis sprendinys $\mathbf{v}^{(k,N)}$.

2.Tam, kad įrodytume apytikslio sprendinio $\mathbf{v}^{(k,N)}(x,t)$ konvergavimą į tikslųjį silpnąjį sprendinį $\mathbf{v}^{(k)}(x,t)$ aprėžtoje srityje Ω_k, reikia gauti apytikslio sprendinio $\mathbf{v}^{(k,N)}(x,t)$ įverčius. Padauginkime (1.49_1) lygtį iš $\mathbf{v}^{(k,N)}(x,t)$ ir suintegruokime dalimis sritimi Ω_k:

$$\int\limits_{\Omega_k} \mathbf{v}_t^{(k,N)} \cdot \mathbf{v}^{(k,N)} dx + \nu \int\limits_{\Omega_k} |\nabla \mathbf{v}^{(k,N)}|^2 dx = -\nu \int\limits_{\Omega_k} \nabla \mathbf{A} : \nabla \mathbf{v}^{(k,N)} dx + \int\limits_{\Omega_k} \mathbf{f}^{(N)} \cdot \mathbf{v}^{(k,N)} dx. \tag{1.64}$$

Pastebėję, kad

$$\mathbf{v}_t^{(k,N)} \cdot \mathbf{v}^{(k,N)} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\mathbf{v}^{(k,N)}|^2,$$

iš (1.64) gauname

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega_k} |\mathbf{v}^{(k,N)}|^2 dx + \nu \int\limits_{\Omega_k} |\nabla \mathbf{v}^{(k,N)}|^2 dx = -\nu \int\limits_{\Omega_k} \nabla \mathbf{A} : \nabla \mathbf{v}^{(k,N)} dx + \int\limits_{\Omega_k} \mathbf{f}^{(N)} \cdot \mathbf{v}^{(k,N)} dx.$$

Gautą lygybę suintegruokime kintamojo t atžvilgiu nuo 0 iki 2π:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_k} |\mathbf{v}^{(k,N)}(x,2\pi)|^2 dx - \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_k} |\mathbf{v}^{(k,N)}(x,0)|^2 dx + \nu \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\Omega_k} |\nabla \mathbf{v}^{(k,N)}|^2 dx dt \\ &= -\nu \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\Omega_k} \nabla \mathbf{A} : \nabla \mathbf{v}^{(k,N)} dx dt + \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\Omega_k} \mathbf{f}^{(N)} \cdot \mathbf{v}^{(k,N)} dx dt. \end{aligned}$$

Pasinaudoję periodiškumo sąlyga $\mathbf{v}^{(k,N)}(x,0) = \mathbf{v}^{(k,N)}(x,2\pi)$, turime

$$\nu \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\Omega_k} |\nabla \mathbf{v}^{(k,N)}|^2 dx dt = -\nu \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\Omega_k} \nabla \mathbf{A} : \nabla \mathbf{v}^{(k,N)} dx dt + \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\Omega_k} \mathbf{f}^{(N)} \cdot \mathbf{v}^{(k,N)} dx dt. \tag{1.65}$$

Pasinaudojame Koši-Švarco ir Puankarė-Fridrichso nelygybėmis:

