VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
TIKIMYBIŲ TEORIJOS IR SKAIČIŲ TEORIJOS KATEDRA

Iveta Juozapavičiūtė

DAUGIAMATĖ RIBINĖ TEOREMA PARABOLINIŲ FORMŲ DZETA FUNKCIJOMS

Magistro baigiamasis darbas

Leidžiu ginti ....

Darbo vadovas prof., habil., dr. Antanas Laurinčikas

Vilnius 2017

Turinys

1. Įvadas

Analizinėje skaičių teorijoje, o ir matematikoje apskritai, svarbų vaidmenį vaidina vadinamosios dzeta funkcijos, kurios yra kompleksinio kintamojo $s = \sigma + it$ funkcijos, kurioje nors pusplokštumėje $\sigma > \sigma_0$ apibrėžiamos Dirichlė eilutėmis

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s},$$

kurių koeficientai a_m turi vieną ar kitą aritmetinę prasmę. Svarbiausia iš tokių funkcijų yra Rymano dzeta funkcija $\zeta(s)$, pusplokštumėje $\sigma > 1$ apibrėžiama labai paprasta Dirichlė eilute

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}.$$

Be to, šią funkciją pusplokštumėje $\sigma > 1$ galima apibrėžti begaline sandauga pagal pirminius skaičius p, t.y.,

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - \frac{1}{p^s})^{-1}. \tag{1.1}$$

Be to, funkciją $\zeta(s)$ galima analiziškai pratęsti į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus paprastąjį polių taške $s = 1$ su reziduumu 1. Formulė (1.1) rodo funkcijos $\zeta(s)$ sąryšį su pirminiais skaičiais, ir tikrai jos pagalba buvo išspręsta pirminių skaičių pasiskirstymo dėsnio problema. Kalbant tiksliau, XIX a. pabaigoje buvo įrodyta [4], [12], kad

$$\pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1 = \int_2^x \frac{du}{\ln u}(1 + o(1)), \qquad x \longrightarrow \infty.$$

Čia $\ln u$ yra natūralusis logaritmas, o $o(1) \longrightarrow 0$, kai $x \longrightarrow \infty$.

Yra daugybė kitų dzeta funkcijų (dažnai jos vadinamos L funkcijomis), kurios yra naudojamos įvairių uždavinių sprendimui. Pavyzdžiui, Dirichlė L funkcijų pagalba yra sprendžiama pirminių skaičių pasiskirstymo problema aritmetinėse progresijose.

Taikant dzeta funkcijas, svarbu žinoti jų pačių reikšmių pasiskirstymą, kuris, reikia pastebėti, yra gana sudėtingas. Pavyzdžiui, nagrinėjant pirminių skaičių pasiskirstymą svarbu žinoti sritį kompleksinėje plokštumoje, kurioje $\zeta(s) \neq 0$. Analogiška problema susijusi ir su Dirichlė L funkcijomis. Dzeta funkcijų reikšmių pasiskirstymo sudėtingumas reikalauja taikyti netradicinius metodus. Vienas iš tokių metodų yra tikimybinis, jį XX a. pradžioje pasiūlė danų matematikas H. Boras (Bohr). Šio metodo esmė yra gana paprasta: imama kurios nors aibių klasės kompleksinėje plokštumoje aibės ir nagrinėjama kaip dažnai, tarkime, funkcijos $\zeta(s)$ reikšmės patenka į tas aibes. Pasirodo, jog tokius dažnius valdo griežti dėsniai, aprašomi tikimybiniais terminais (tikimybių teorijos), o gauti rezultatai vadinami ribinėmis teoremomis. Rymano dzeta funkcijos atveju tokias teoremas galima rasti [7], [9] monografijose.

Magistro darbe nagrinėsime dzeta funkcijas, susijusias su parabolinėmis formomis, kurių apibrėžimą pateiksime 2 skyrelyje. Taigi, tegul F yra svorio κ parabolinė forma, turinti Furjė skleidinį

$$F(z) = \sum_{m=1}^{\infty} c(m)e^{2\pi imz}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Tuomet formos F dzeta funkcija $\zeta(s, F)$ pusplokštumėje $\sigma > \frac{\kappa+1}{2}$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s, F) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c(m)}{m^s}.$$

Yra žinoma, kad ši eilutė konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > \frac{\kappa+1}{2}$ ir apibrėžia šioje pusplokštumėje analizinę funkciją. Be to, funkcija $\zeta(s, F)$ yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, kitaip tariant, ji yra sveikoji funkcija.

Magistro darbe yra įrodoma daugiamatė ribinė teorema parabolinių formų dzeta funkcijoms. Tegul $F_1, ..., F_r$ yra atitinkamai svorio $\kappa_1, ..., \kappa_r$ parabolinės formos, o $\zeta(s, F_1), ..., \zeta(s, F_r)$ yra atitinkamos dzeta funkcijos. Tegul G yra sritis kompleksinėje plokštumoje, o $H(G)$ yra funkcijų, analizinių srityje G, erdvė su tolygaus konvergavimo kompaktinėse aibėse topologija. Tai reiškia, kad seka $g_n(s) \in H(G)$ konverguoja į funkciją $g(s) \in H(G)$ tada ir tik tada, kai

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sup_{s\in K} |g_n(s) - g(s)| = 0$$

su kiekviena srities G kompaktine aibe K.

Tegul $D_j = \{s \in \mathbb{C} : \sigma > \frac{\kappa_j}{2}\}, j = 1, ..., r, \underline{D} = (D_1, ..., D_r)$ ir

$$H^r(\underline{D}) = H(D_1) \times ... \times H(D_r).$$

Simboliu $\mathcal{B}(X)$ žymime erdvės X Borelio σ kūną, t.y., minimalų σ kūną, kuriam priklauso erdvės X atvirųjų aibių sistema. Tegul, trumpumo dėlei,

$$\underline{\zeta}(s_1, ..., s_r; F_1, ..., F_r) = (\zeta(s_1, F_1), ..., \zeta(s_r, F_r)).$$

Simboliu $measA$ žymime mačios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matą. Magistro darbe nagrinėjame dažnio

$$\frac{1}{T}meas\{\tau \in [0,T] : \zeta(s_1 + i\tau, ..., s_r + i\tau; F_1, ..., F_r) \in A\}, A \in \mathcal{B}(H^r(\underline{D})),$$

silpnąjį konvergavimą, kai $T \longrightarrow \infty$. Gautoje ribinėje teoremoje yra nurodomas ribinio mato išreikštinis pavidalas.