$$
\begin{aligned}
&\nu\int_0^{2\pi}\int_{\Omega_k}|\nabla\mathbf{v}^{(k,N)}|^2dxdt=-\nu\int_0^{2\pi}\int_{\Omega_k}\nabla\mathbf{A}:\nabla\mathbf{v}^{(k,N)}dxdt+\int_0^{2\pi}\int_{\Omega_k}\mathbf{f}^{(N)}\cdot\mathbf{v}^{(k,N)}dxdt\\
&\leqslant\nu\left(\int_0^{2\pi}\int_{\Omega_k}|\nabla\mathbf{A}|^2dxdt\right)^{1/2}\left(\int_0^{2\pi}\int_{\Omega_k}|\nabla\mathbf{v}^{(k,N)}|^2dxdt\right)^{1/2}\\
&+\left(\int_0^{2\pi}\int_{\Omega_k}|\mathbf{f}^{(N)}|^2dxdt\right)^{1/2}\left(\int_0^{2\pi}\int_{\Omega_k}|\mathbf{v}^{(k,N)}|^2dxdt\right)^{1/2}\\
&\leqslant\nu\left(2\pi\int_{\Omega_k}|\nabla\mathbf{A}|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_0^{2\pi}\int_{\Omega_k}|\nabla\mathbf{v}^{(k,N)}|^2dxdt\right)^{1/2}\\
&+c_p^{1/2}\left(\int_0^{2\pi}\int_{\Omega_k}|\mathbf{f}^{(N)}|^2dxdt\right)^{1/2}\left(\int_0^{2\pi}\int_{\Omega_k}|\nabla\mathbf{v}^{(k,N)}|^2dxdt\right)^{1/2}\\
&\leqslant\left(\nu\sqrt{2\pi}\left(\int_{\Omega_k}|\nabla\mathbf{A}|^2dx\right)^{1/2}+c_p^{1/2}\left(\int_0^{2\pi}\int_{\Omega_k}|\mathbf{f}^{(N)}|^2dxdt\right)^{1/2}\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi}\int_{\Omega_k}|\nabla\mathbf{v}^{(k,N)}|^2dxdt\right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Padaliję abi puses iš $\left(\int_0^{2\pi}\int_{\Omega_k}|\nabla\mathbf{v}^{(k,N)}|^2dxdt\right)^{1/2}$, gauname

$$
\nu\left(\int_0^{2\pi}\int_{\Omega_k}|\nabla\mathbf{v}^{(k,N)}|^2dxdt\right)^{1/2}\leqslant\nu\sqrt{2\pi}\left(\int_{\Omega_k}|\nabla\mathbf{A}|^2dx\right)^{1/2}+c_p^{1/2}\left(\int_0^{2\pi}\int_{\Omega_k}|\mathbf{f}^{(N)}|^2dxdt\right)^{1/2}.
$$

Pastarąją nelygybę galima perrašyti taip:

$$
||\nabla\mathbf{v}^{(k,N)}||_{L^2(0,2\pi;L^2(\Omega_k))}\leqslant C(||\nabla\mathbf{A}||_{L^2(\Omega_k)}+||\mathbf{f}^{(N)}||_{L^2(0,2\pi;L^2(\Omega_k))}), \tag{1.66}
$$

čia $C=\max(\sqrt{2\pi},\frac{c_p^{1/2}}{\nu})$. Pasinaudoję (1.45) įverčiu, turime

$$
\begin{aligned}
&||\nabla\mathbf{v}^{(k,N)}||_{L^2(0,2\pi;L^2(\Omega_k))}\leqslant C(||\nabla\mathbf{A}||_{L^2(\Omega_k)}+||\mathbf{f}^{(N)}||_{L^2(0,2\pi;L^2(\Omega_k))})\\
&\leqslant c\left(\left(||\boldsymbol{\varphi}||^2_{W^{1/2,2}(\partial\Omega)}\left(1+\int_1^{R_k}\frac{1}{g^3(x_2)}dx_2\right)\right)^{1/2}+||\mathbf{f}^{(N)}||_{L^2(0,2\pi;L^2(\Omega_k))}\right).
\end{aligned} \tag{1.67}
$$

Tam, kad vėliau galėtume pereiti prie ribos pagal sritį, įverčiuose esančios konstantos turi nepriklausyti nuo srities, todėl gautą įvertį pertvarkysime pasinaudodami (A.3) nelygybe (žr. A Priede). (1.65) lygtį perrašykime taip:

$$
\nu\int_0^{2\pi}\int_{\Omega_k}|\nabla\mathbf{v}^{(k,N)}|^2dxdt=-\nu\int_0^{2\pi}\int_{\Omega_k}\nabla\mathbf{A}:\nabla\mathbf{v}^{(k,N)}dxdt+\int_0^{2\pi}\int_{\Omega_k}\mathbf{f}^{(N)}\cdot g\cdot g^{-1}\cdot\mathbf{v}^{(k,N)}dxdt.
$$

Pasinaudojame Koši-Švarco nelygybe:

$$\begin{aligned}
&\nu \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\Omega_k} |\nabla \mathbf{v}^{(k,N)}(x,t)|^2 dxdt = -\nu \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\Omega_k} \nabla \mathbf{A}(x) : \nabla \mathbf{v}^{(k,N)}(x,t) dxdt \\
&+ \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\Omega_k} \mathbf{f}^{(N)}(x,t) \cdot g(x_2) \cdot g^{-1}(x_2) \cdot \mathbf{v}^{(k,N)}(x,t) dxdt \\
&\leqslant \nu \left(\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\Omega_k} |\nabla \mathbf{A}(x)|^2 dxdt \right)^{1/2} \left(\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\Omega_k} |\nabla \mathbf{v}^{(k,N)}(x,t)|^2 dxdt \right)^{1/2} \\
&+ \left(\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\Omega_k} |\mathbf{f}^{(N)}(x,t)|^2 \cdot |g(x_2)|^2 dxdt \right)^{1/2} \left(\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\Omega_k} \frac{|\mathbf{v}^{(k,N)}(x,t)|^2}{|g(x_2)|^2} dxdt \right)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{1.68}$$

Dabar integralą $\left(\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\Omega_k} \frac{|\mathbf{v}^{(k,N)}(x,t)|^2}{|g(x_2)|^2} dxdt \right)^{1/2}$ įvertinkime pasinaudoję (A.3) nelygybe, tuomet

$$\left(\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\Omega_k} \frac{|\mathbf{v}^{(k,N)}(x,t)|^2}{|g(x_2)|^2} dxdt \right)^{1/2} \leqslant c^{1/2} \left(\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\Omega_k} |\nabla \mathbf{v}^{(k,N)}(x,t)|^2 dxdt \right)^{1/2}.$$

Tada, įsistatę į (1.68), turime

$$\begin{aligned}
&\nu \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\Omega_k} |\nabla \mathbf{v}^{(k,N)}(x,t)|^2 dxdt \leqslant \nu \left(\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\Omega_k} |\nabla \mathbf{A}(x)|^2 dxdt \right)^{1/2} \left(\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\Omega_k} |\nabla \mathbf{v}^{(k,N)}(x,t)|^2 dxdt \right)^{1/2} \\
&+ c^{1/2} \left(\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\Omega_k} |\mathbf{f}^{(N)}(x,t)|^2 |g(x_2)|^2 dxdt \right)^{1/2} \left(\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\Omega_k} |\nabla \mathbf{v}^{(k,N)}(x,t)|^2 dxdt \right)^{1/2} \\
&\leqslant \left(\nu\sqrt{2\pi} \left(\int\limits_{\Omega_k} |\nabla \mathbf{A}(x)|^2 dx \right)^{1/2} + c^{1/2} \left(\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\Omega_k} |\mathbf{f}^{(N)}(x,t)|^2 \cdot |g(x_2)|^2 dxdt \right)^{1/2} \right) \cdot \\
&\left(\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\Omega_k} |\nabla \mathbf{v}^{(k,N)}(x,t)|^2 dxdt \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Padaliname abi nelygybės puses iš $\nu \left(\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\Omega_k} |\nabla \mathbf{v}^{(k,N)}(x,t)|^2 dxdt \right)^{1/2}$. Tuomet

$$\left(\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\Omega_k} |\nabla \mathbf{v}^{(k,N)}(x,t)|^2 dxdt \right)^{1/2} \leqslant C_2 \left(\left(\int\limits_{\Omega_k} |\nabla \mathbf{A}(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\Omega_k} |\mathbf{f}^{(N)}(x,t)|^2 \cdot |g(x_2)|^2 dxdt \right)^{1/2} \right),$$

čia konstanta $C_2 = \max(\nu^{1/2}\sqrt{2\pi}, \frac{c^{1/2}}{\nu^{1/2}})$.

Galiausiai, turime tokį įvertį

$$||\nabla \mathbf{v}^{(k,N)}||_{L^2(0,2\pi;L^2(\Omega_k))} \leqslant C_2(||\nabla \mathbf{A}||_{L^2(\Omega_k)} + ||\mathbf{f}^{(N)} g||_{L^2(0,2\pi;L^2(\Omega_k))}),$$