2. Parabolinių formų dzeta funkcijos

Apibrėžiame aibę

$$SL(2,\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{Z}, ad-bc=1 \right\}.$$

Ši aibė su matricų daugybos operacija yra grupė. Tikrai, dviejų matricų sandaugos determinantas yra lygus tų matricų sandaugai, todėl daugybos operacija neišveda iš aibės $SL(2,\mathbb{Z})$ ribų. Vienetinis elementas yra matrica $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Kadangi determinantas yra 1, tai kiekvienos matricos atvirkštinė matrica taip pat bus sudaryta iš sveikų elementų ir turės determinantą, lygų 1.

Ši grupė yra vadinama pilnąja moduline grupe.

Tegul funkcija $F(z)$ yra analizinė viršutinėje pusplokštumėje $Imz > 0$ ir su kuriuo nors lyginiu skaičiumi κ su visais grupės $SL(2,\mathbb{Z})$ elementais $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tenkina funkcinę lygtį

$$F\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{\kappa} F(z).$$

Iš šios lygties matome, kad $F(z+1) = F(z)$, t.y., funkcija F yra periodinė su periodu 1. Todėl ją galima skleisti Furjė eilute

$$F(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c(m) e^{2\pi i m z}.$$

Jeigu visi koeficientai $c(m) = 0$, kai $m < 0$, tai funkcija $F(z)$ yra vadinama svorio κ moduline forma. Jeigu $c(m) = 0$, kai $m \leqslant 0$, tai $F(z)$ yra vadinama svorio κ paraboline forma.

Tegul $a(m)$ yra bet kokie kompleksiniai skaičiai, o $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis. Tuomet eilutė

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a(m)}{m^s} \tag{2.1}$$

yra vadinama Dirichlė eilute (paprasta Dirichlė eilute). Yra žinoma, kad Dirichlė eilutės konvergavimo sritis yra pusplokštumė. Egzistuoja toks skaičius σ_0 (gali būti ir $-\infty$ ir $+\infty$), kad pusplokštumėje $\sigma > \sigma_0$ (2.1) eilutė konverguoja, o pusplokštumėje $\sigma < \sigma_0$ - diverguoja. Tiesėje $\sigma = \sigma_0$ Dirichlė eilutės konvergavimą reikia nagrinėti atskirai. Sakome, kad (2.1) eilutė konverguoja absoliučiai, jei konverguoja eilutė

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|a(m)|}{m^{\sigma}}.$$

Absoliutaus Dirichlė eilutės konvergavimo sritis taip pat yra pusplokštumėje. Egzistuoja toks skaičius $\overline{\sigma_0}$, kad (2.1) eilutė absoliučiai konverguoja pusplokštumėje $\sigma > \overline{\sigma}_0$. Skaičius σ_0 yra vadinamas Dirichlė eilutės konvergavimo abscise, o $\overline{\sigma}_0$ - absoliutaus konvergavimo abscise. Yra žinoma, kad Dirichlė eilutės suma konvergavimo pusplokštumėje yra analizinė funkcija.

Tegul $F(z)$ yra svorio κ parabolinė forma su Furjė koeficientais $c(m)$. Tuomet šios formos dzeta funkcija $\zeta(s, F)$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s, F) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c(m)}{m^s}. \tag{2.2}$$

Tegul $d(m)$ yra daliklių funkcija

$$d(m) = \sum_{d/m} 1.$$

Tuomet yra žinomas įvertis [3]

$$|c(m)| \leqslant m^{\frac{\kappa-1}{2}} d(m).$$

Kadangi $d(m) = O(m^{\varepsilon})$ su kiekvienu $\varepsilon > 0$ (užrašas $f(x) = O(g(x)), g(x) > 0, x \in X$, reiškia, kad egzistuoja tokia konstanta $c > 0$, su kuria yra teisinga nelygybė $|f(x)| \leqslant cg(x), x \in X$), tai iš čia gauname, kad (2.2) Dirichlė eilutė konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > \frac{\kappa+1}{2}$ ir apibrėžia šioje pusplokštumėje analizinę funkciją. Be to, yra žinoma [5], kad funkcija $\zeta(s, F)$ yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą ir tenkina funkcinę lygtį

$$(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\zeta(s, F) = (-1)^{\frac{\kappa}{2}}(2\pi)^{\kappa-s}\Gamma(\kappa - s)\zeta(\kappa - s, F),$$

čia $\Gamma(s)$ yra Oilerio gama funkcija, kuri pusplokštumėje $\sigma > 0$ yra apibrėžiama integralu

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{s-1} du$$

ir yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus paprastuosius polius taškuose $m = 0, -1, -2, ...$ su reziduumais

$$\frac{(-1)^m}{m!}.$$

Dar papildomai reikalaujame, kad funkcija $F(z)$ būtų visų Heckės operatorių $T(m)$,

$$F|T(m)|(z) = m^{\kappa-1} \sum_{\substack{0<d/m \\ ad=m}} d^{-\kappa} F\left(\frac{az+b}{d}\right), \qquad m \in \mathbb{N},$$

tikrinė funkcija. Šiuo atveju yra žinoma, kad dzeta funkcija $\zeta(s, F)$ pusplokštumėje $\sigma > \frac{\kappa+1}{2}$ gali būti užrašyta Oilerio sandauga pagal pirminius skaičius

$$\zeta(s, F) = \prod_p \left(1 - \frac{\alpha(p)}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\beta(p)}{p^s}\right)^{-1},$$

čia kompleksiniai skaičiai $\alpha(p)$ ir $\beta(p)$ yra susieti lygybe

$$c(p) = \alpha(p) + \beta(p).$$

Be to, galioja nelygybės [3]

$$|\alpha(p)| \leqslant p^{\frac{\kappa-1}{2}}, \qquad |\beta(p)| \leqslant p^{\frac{\kappa-1}{2}}.$$

3. Tikimybinių matų silpnasis konvergavimas

Šiame skyrelyje priminsime kai kurias sąvokas ir tvirtinimus apie tikimybinius matus.

Tegul Ω yra bet kuri netuščia aibė. Jos poaibių sistema $\mathcal{A}$ yra vadinama σ kūnu (σ algebra), jei galioja aksiomos:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$;
2. Jei $A \in \mathcal{A}$, tai ir jos papildinys $A^c = \Omega \backslash - A \in \mathcal{A}$;
3. Jei $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$, tai ir $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{A}$.

Pora $(\Omega, \mathcal{A})$ yra vadinama mačia erdve. Joje yra apibrėžiamas tikimybinis matas. Aibės funkcija $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ yra vadinama tikimybiniu matu, jei galioja aksiomos:

1. $P(A) \geqslant 0$ su visomis aibėmis $A \in \mathcal{A}$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. Jei aibės $A_1, A_2, ...$ kas dvi neturi bendrų elementų, tai
$$P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right) = \sum_{m=1}^{\infty} P(A_m).$$

Trejetas $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ yra vadinamas tikimybine erdve.