čia konstanta C_2 nepriklauso nuo srities. Pasinaudoję (1.67) gauname

$$||\nabla \mathbf{v}^{(k,N)}||_{L^2(0,2\pi;L^2(\Omega_k))} \leqslant C\left(\left(||\boldsymbol{\varphi}||^2_{W^{1/2,2}(\partial\Omega)}\left(1+\int\limits_1^{R_k}\frac{1}{g^3(x_2)}dx_2\right)\right)^{1/2} + ||\mathbf{f}^{(N)}||_{L^2(0,2\pi;L^2_1(\Omega_k))}\right), \tag{1.69}$$

čia $L^2_1(\Omega_k)$ yra svorinė erdvė su norma

$$||w||_{L^2_1(\Omega_k)} = \sqrt{\int\limits_{D_k}|w|^2 g^2 dx} + \sqrt{\int\limits_{\Omega_0}|w|^2 dx}.$$

Gausime $\mathbf{v}_t^{(k,N)}$ įvertį. Padauginame (1.49_1) lygtį iš $\mathbf{v}_t^{(k,N)}(x,t)$ ir suintegravę dalimis sritimi Ω_k, gauname:

$$\int\limits_{\Omega_k}|\mathbf{v}_t^{(k,N)}|^2 dx + \nu\int\limits_{\Omega_k}\nabla\mathbf{v}^{(k,N)} : \nabla\mathbf{v}_t^{(k,N)}dx = \nu\int\limits_{\Omega_k}\Delta\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}_t^{(k,N)}dx + \int\limits_{\Omega_k}\mathbf{f}^{(N)}\cdot\mathbf{v}_t^{(k,N)}dx. \tag{1.70}$$

Pasinaudoję sąryšiu

$$\nabla\mathbf{v}^{(k,N)} : \nabla\mathbf{v}_t^{(k,N)} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|\nabla\mathbf{v}^{(k,N)}|^2),$$

iš (1.70) turime

$$\int\limits_{\Omega_k}|\mathbf{v}_t^{(k,N)}|^2 dx + \frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_k}(|\nabla\mathbf{v}^{(k,N)}|^2)dx = \nu\int\limits_{\Omega_k}\Delta\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}_t^{(k,N)}dx + \int\limits_{\Omega_k}\mathbf{f}^{(N)}\cdot\mathbf{v}_t^{(k,N)}dx.$$

Suintegruojame pagal laiką nuo 0 iki 2π:

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Omega_k}|\mathbf{v}_t^{(k,N)}|^2 dxdt + \frac{\nu}{2}\int\limits_{\Omega_k}|\nabla\mathbf{v}^{(k,N)}(x,2\pi)|^2 dx - \frac{\nu}{2}\int\limits_{\Omega_k}|\nabla\mathbf{v}^{(k,N)}(x,0)|^2 dx\\ &= \nu\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Omega_k}\Delta\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}_t^{(k,N)}dxdt + \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Omega_k}\mathbf{f}^{(N)}\cdot\mathbf{v}_t^{(k,N)}dxdt.\end{aligned}$$

Kadangi $\nabla\mathbf{v}^{(k,N)}(x,0) = \nabla\mathbf{v}^{(k,N)}(x,2\pi)$, tai

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Omega_k}|\mathbf{v}_t^{(k,N)}|^2 dxdt = \nu\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Omega_k}\Delta\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}_t^{(k,N)}dxdt + \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Omega_k}\mathbf{f}^{(N)}\cdot\mathbf{v}_t^{(k,N)}dxdt.$$

Tuomet, pasinaudojame Koši -Švarco nelygybe

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Omega_k}|\mathbf{v}_t^{(k,N)}|^2 dxdt &\leqslant \nu\left(\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Omega_k}|\Delta\mathbf{A}|^2 dxdt\right)^{1/2}\left(\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Omega_k}|\mathbf{v}_t^{(k,N)}|^2 dxdt\right)^{1/2} +\\ &+\left(\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Omega_k}|\mathbf{f}^{(N)}|^2 dxdt\right)^{1/2}\left(\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Omega_k}|\mathbf{v}_t^{(k,N)}|^2 dxdt\right)^{1/2}\\ &\leqslant\left(\nu\sqrt{2\pi}\left(\int\limits_{\Omega_k}|\Delta\mathbf{A}|^2 dx\right)^{1/2} + \left(\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Omega_k}|\mathbf{f}^{(N)}|^2 dxdt\right)^{1/2}\right)\left(\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Omega_k}|\mathbf{v}_t^{(k,N)}|^2 dxdt\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Padalinę abi nelygybės puses iš $\left(\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Omega_k}|\mathbf{v}_t^{(k,N)}|^2dxdt\right)^{1/2}$, gauname

$$\left(\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Omega_k}|\mathbf{v}_t^{(k,N)}|^2dxdt\right)^{1/2}\leqslant\nu\sqrt{2\pi}\left(\int\limits_{\Omega_k}|\Delta\mathbf{A}|^2dx\right)^{1/2}+\left(\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Omega_k}|\mathbf{f}^{(N)}|^2dxdt\right)^{1/2},$$

t.y.,

$$||\mathbf{v}_t^{(k,N)}||_{L^2(0,2\pi;L^2(\Omega_k))}\leqslant C_1(||\Delta\mathbf{A}||_{L^2(\Omega_k)}+||\mathbf{f}^{(N)}||_{L^2(0,2\pi;L^2(\Omega_k))}),\tag{1.71}$$

čia $C_1=\max(\nu\sqrt{2\pi},1)$.

Pasinaudoję (1.46) įverčiu gautą (1.71) įvertį galime perrašyti taip:

$$\begin{aligned}&||\mathbf{v}_t^{(k,N)}||_{L^2(0,2\pi;L^2(\Omega_k))}\leqslant C_1(||\Delta\mathbf{A}||_{L^2(\Omega_k)}+||\mathbf{f}^{(N)}||_{L^2(0,2\pi;L^2(\Omega_k))})\\&\leqslant C\left(\left(||\boldsymbol{\varphi}||^2_{W^{1/2,2}(\partial\Omega)}\left(1+\int\limits_1^{R_k}\frac{1}{g^3(x_2)}dx_2\right)\right)^{1/2}+||\mathbf{f}^{(N)}||_{L^2(0,2\pi;L^2_1(\Omega_k))}\right).\end{aligned}\tag{1.72}$$

Iš (1.67) ir (1.72) nelygybių išplaukia, kad egzistuoja sekos $\{\mathbf{v}^{(k,N)}\}$ ir $\{\mathbf{v}_t^{(k,N)}\}$, kurios yra aprėžtos atitinkamai erdvėse $L^2(0,2\pi;W^{1,2}(\Omega_k))$ ir $L^2(0,2\pi;L^2(\Omega_k))$. Vadinasi, egzistuoja atitinkami į $\{\mathbf{v}^{(k)}\}$ ir $\{\mathbf{v}_t^{(k)}\}$ silpnai konverguojantys posekiai $\{\mathbf{v}^{(k,N_m)}\}$ ir $\{\mathbf{v}_t^{(k,N_m)}\}$, erdvėse $L^2(0,2\pi;W^{1,2}(\Omega_k))$ ir $L^2(0,2\pi;L^2(\Omega_k))$, be to, erdvėje $L^2(0,2\pi,L^2_1(\Omega_k))$ egzistuoja seka $\{\mathbf{f}^{(N)}\}$, kurios posekis $\{\mathbf{f}^{(N_m)}\}$ stipriai konverguoja į $\{\mathbf{f}\}$ erdvėje $L^2(0,2\pi,L^2_1(\Omega_k))$. Taigi, apytiksliam sprendiniui yra teisinga lygybė:

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Omega_k}\mathbf{v}_t^{(k,N_m)}\cdot\boldsymbol{\eta}dxdt+\nu\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Omega_k}\nabla\mathbf{v}^{(k,N_m)}:\nabla\boldsymbol{\eta}dxdt=-\nu\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Omega_k}\nabla\mathbf{A}:\nabla\boldsymbol{\eta}dxdt+\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Omega_k}\mathbf{f}^{(N_m)}\cdot\boldsymbol{\eta}dxdt,$$

kai $\boldsymbol{\eta}\in L^2(0,2\pi;W^{1,2}(\Omega_k))$. Perėję prie ribos, kai $N_m\to+\infty$, gauname

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Omega_k}\mathbf{v}_t^{(k)}\cdot\boldsymbol{\eta}dxdt+\nu\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Omega_k}\nabla\mathbf{v}^{(k)}:\nabla\boldsymbol{\eta}dxdt=-\nu\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Omega_k}\nabla\mathbf{A}:\nabla\boldsymbol{\eta}dxdt+\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Omega_k}\mathbf{f}\cdot\boldsymbol{\eta}dxdt.$$

Taigi, (1.49) uždavinio silpnojo sprendinio egzistavimas yra įrodytas.