Tegul $\mathcal{B}$ yra erdvės $\mathbb{R}$ Borelio σ kūnas, t.y. mažiausias σ kūnas, kuriam priklauso visų intervalų sistema. Funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ yra vadinama atsitiktiniu dydžiu, apibrėžtu tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, jeigu su kiekviena Borelio aibe $A \in \mathcal{B}$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{A}.$$

Mums bus reikalingi tikimybiniai matai, apibrėžti metrinėse arba net topologinėse erdvėse. Tegul $\mathbb{X}$ yra metrinė erdvė su metrika ρ. Simboliu $\mathcal{B}(\mathbb{X})$ žymėsime erdvės $\mathbb{X}$ Borelio σ kūną, t.y. minimalų σ kūną, kuriam priklauso erdvės $\mathbb{X}$ atvirųjų aibių sistema. $\mathbb{X}$ reikšmiu atsitiktiniu elementu, apibrėžtu tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, vadiname funkciją $X : \mathcal{A} \to \mathbb{X}$, jeigu su kiekviena aibe $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{A}.$$

Tikimybinis matas, apibrėžtas mačioje erdvėje $(\mathbb{X}, \mathcal{B}(\mathbb{X}))$ formule

$$P(A) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}), \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{X}),$$

yra vadinamas atsitiktinio elemento X pasiskirstymu.

Tegul $P_n, n \in \mathbb{N}$, ir P yra tikimybiniai matai erdvėje $(\mathbb{X}, \mathcal{B}(\mathbb{X}))$. Sakome, kad P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į P, jei su kiekviena realia, aprėžta, tolydžia funkcija f erdvėje $\mathbb{X}$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{X}} f dP_n = \int_{\mathbb{X}} f dP.$$

Yra žinomi įvairūs silpnojo tikimybinių matų konvergavimo ekvivalentai. Primename tokį ekvivalentą, formuluojamą tolydumo aibės terminais. Tegul ∂A yra aibės kraštas. Aibė A yra vadinama mato P tolydumo aibe, jei $P(\partial A) = 0$.

3.1 lema. *P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į P tada ir tik tada, kai su kiekviena mato P tolydumo aibe A*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(A) = P(A).$$

Lema yra 2.1 teoremos iš [1] dalis.

Tegul turime dar vieną metrinę erdvę $\mathbb{X}_1$ su jos Borelio σ kūnu $\mathcal{B}(\mathbb{X}_1)$. Funkcija $u : \mathbb{X} \to \mathbb{X}_1$ yra vadinama $(\mathcal{B}(\mathbb{X}), \mathcal{B}(\mathbb{X}_1))$ mačia, jei su kiekviena aibe $A_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{X}_1)$

$$u^{-1}A_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{X}).$$

Tarkime, turime $(\mathcal{B}(\mathbb{X}), \mathcal{B}(\mathbb{X}_1))$ mačią funkciją $u : \mathbb{X} \to \mathbb{X}_1$, o P yra tikimybinis matas erdvėje $(\mathbb{X}, \mathcal{B}(\mathbb{X}))$. Tuomet šis matas indukuoja erdvėje $(\mathbb{X}_1, \mathcal{B}(\mathbb{X}_1))$ vienintelį tikimybinį matą Pu^{-1},

$$Pu^{-1}(A_1) = P(u^{-1}A_1), \qquad A_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{X}_1).$$

Čia $u^{-1}A_1$ yra aibės A_1 pirmavaizdis. Yra žinoma [1], kad kiekviena tolydi funkcija $u : \mathbb{X} \to \mathbb{X}_1$ yra $(\mathcal{B}(\mathbb{X}), \mathcal{B}(\mathbb{X}_1))$ mati. Yra naudingas toks tvirtinimas.

3.2 lema. *Tarkime, kad P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į P, o funkcija $u : \mathbb{X} \to \mathbb{X}_1$ yra tolydi. Tuomet ir $P_n u^{-1}$, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į Pu^{-1}.*

Lemos įrodymas yra duotas [1] monografijoje.

Tegul X_n, $n \in \mathbb{N}$, ir X yra $\mathbb{X}$ reikšmiai atsitiktiniai elementai, apibrėžti tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Sakome, kad X_n, kai $n \to \infty$, konverguoja į X pagal pasiskirstymą, jei elemento X_n pasiskirstymas, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į elemento X pasiskirstymą. Šį faktą užrašome $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} X$.

3.3 lema. *Tarkime, kad $\mathbb{X}$ reikšmiai atsitiktiniai elementai $Y_n, X_{1n}, X_{2n}, \ldots$ turi tą pačią apibrėžimo sritį, o erdvė $\mathbb{X}$ yra separabili. Tegul su kiekvienu k*

$$X_{kn} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} X_k$$

ir

$$X_k \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{D}} X.$$

Jei, be to, su kiekvienu $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P\{\rho(X_{kn}, Y_n) \geqslant \varepsilon\} = 0,$$

tai tuomet $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} X$.

Lema yra 4.2 teorema iš [1].

Tegul $\{P\}$ yra tikimybinių matų šeima erdvėje $(\mathbb{X}, \mathcal{B}(\mathbb{X}))$. Sakome, kad ši šeima yra reliatyviai kompaktinė, jei iš kiekvienos sekos $\{P_n\} \subset \{P\}$ galima išskirti silpnai konverguojantį kurį nors tikimybinį mato posekį. Ši šeima yra vadinama suspausta, jei su kiekvienu $\varepsilon > 0$ egzistuoja tokia kompaktinė aibė $K = K(\varepsilon) \subset \mathbb{X}$, kad su visais šeimos $\{P\}$ matais P yra teisinga nelygybė

$$P(K) > 1 - \varepsilon.$$

Yra teisingi tokie tvirtinimai.

3.4 lema. *Tarkime, kad tikimybinių matų šeima $\{P\}$ yra suspausta. Tuomet ji yra reliatyviai kompaktinė.*

3.5 lema. *Tarkime, kad $\mathbb{X}$ yra pilna separabili metrinė erdvė, o šeima $\{P\}$ yra reliatyviai kompaktinė. Tuomet šeima $\{P\}$ yra suspausta.*

3.4 ir 3.5 lemos yra vadinamos Prochorovo teoremomis. Jų įrodymai yra duoti [1] monografijoje.

4. Ribinės teoremos formulavimas

Pradedame viena topologine struktūra, kuri yra tradiciškai naudojama įrodinėjant ribines teoremas dzeta funkcijoms su Oilerio sandauga pagal pirminius skaičius.

Tegul $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s|= 1\}$, t.y., γ yra vienetinis apskritimas kompleksinėje plokštumoje su centru taške 0 ir spinduliu 1. Apibrėžiame aibę

$$\Omega = \prod_p \gamma_p,$$

čia $\gamma_p = p$ su visais pirminiais p. Pagal Dekarto sandaugos apibrėžimą turime, kad aibę Ω sudaro visos funkcijos ω, pirminių skaičių aibę $\mathbb{P}$ atvaizduojančios vienetiniame apskritime γ. Taigi,

$$\omega = (\omega(p) : |\omega(p)|= 1, \qquad p \in \mathbb{P}).$$

Aibėje Ω galima apibrėžti sandaugos topologiją [11] ir pataškinės daugybos operaciją. Tuomet toras Ω tampa kompaktine topologine Abelio grupe, nes γ yra kompaktinė aibė, o pagal Tichonovo teoremą [11] kompaktinių erdvių Dekarto sandauga su sandaugos topologija yra vėl kompaktinė erdvė. Yra žinoma [7], kad kompaktinėje erdvėje galima apibrėžti tikimybinį Haro matą, taigi, erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ egzistuoja tikimybinis Haro matas m_H. Gauname tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$.

Tegul $\zeta(s_j, F_j)$ yra Heckės parabolinės formos F_j svorio κ_j dzeta funkcija, t.y.,

$$\zeta(s_j, F_j) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_j(m)}{m^{s_j}}, \qquad \sigma_j > \frac{\kappa_j + 1}{2},$$

su Oilerio sandauga

$$\zeta(s_j, F_j) = \prod_p \left(1 - \frac{\alpha_j(p)}{p^{s_j}}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\beta_j(p)}{p^{s_j}}\right)^{-1}, \qquad \sigma_j > \frac{\kappa_j + 1}{2}, j = 1, ..., r.$$

Tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ apibrėžiame $H^r(\underline{D})$ reikšmį atsitiktinį elementą

$$\underline{\zeta}(s_1, ...s_r, \omega; F_1, ..., F_r) = (\zeta(s_1, \omega, F_1), ..., \zeta(s_r, \omega, F_r)),$$

čia

$$\zeta(s_j, \omega, F_j) = \prod_p \left(1 - \frac{\alpha_j(p)\omega(p)}{p^{s_j}}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\beta_j(p)\omega(p)}{p^{s_j}}\right)^{-1}, \qquad j = 1, ..., r.$$

Yra žinoma [6], [10], kad $\zeta(s_j, \omega, F_j)$ yra $H(D_j)$ reikšmis, $D_j = \{s \in \mathbb{C}; \sigma > \frac{\kappa_j}{2}\}$, atsitiktinis elementas, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H), j = 1, ..., r$. Yra įrodoma, kad begalinė sandauga

$$\prod_p \left(1 - \frac{\alpha_j(p)\omega(p)}{p^{s_j}}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\beta_j(p)\omega(p)}{p^{s_j}}\right)^{-1}$$

su beveik visais ω mato m_H atžvilgiu konverguoja tolygiai pusplokštumės D_j kompaktinėse aibėse, todėl ji apibrėžia $H(D_j)$ reikšmį atsitiktinį elementą. Taigi, $\underline{\zeta}(s_1, ..., s_r, \omega; F_1, ..., F_j)$ yra $H^r(\underline{D})$ reikšmis, $\underline{D} = (D_1, ..., D_r)$, atsitiktinis elementas, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$.

Tegul $P_{\underline{\zeta}}$ yra atsitiktinio elemento $\underline{\zeta}(s_1, ..., s_r, \omega; F_1, ..., F_r)$ pasiskirstymas, t.y., $P_{\underline{\zeta}}$ yra tikimybinis matas erdvėje $(H^r(\underline{D}), \mathcal{B}(H^r(\underline{D}))$, apibrėžiamas lygybe

$$P_{\underline{\zeta}}(A) = m_H\{\omega \in \Omega : \underline{\zeta}(s_1, ..., s_r, \omega; F_1, ..., F_r) \in A\}, \qquad A \in \mathcal{B}(H^2(\underline{D})).$$

Tuomet magistro darbo pagrindinė ribinė teorema turi tokį pavidalą.

4.1 teorema. *Dažnis*

$$P_T(A) = \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0, T] : \underline{\zeta}(s_1 + i\tau, ..., s_r + i\tau; F_1, ...F_r) \in A\}, \qquad A \in \mathcal{B}(H^r(\underline{D})),$$

kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą $P_{\underline{\zeta}}$.

Teoremos įrodymas gana ilgas, todėl jį padalysime į keletą lemų.

5. Lemos

Pirmiausia formuluojame lemą apie silpnąjį konvergavimą į Haro matą erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$. Tegul

$$Q_T(A) = \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0, T] : (p^{-i\tau} : p \in \mathbb{P}) \in A\}, \qquad A \in \mathcal{B}(\Omega).$$

5.1 lema. *Q_T, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į Haro matą m_H.*

Lema yra įrodyta [8] straipsnyje. Įrodymui yra naudojamas Furjė transformacijų metodas. Yra įrodoma, kad mato Q_T Furjė transformacija, kai $T \to \infty$, konverguoja į Haro mato m_H Furjė transformaciją. Iš to išplaukia lemos tvirtinimas. Įrodyme remiamasi aibės

$$\{\ln p : p \in \mathbb{P}\}$$

tiesišku nepriklausomumu virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$.

Dabar įrodysime ribinę teoremą erdvėje $H^r(\underline{D})$ absoliučiai konverguojančioms Dirichlė eilutėms, susijusioms su parabolinėmis funkcijomis $F_1, ..., F_r$.

Tegul $\sigma_0 > \frac{1}{2}$ yra fiksuotas skaičius, $m, n \in \mathbb{N}$ ir

$$v_n(m) = exp\left\{-\left(\frac{m}{n}\right)^{\sigma_0}\right\}.$$

Su visais $j = 1, ..., r$ apibrėžiame Dirichlė eilutes

$$\zeta_n(s_j; F_j) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_j(m) v_n(m)}{m^{s_j}}.$$

Tuomet yra žinoma [6], kad pastarosios eilutės konverguoja absoliučiai pusplokštumėse $\sigma_j > \frac{\kappa_j}{2}$, t.y., šiose pusplokštumėse konverguoja eilutės

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|c_j(m)| v_n(m)}{m^{\sigma_j}}. \tag{5.1}$$

Funkcijas $\omega(p), p \in \mathbb{P}$ pratęsime į aibę $\mathbb{N}$ formulės

$$\omega(m) = \prod_{\substack{p^l | m \\ p^{l+1} \nmid m}} \omega^l(p), \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{5.1}$$

pagalba. Kadangi $|\omega(m)| = 1$, tai iš (5.1) eilučių konvergavimo turime, kad eilutės

$$\zeta_n(s_j, \omega; F_j) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_j(m) \omega(m) v_n(m)}{m^{s_j}}$$

taip pat konverguoja absoliučiai atitinkamai pusplokštumėse $\sigma_j > \frac{\kappa_j}{2}$.