Dabar įrodysime šio sprendinio vienatį. Tarkime, kad egzistuoja du (1.49) uždavinio silpnieji sprendiniai $\mathbf{w_1}$ ir $\mathbf{w_2}$. Tuomet jie tenkina šias integralines tapatybes:

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Omega_k}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{w}_1\cdot\boldsymbol{\eta}dxdt+\nu\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Omega_k}\nabla\mathbf{w}_1:\nabla\boldsymbol{\eta}dxdt=-\nu\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Omega_k}\nabla\mathbf{A}:\nabla\boldsymbol{\eta}dxdt+\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Omega_k}\mathbf{f}\cdot\boldsymbol{\eta}dxdt,$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Omega_k}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{w}_2\cdot\boldsymbol{\eta}dxdt+\nu\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Omega_k}\nabla\mathbf{w}_2:\nabla\boldsymbol{\eta}dxdt=-\nu\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Omega_k}\nabla\mathbf{A}:\nabla\boldsymbol{\eta}dxdt+\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Omega_k}\mathbf{f}\cdot\boldsymbol{\eta}dxdt.$$

Atėmę šias lygybes vieną iš kitos, gauname

$$\int_0^{2\pi}\int_{\Omega_k}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2)\cdot\boldsymbol{\eta}dxdt+\nu\int_0^{2\pi}\int_{\Omega_k}\nabla(\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2):\nabla\boldsymbol{\eta}dxdt=0.$$

Imkime $\boldsymbol{\eta}=\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2$:

$$\int_0^{2\pi}\int_{\Omega_k}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2)\cdot(\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2)dxdt+\nu\int_0^{2\pi}\int_{\Omega_k}\nabla(\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2):\nabla(\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2)dxdt=0.$$

Iš čia, pasinaudoję sąryšiu $\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2)\cdot(\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(|\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2|^2)$, turime

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_k}|\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2|^2dx+\nu\int_0^{2\pi}\int_{\Omega_k}|\nabla(\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2)|^2dxdt=0.$$

Kadangi abu nariai yra teigiami, tai

$$\nu\int_0^{2\pi}\int_{\Omega_k}|\nabla(\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2)|^2dxdt=0.$$

Tuomet $\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2=const=0$, nes $\mathbf{w}_1|_{\partial\Omega_k}=0$ ir $\mathbf{w}_2|_{\partial\Omega_k}=0$. Vienatis įrodyta.

1.4.2 pastaba. *Apytiksliam sprendiniui* $\mathbf{v}^{(k,N)}$ *gauti įverčiai, lieka galioti ir tiksliam sprediniui* $\mathbf{v}^{(k)}$.

Dabar norime pereiti nuo aprėžtos srities Ω_k prie visos srities Ω. Iš gautų įverčių (1.69) ir (1.72) turime

$$\begin{aligned}&||\mathbf{v}_t^{(k)}||_{L^2(0,2\pi;L^2(\Omega_k))}+||\nabla\mathbf{v}^{(k)}||_{L^2(0,2\pi;L^2(\Omega_k))}\\&\leqslant c\left(\left(||\boldsymbol{\varphi}||^2_{W^{1/2,2}(\partial\Omega)}\left(1+\int_1^{R_k}\frac{1}{g^3(x_2)}dx_2\right)\right)^{1/2}+||\mathbf{f}||_{L^2(0,2\pi;L^2_1(\Omega_k))}\right),\end{aligned}\tag{1.73}$$

čia konstanta c nepriklauso nuo srities.

Jeigu $\int_1^{+\infty}\frac{1}{g^3(x_2)}dx_2<+\infty$, tuomet (1.73) įverčio dešinė pusė yra baigtinis dydis, todėl egzistuoja konverguojantis posekis, kuris leidžia pereiti prie ribos, kai $k\to+\infty$ ir gauti silpnąjį sprendinį visoje srityje Ω.

Taigi, iš (1.73), (1.45) ir (1.46) išplaukia 1.2.2 teoremos (1.12) įvertis.