Dabar nagrinėsime funkcijų rinkinius

$$\underline{\zeta_n}(s_1, ..., s_r; F_1, ..., F_r) = (\zeta_n(s_1; F_1), ..., \zeta_n(s_r; F_r))$$

ir

$$\underline{\zeta_n}(s_1, ..., s_r, \omega; F_1, ..., F_r) = (\zeta_n(s_1, \omega; F_1), ..., \zeta_n(s_r, \omega; F_r)).$$

Aibėms $A \in \mathcal{B}(H^r(\underline{D}))$ apibrėžiame

$$P_{T,n}(A) = \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0, T] : \underline{\zeta_n}(s_1 + i\tau, ..., s_r + i\tau; F_1, ..., F_r) \in A\}$$

ir su fiksuotu $\hat{\omega} \in \Omega$

$$\hat{P}_{T,n}(A) = \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0, T] : \underline{\zeta_n}(s_1 + i\tau, ..., s_r + i\tau, \hat{\omega}; F_1, ..., F_r) \in A\}.$$

Apibrėžkime funkciją $u_n : \Omega \to H^r(D)$ formule

$$u_n(\omega) = \underline{\zeta_n}(s_1, ..., s_r, \omega; F_1, ..., F_r), \qquad \omega \in \Omega.$$

Kadangi eilutės, apibrėžiančios funkcijas $\zeta_n(s_j, \omega; F_j)$, absoliučiai konverguoja pusplokštumėse $\sigma_j > \frac{\kappa_j}{2}$, funkcija u_n yra tolydi, todėl ir $(\mathcal{B}(\Omega), \mathcal{B}(H^r(\underline{D})))$ mati. Todėl Haro matas m_H erdvėje $(H^r(\underline{D}), \mathcal{B}(H^r(\underline{D}))$ apibrėžia tikimybinį matą $m_H u_n^{-1}$:

$$m_H u_n^{-1}(A) = m_H(u_n^{-1}A), \qquad A \in \mathcal{B}(H^r(\underline{D})).$$

5.2 lema. *$P_{T,n}$ ir $\hat{P}_{T,n}$, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą $m_H u_n^{-1}$.*

Įrodymas. Iš funkcijos u_n apibrėžimo turime, kad

$$u_n\left(p^{-i\tau} : p \in \mathbb{P}\right) = \underline{\zeta_n}(s_1 + i\tau, ..., s_r + i\tau; F_1, ...F_r).$$

Todėl su kiekviena aibe $A \in \mathcal{B}(H^r(\underline{D}))$

$$\begin{aligned} P_{T,n}(A) &= \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0, T] : u_n(p^{-i\tau} : p \in \mathbb{P}) \in A\} \\ &= \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0, T] : (p^{-i\tau} : p \in \mathbb{P}) \in u_n^{-1}A\}, \end{aligned}$$

t.y., $P_{T,n} = Q_T u_n^{-1}$. Iš čia, funkcijos u_n tolydumo ir 3.2 ir 5.1 lemų gauname, kad $P_{T,n}$, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą $m_H u_n^{-1}$.

Panašiai yra įrodomas ir $\hat{P}_{T,n}$ silpnasis konvergavimas. Apibrėžiame $\hat{u}_n : \Omega \to H^r(\underline{D})$ formule

$$\hat{u}_n(\omega) = \underline{\zeta}_n(s_1, ..., s_r; \omega\hat{\omega}; F_1, ..., F_r).$$

Tada funkcija $\hat{u}_n$, kaip ir funkcija u_n, yra tolydi. Be to, $\hat{P}_{T,n} = Q_T \hat{u}_n^{-1}$. Todėl, kaip ir mato $P_{T,n}$ atveju, gauname, jog $\hat{P}_{T,n}$, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą $m_H \hat{u}_n^{-1}$. Lieka įrodyti, kad matai $m_H u_n^{-1}$ ir $m_H \hat{u}_n^{-1}$ sutampa.

Apibrėžiame dar vieną funkciją $u : \Omega \to \Omega, u(\omega) = \hat{\omega}\omega$. Tuomet iš u_n ir $\hat{u}_n$ apibrėžimų turime, kad

$$\hat{u}_n = u_n(u). \tag{5.2}$$

Dabar pasinaudosime viena Haro mato išskirtine savybe, kuri yra vadinama invariantiškumu: su kiekviena aibe $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ ir kiekvienu $\omega \in \Omega$ yra teisingos lygybės

$$m_H(A) = m_H(\omega A) = m_H(A\omega).$$

Mūsų atveju funkcija u reiškia daugybą iš fiksuoto elemento $\hat{\omega}$. Todėl iš mato m_H invariantiškumo turime, kad $m_H u^{-1} = m_H$. Iš čia ir (5.2) gauname, kad

$$m_H \hat{u}_n^{-1} = m_H (u_n u)^{-1} = (m_H u^{-1}) u_n^{-1} = m_H u_n^{-1}.$$

Taigi, $P_{T,n}$ ir $\hat{P}_{T,n}$, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į tą patį matą $m_H u_n^{-1}$. Lema įrodyta.

Kitas 4.1 teoremos įrodymo etapas yra perėjimas nuo funkcijos $\underline{\zeta}_n(s_1, ..., s_r; F_1, ..., F_r)$ prie $\underline{\zeta}(s_1, ..., s_r; F_1, ..., F_r)$. Šiam tikslui yra reikalinga metrika erdvėje $H^r(\underline{D})$, indukuojanti jos sandaugos topologiją. Tegul D yra kokia nors sritis kompleksinėje plokštumoje, o $H(D)$ yra analizinių funkcijų srityje D erdvė su tolygaus konvergavimo kompaktinėse aibėse topologija. Tuomet šią topologiją indukuoja tokia metrika. Yra žinoma [7], kad egzistuoja tokia kompaktinių aibių seka $\{K_l : l \in \mathbb{N}\} \subset D$, kad

$$D = \bigcup_{l=1}^{\infty} K_l,$$

$K_l \subset K_{l+1}$ su visais $l \in \mathbb{N}$ ir, jei $K \subset D$ yra kompaktinė aibė, tai tuomet $K \subset K_l$ su kuriuo nors $l \in \mathbb{N}$. Tegul $g_1, g_2 \in H(D)$. Tuomet [7]

$$\rho(g_1, g_2) = \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l} \frac{\sup_{s \in K_l} |g_1(s) - g_2(s)|}{1 + \sup_{s \in K_l} |g_1(s) - g_2(s)|}$$

yra ieškomoji erdvės $H(D)$ metrika.

Erdvėje $H^r(\underline{D})$ metrika apibrėžiama standartiniu būdu. Tegul ρ_j yra metrika erdvėje $H(D_j)$. Tegul $g_1 = (g_{11}, ..., g_{1r}), g_2 = (g_{21}, ..., g_{2r}) \subset H^r(\underline{D})$. Tuomet

$$\underline{\rho}(\underline{g}_1, \underline{g}_2) = \max_{1 \leqslant j \leqslant r} \rho_j(g_{1j}, g_{2j})$$

yra ieškomoji metrika erdvėje $H^r(\underline{D})$.

5.3 lema. *Teisinga lygybė*

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \underline{\rho}(\underline{\zeta}(s_1+i\tau,...,s_r+i\tau;F_1,...,F_r),$$
$$\underline{\zeta}_n(s_1+i\tau,...,s_r+i\tau;F_1,...,F_r))d\tau=0.$$

Su beveik visais $\omega\in\Omega$ yra teisinga lygybė

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \underline{\rho}(\underline{\zeta}(s_1+i\tau,...,s_r+i\tau,\omega;F_1,...,F_r),$$
$$\underline{\zeta}_n(s_1+i\tau,...,s_r+i\tau,\omega;F_1,...,F_r))d\tau=0.$$

Įrodymas. [6] darbe įrodyta, kad su kiekvienu $j=1,...,r$

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \rho(\zeta(s_j+i\tau,F_j),\zeta_n(s_j+i\tau,F_j))d\tau=0$$

ir su beveik visais $\omega\in\Omega$

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \rho(\zeta(s_j+i\tau,\omega,F_j),\zeta_n(s_j+i\tau,\omega,F_j))d\tau=0.$$

Iš čia ir metrikos $\underline{\rho}$ apibrėžimo gauname lemos tvirtinimą.

Apibrėžiame dar vieną matą

$$\hat{P}_T(A)=\frac{1}{T}meas\{\tau\in[0,T]:\underline{\zeta}(s_1+i\tau,...,s_r+i\tau,\omega;F_1,...,F_r)\in A\},\quad A\in\mathcal{B}(H^r(\underline{D})).$$

5.4 lema. *Erdvėje $(H^r(\underline{D}),\mathcal{B}(H^r(\underline{D})))$ egzistuoja toks tikimybinis matas P, į kurį, kai $T\to\infty$, silpnai konverguoja P_T ir $\hat{P}_T$.*

Įrodymas. Tarkime, kad ξ yra atsitiktinis dydis, apibrėžtas kurioje nors tikimybinėje erdvėje su matu μ ir tolygiai pasiskirstęs intervale [0,1], t.y. jo pasiskirstymo gija yra

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{kai } x\leqslant 0,\\ x, \text{kai } 0<x\leqslant 1,\\ 1, \text{kai } x>1.\end{cases}$$

Apibrėžkime $H^r(\underline{D})$ reikšmį atsitiktinį elementą $\underline{X}_{T,n}=\underline{X}_{T,n}(s_1,...,s_r)=\underline{\zeta}_n(s_1+i\xi T,...,s_r+i\xi T;F_1,...,F_r)$. Tegul $\widetilde{P}_n=m_H u_n^{-1}$ yra ribinis matas 5.2 lemoje, o $\widetilde{\underline{X}}_n=\underline{X}_n(s_1,...,s_r)$ yra $H^r(\underline{D})$ reikšmis atsitiktinis elementas, turintis pasiskirstymą $\widetilde{P}_n$. Tuomet turime, kad elemento $\underline{X}_{T,n}$ pasiskirstymas yra $\underline{P}_{T,n}$, todėl 5.2 lemos tvirtinimą galime užrašyti pavidalu

$$\underline{X}_{T,n}\xrightarrow[T\to\infty]{\mathcal{D}}\widetilde{\underline{X}}_n. \tag{5.3}$$

Darbe [6] buvo įrodyta vienmatė ribinė teorema parabolinių formų dzeta funkcijoms. Taigi, turime, kad su kiekvienu $j = 1, ..., r$

$$P_T^{(j)}(A) \stackrel{det}{=} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0, T] : \zeta(s_j + i\tau; F_j) \in A\}, \qquad A \in \mathcal{B}(H(D_j)),$$

kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į kurį nors matą. Įrodinėjant šią teoremą, buvo naudojamas 5.2 lemos vienmatis analogas, t.y., kad

$$P_{T,n}^{(j)}(A) = \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0, T] : \zeta_n(s_j + i\tau; F_j) \in A\}, \qquad A \in \mathcal{B}(H(D_j)),$$

kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į kurį nors matą $P_n^{(j)}$. Be to, matas $P_n^{(j)}$, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į kurį nors matą $P^{(j)}$. Šį faktą mes panaudosime įrodymui, kad tikimybinių matų šeima $\{\widetilde{P}_n : n \in \mathbb{N}\}$ yra suspausta.

Kadangi $P_n^{(j)}$, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja, tai šeima $\{P_n^{(j)} : n \in \mathbb{N}\}$ yra reliatyviai kompaktinė. Erdvė $H(D_j)$ yra pilna ir separabili. Todėl iš 3.5 lemos turime, kad šeima $\{P_n^{(j)} : n \in \mathbb{N}\}$ yra suspausta. Tai reiškia, kad kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka tokia kompaktinė aibė $K_j = K_j(\varepsilon) \subset H(D_j)$, kad su visais n

$$P_n^{(j)}(K_j) > 1 - \frac{\varepsilon}{r}.$$

Tegul $K = K_1 \times ... \times K_r$. Tuomet K yra erdvės $H^r(\underline{D})$ kompaktinė aibė. Be to, su visais $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&\widetilde{P}_n(H^r(\underline{D}) \backslash K) = \widetilde{P}_n\Big(\bigcup_{j=1}^{r} (H(D_1) \times ... \times H(D_{j-1}) \times (H(D_j) \backslash K_j) \times H(D_{j+1}) \times ... \\
&\times H(D_r))\Big) \leqslant \sum_{j=1}^{r} \widetilde{P}_n(H(D_1) \times ... \times H(D_{j-1}) \times (H(D_j) \backslash K_j) \times H(D_{j+1}) \times ... \\
&\times H(D_r)) = \sum_{j=1}^{r} P_n^{(j)}(H(D_j) \backslash K_j) < r\left(1 - 1 + \frac{\varepsilon}{r}\right) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ši nelygybė reiškia, kad matų šeima $\{\widetilde{P}_n : n \in \mathbb{N}\}$ yra suspausta. Todėl pagal 3.4 lemą ji yra reliatyviai kompaktinė, t.y., kiekviena seka turi savyje posekį, silpnai konverguojantį į kurį nors tikimybinį matą P erdvėje $(H^r(\underline{D}), \mathcal{B}(H^r(\underline{D}))$. Taigi, turime posekį $\{\widetilde{P}_{n_k}\}$, kad $\widetilde{P}_{n_k}$, kai $k \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P. Šį faktą galime užrašyti ir taip:

$$\underline{\widetilde{X}}_{n_k} \xrightarrow[k \to \infty]{\mathcal{D}} P. \tag{5.4}$$