Periodinė pagal laiką Stokso sistema su nehomogenine kraštine sąlyga

Santrauka

Tarkime, turime neaprėžtą sritį $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ turinčią išėjimą į begalybę. Srities kraštas $\partial\Omega$ sudarytas iš vidinio krašto Γ_1, kuris yra aprėžtas, ir išorinio krašto Γ_0, kuris yra neaprėžtas. Šioje srityje nagrinėjame periodinę pagal laiką Stokso sistemą su nehomogenine kraštine sąlyga:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t(x,t) - \nu\Delta\mathbf{u}(x,t) + \nabla p(x,t) = \mathbf{f}(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,2\pi), \\ \mathrm{div}\mathbf{u}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,2\pi), \\ \mathbf{u}(x,t) = \boldsymbol{\varphi}(x), \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,2\pi), \\ \mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}(x,2\pi), \quad x \in \Omega. \end{cases} \tag{1.74}$$

Šio darbo tikslas yra įrodyti silpnojo (1.74) sistemos sprendinio egzistavimą ir vienatį neaprėžtoje srityje Ω. Sprendžiant šį uždavinį susiduriame su dviem pagrindinėmis problemomis: nehomogenine kraštine sąlyga ir neaprėžta sritimi. Pirmoji problema sprendžiama sukonstruojant kraštinių duomenų $\boldsymbol{\varphi}$ pratęsimą $\mathbf{A}$, kurio pagalba nehomogeninį uždavinį suvedame į jį atitinkantį homogeninį uždavinį. Pratęsimas konstruojamas tokiu pavidalu:

$$\mathbf{A}(x) = \mathbf{B}^{(inn)}(x) + \mathbf{B}^{(out)}(x),$$

čia $\mathbf{B}^{(inn)}$ kraštinių duomenų $\boldsymbol{\varphi}$ pratęsimas nuo vidinio krašto Γ_1, o $\mathbf{B}^{(out)}$ kraštinių duomenų $\boldsymbol{\varphi}$ pratęsimas nuo išorinio krašto $\Gamma_0 \cap B_{R_0(0)}$, $B_{R_0(0)} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < R_0, R_0 > 0\}$. Neaprėžtos srities problema sprendžiama keliais etapais. Visų pirma, specialiu būdu pasirenkame aprėžtų sričių šeimą Ω_k, kuri padengia visą sritį Ω, kai $k \to +\infty$. Tuomet įrodome apytikslio silpnojo sprendinio egzistavimą ir vienatį kiekvienoje srityje Ω_k. Po to, įrodome, jog apytikslis silpnasis sprendinys konverguoja į tikslų silpnąjį sprendinį srityje Ω_k. Galiausiai, perėję prie ribos, kai $k \to +\infty$, gauname silpnojo sprendinio egzistavimą ir vienatį neaprėžtoje srityje Ω.

Time periodic Stokes system with nonhomogeneous boundary condition

Summary

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ is an unbounded domain which has an outlet to infinity. The boundary $\partial\Omega$ consists of the inner boundary Γ_1 and the outer boundary Γ_0. Notice that the inner boundary Γ_1 is bounded while the outer boundary Γ_0 is unbounded.

We consider the time periodic Stokes system with nonhomogeneous boundary condition:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t(x,t) - \nu\Delta\mathbf{u}(x,t) + \nabla p(x,t) = \mathbf{f}(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,2\pi), \\ \mathrm{div}\mathbf{u}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,2\pi), \\ \mathbf{u}(x,t) = \boldsymbol{\varphi}(x), \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,2\pi), \\ \mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}(x,2\pi), \quad x \in \Omega. \end{cases} \tag{1.75}$$

The main purpose of this work is to prove the existence of the unique weak solution in an unbounded domain Ω. The problem we consider has two issues: nonhomogeneous boundary condition and unbounded domain. The fundamental tool how to deal with nonhomogeneous condition is to construct a suitable extension $\mathbf{A}$ of the boundary value $\boldsymbol{\varphi}$. This extension $\mathbf{A}$ has the following form:

$$\mathbf{A}(x) = \mathbf{B}^{(inn)}(x) + \mathbf{B}^{(out)}(x),$$

where $\mathbf{B}^{(inn)}$ extends the boundary value $\boldsymbol{\varphi}$ from the inner boundary Γ_1 and $\mathbf{B}^{(out)}$ extends the boundary value $\boldsymbol{\varphi}$ from the outer boundary $\Gamma_0 \cap B_{R_0(0)}$, where $B_{R_0(0)} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < R_0, R_0 > 0\}$. Then we can reduce the nonhomogeneous condition to homogeneous one.

The idea how work in an unbounded domain Ω is the following: firstly we choose in a special way a family of the bounded domains Ω_k which exhausts all the Ω as $k \to +\infty$. We prove the existence of a unique approximate solution in every Ω_k. Then we prove that an approximate solution converges to a solution in Ω_k. Finally we pass to a limit as $k \to +\infty$ and get the existence of a unique weak solution in an unbounded domain Ω.

A Priedas

Puankarė - Fridrichso nelygybės pertvarkymas

Tam, kad Puankarė - Fridrichso nelygybėje konstanta nepriklausytų nuo srities atliksime tokį pertvarkymą: pirmiausia klasikinę Puankarė - Fridrichso nelygybę panaudosime skerspjūvyje $\sigma(R_k)$:

$$\int\limits_{\sigma(R_k)} |\mathbf{u}|^2 dx_1 \leqslant cg^2(x_2) \int\limits_{\sigma(R_k)} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx_1, \tag{A.1}$$

čia c nepriklauso nuo srities. (A.1) nelygybę padaliname iš $g^2(x_2)$, ir kadangi, $\sigma(R_k) = (g(R_k), g(R_k))$, tai

$$\int\limits_{-g(R_k)}^{g(R_k)} \frac{|\mathbf{u}|^2}{g^2(x_2)} dx_1 \leqslant c \int\limits_{-g(R_k)}^{g(R_k)} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx_1. \tag{A.2}$$

Suintegravę (A.2) pagal kintamąjį x_2 nuo 1 iki R_k, turime

$$\int\limits_1^{R_k} \int\limits_{-g(R_k)}^{g(R_k)} \frac{|\mathbf{u}|^2}{g^2(x_2)} dx_1 dx_2 \leqslant c \int\limits_1^{R_k} \int\limits_{-g(R_k)}^{g(R_k)} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx_1 dx_2,$$

t.y.,

$$\int\limits_{\Omega_k} \frac{|\mathbf{u}|^2}{g^2(x_2)} dx \leqslant c \int\limits_{\Omega_k} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx, \tag{A.3}$$

čia konstanta c nepriklauso nuo srities.

Literatūra

[1] A. Ambrazevičius, A. Domarkas: *Matematinės fizikos lygtys,* 2 dalis. Aldorija, Vilnius, 1999.

[2] V. Yudovich, Periodic motions of a viscous incompressible fluid, *Sov. Math., Dokl.,* 1: 168 - 172, 1960.

[3] K. Kaulakytė and K. Pileckas, On the nonhomogeneous boundary value problem for the Navier - Stokes system in a class of unbounded domains, *J. Math. Fluid Mech.* **14** (2012), 693 - 716.

[4] O. A. Ladyzhenskaya and V. A. Solonikov, Some problems of vector analysis and generalized formulations of boundary value problems for the Navier - Stokes equations, *Zapiski Nauchn. Sem. LOMI* **59**(1976), 81 - 116. English Transl.: *J. Sov. Math.* **10**(No.2) (1978), 257 - 285.

[5] O. A. Ladyzhenskaya, *The Mathematical theory of viscous incompressible fluid,* Gordon and Breach, 1969.

[6] K. Pileckas, *Navjė - Stokso lygčių matematinė teorija.* MII, Vilnius, 2007.

[7] G. Prodi, *Qualche risultato riguardo alle equazioni di Navier - Stokes nel caso bidimensionale,* Rend. Sem. Math. Univ. Padova, 30: 1-15, 1960.

[8] G. Prouse, *Soluzioni quasi-periodiche dell'equazione differenziale di Navier-Stokes in due dimensioni,* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 33: 186 - 212, 1963.

[9] J. Serrin, *A note on the existence of periodic solutions of the Navier - Stokes equations,* Arch. Rational. Mech. Anal., 3: 120 - 212, 1963.

[10] E.M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions.* Princeton University Press, Princeton, 1970.