Apibrėžiame dar vieną $H^r(\underline{D})$ reikšmį atsitiktinį elementą

$$\underline{X}_T = \underline{X}(s_1, ..., s_r) = \underline{\zeta}(s_1 + i\xi T, ..., s_r + i\xi T; F_1, ..., F_r).$$

Tuomet iš 5.3 lemos išplaukia, kad su kiekvienu $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\mu(\underline{\rho}(\underline{X}_T, \underline{X}_{T,n}) \geqslant \varepsilon) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\times\frac{1}{T}meas\{\tau\in[0,T] : \underline{\rho}(\underline{\zeta}(s_1+i\tau, ..., s_r+i\tau; F_1, ..., F_r),$$
$$\underline{\zeta}_n(s_1+i\tau, ..., s_r+i\tau; F_1, ..., F_r)) \geqslant \varepsilon\} \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{n\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\times\frac{1}{T\varepsilon}\int_0^T \underline{\rho}(\zeta(s_1+i\tau, ..., s_r+i\tau; F_1, ..., F_r),$$
$$\zeta_n(s_1+i\tau, ..., s_r+i\tau; F_1, ..., F_r))d\tau = 0.$$

Ši lygybė bei (5.3) ir (5.4) rodo, kad yra išpildytos 3.3 lemos sąlygos. Todėl gauname, kad

$$\underline{X}_T \xrightarrow[T\to\infty]{\mathcal{D}} P. \tag{5.5}$$

Šis sąryšis įrodo, kad matas P_T, kai $T\to\infty$, silpnai konverguoja į matą P. Be to, iš (5.5) išplaukia, kad matas P nepriklauso nuo sekos $\widetilde{P}_{n_k}$ parinkimo. Todėl (5.4) galime perrašyti pavidalu

$$\underline{\widetilde{X}}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} P. \tag{5.6}$$

Lieka įrodyti, kad ir $\hat{P}_T$, kai $T\to\infty$, taip pat silpnai konverguoja į matą P. Šiam tikslui apibrėžiame $H^r(\underline{D})$ reikšmius atsitiktinius elementus

$$\underline{\hat{X}}_{T,n} = \hat{X}_{T,n}(s_1, ..., s_r) = \underline{\zeta}_n(s_1+i\xi T, ..., s_r+i\xi T, \omega; F_1, ..., F_r)$$

ir

$$\underline{\hat{X}}_T = \underline{\hat{X}}_T(s_1, ..., s_r) = \zeta(s_1+i\xi T, ..., s_r+i\xi T, \omega; F_1, ..., F_r).$$

Pakartoję šiems atsitiktiniams elementams samprotavimus, naudotus atsitiktinių elementų $\underline{X}_{T,n}$ ir $\underline{X}_T$ atveju, iš 5.2 ir 5.3 lemų bei (5.6) gauname, kad ir matas P_T, kai $T\to\infty$, silpnai konverguoja į matą P. Lema įrodyta.

6. 4.1 teoremos įrodymas

Iš 5.4 lemos turime, kad 4.1 teoremos įrodymui pakanka parodyti, kad ribinis matas P 4.1 teoremoje sutampa su $P_{\underline{\zeta}}$. Kaip yra įprasta, šiam tikslui yra taikomi ergodinės teorijos elementai. Priminsime kai kurias sąvokas ir tvirtinimus.

Tegul

$$a_\tau = (p^{-i\tau} : p \in \mathbb{P}), \qquad \tau \in \mathbb{R}.$$

Tuomet su visais $\tau \in \mathbb{R}$ a_τ yra grupės Ω elementas. Apibrėžiame grupės Ω transformaciją

$$\varphi_\tau(\omega) = a_\tau \omega, \qquad \omega \in \Omega.$$

Tuomet $\varphi_\tau(\omega)$ yra mati, matą išlaikanti transformacija [7]. Gauname šių transformacijų grupę $\{\varphi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$, priklausančią nuo parametro τ. Aibė $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ yra vadinama invariantine grupės $\{\varphi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ atžvilgiu, jei aibės A ir $A_\tau = \varphi_\tau(A)$ skiriasi ne daugiau negu aibe, kurios Haro matas m_H yra lygus 0. Visos invariantinės aibės sudaro σ kūną, kuris yra σ kūno $\mathcal{B}(\Omega)$ σ pokūnis. Grupė $\{\varphi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ yra vadinama ergodine, jei jos invariantinių aibių σ kūnas yra sudarytas tik iš aibių, kurių Haro matas m_H yra lygus 0 arba 1.

6.1 lema. *Grupė $\{\varphi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ yra ergodinė.*

Lemos įrodymą ir kitus aukščiau naudotus tvirtinimus galima rasti [7] monografijos 5 skyriuje.

Dar mums bus reikalinga ergodinio proceso sąvoka. Tarkime, jog turime atsitiktinį procesą $X(\omega, t)$, apibrėžtą tikimybinėje erdvėje $(\hat{\Omega}, \mathcal{A}, \mu), t \in \mathcal{T}$. Fiksuojame bet kokias reikšmes $t_1, ..., t_n, n \in \mathbb{N}$. Tada atsitiktinių dydžių $X(\omega, t_1), ..., X(\omega, t_n)$ jungtiniai pasiskirstymai

$$\mu(X(\omega, t_1) < x_1, ..., X(\omega, t_n) < x_n), \qquad n \in \mathbb{N},$$

yra vadinami atsitiktinio proceso $X(\omega, t)$ baigtiniamačiais pasiskirstymais. Procesas $X(\omega, t)$ yra vadinamas griežtai stacionariuoju procesu, jei su visais $u \in \mathbb{R}$ baigtiniamačiai pasiskirstymai

$$\mu(X(\omega, t_1) < x_1, ..., X(\omega, t_n) < x_n)$$

ir

$$\mu(X(\omega, t_1 + u) < x_1, ..., X(\omega, t_n + u) < x_n)$$

sutampa. Panašiai, kaip ir transformacijos φ_τ atveju, yra apibrėžiamos proceso invariantinės aibės. Be to, procesas yra vadinamas ergodiniu, jei jo invariantinių aibių σ kūnas yra sudarytas tik iš aibių, kurių matas yra 0 arba 1.

Ergodiniams procesams yra teisinga Birkhofo-Chinčino teorema.

6.2 lema. *Tarkime, kad $X(\omega, t)$ yra ergodinis procesas, $\mathbb{E}|X(\omega, t)| < \infty$ ($\mathbb{E}X$ yra vidurkis), o proceso trajektorijos beveik tikrai yra integruojamos pagal Rymaną kiekviename baigtiniame intervale. Tuomet*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(\omega, t)dt = \mathbb{E}X(\omega, 0)$$

su beveik visais $\omega \in \hat{\Omega}$.

Lemos įrodymas yra duotas [2] monografijoje. Taigi, Birkhofo-Chinčino teorema suriša teorinį proceso vidurkį ir vidurkį pagal laiką t.

4.1 teoremos įrodymas. Tegul A yra fiksuota ribinio mato P iš 5.4 lemos tolydumo aibė, t.y., $P(\partial A) = 0$. Tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ apibrėžiame atsitiktinį dydį θ formule

$$\theta(\omega) = \begin{cases} 1, \text{ jei } \underline{\zeta}(s_1, ..., s_r, \omega; F_1, ..., F_r) \in A, \\ 0 \text{ priešingu atveju.} \end{cases}$$

Skaičiuojame šio atsitiktinio dydžio vidurkį $\mathbb{E}\theta$:

$$\mathbb{E}\theta = \int_\Omega \theta dm_H = m_H(\omega \in \Omega : \underline{\zeta}(s_1, ..., s_r, \omega; F_1, ..., F_r) \in A),$$

t.y., $\mathbb{E}\theta$ yra atsitiktinio elemento $\underline{\zeta}(s_1, ..., s_r, \omega; F_1, ..., F_r)$ pasiskirstymas,

$$\mathbb{E}\theta = P_{\underline{\zeta}}(A). \tag{6.1}$$

Iš 6.1 lemos išplaukia, jog $\theta(\varphi_\tau(\omega))$ yra ergodinis procesas. Todėl pagal 6.2 lemą turime, kad su beveik visais $\omega \in \Omega$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \theta(\varphi_\tau(\omega))d\tau = \mathbb{E}\theta, \tag{6.2}$$

nes $\varphi_0(\omega) = \omega$.

Iš kitos pusės, atsitiktinio dydžio θ ir transformacijos $\varphi_\tau(\omega)$ apibrėžimai duoda lygybę

$$\frac{1}{T} \int_0^T \theta(\varphi_\tau(\omega))d\tau = \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0, T] : \underline{\zeta}(s_1 + i\tau, ..., s_r + i\tau, \omega; F_1, ..., F_r) \in A\}.$$

Iš čia, (6.1) ir (6.2) gauname, kad su beveik visais $\omega \in \Omega$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : \underline{\zeta}(s_1+i\tau,...,s_r+i\tau,\omega;F_1,...,F_r) \in A\} = P_{\underline{\zeta}}(A). \quad (6.3)$$

Tačiau pagal 5.4 ir 3.1 lemas

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : \underline{\zeta}(s_1+i\tau,...,s_r+i\tau,\omega;F_1,...,F_r) \in A\} = P(A).$$

Iš čia ir (6.3) turime, kad $P(A) = P_{\underline{\zeta}}(A)$ su bet kuria mato P tolydumo aibe A. Tačiau yra žinoma [1], kad mato tolydumo aibės sudaro apibrėžiančią klasę, t.y., jei du matai sutampa visose tolydumo aibėse, tai jie sutampa. Taigi, gavome, kad $P(A) = P_{\underline{\zeta}}(A)$ su visomis aibėmis $A \in \mathcal{B}(H^r(\underline{D}))$, t.y., P_T, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą $P_{\underline{\zeta}}$. Teorema įrodyta.

Summary

A multi-dimensional limit theorem for zeta-functions of cusp forms

Denote by $SL(2,\mathbb{Z})$ the full modular group. Suppose that the function $F(z)$ is analytic in the half-plane $Imz > 0$, and, for all

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}),$$

with some even $\kappa > 0$ satisfies the functional equation

$$F\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{\kappa} F(z).$$

If, moreover, the function $F(z)$ has the Fourier series expansion

$$F(z) = \sum_{m=1}^{\infty} c(m) e^{2\pi i m z},$$

the $F(z)$ is called a cusp form of weight κ for the full modular group.

The zeta function $\zeta(s,F), s = \sigma + it$, associated to the cusp form is defined, for $\sigma > \frac{\kappa+1}{2}$, by the Dirichlet series

$$\zeta(s,F) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c(m)}{m^s},$$

and is analytically continued to an entire function.

Suppose that $\zeta(s_j, F_j), j = 1, ..., r$, be zeta-functions of cusp forms F_j of weight κ_j. In the master work, we consider the joint distribution of

$$\underline{\zeta}(s_1, ..., s_r; F_1, ..., F_r) = (\zeta(s_1, F_1), ..., \zeta(s_r, F_r)).$$

Let $D_j = \left\{ s \in \mathbb{C} : \sigma > \frac{\kappa_j}{2} \right\}$, and let $H(D_j)$ denote the space of analytic functions on D_j endowed with the topology of uniform convongence on compacta. Define

$$H^r(\underline{D}) = H(D_1) \times ... \times H(D_r), \underline{D} = (D_1, ..., D_r).$$

We consider the weak convergence of

$$P_T(A) = \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : \underline{\zeta}(s_1 + i\tau, ..., s_r + i\tau; F_1, ..., F_r) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(H^r(\underline{D})),$$

as $T \to \infty$, and we prove, that P_T, as $T \to \infty$, converges weakly to $P_{\underline{\zeta}}$, where $P_{\underline{\zeta}}$ is the distribution of the random element

$$(\zeta(s_1, \omega; F_1), ..., \zeta(s_r, \omega; F_r)).$$

This element is defined on the probability space $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$, where

$$\Omega = \prod_p \gamma_p$$

with $\gamma_p = \{s \in \mathbb{C} : |s|= 1\}$ for all primes p, and m_H denote the probability Haar measure on $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$.

Literatūra

[1] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, Wiley, New York, 1968.

[2] H. Cramér, M. Leadbetter, *Stationary and Related Stochastic Processes*, Wiley, New York, 1967.

[3] P. Deligne, *La conjecture de Weil*, Publ. I.H.E.S. 43 (1974), 273-307.

[4] J. Hadamard, *Sur les zéros de la fonction* $\zeta(s)$ *de Riemann*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 122 (1896), 1470-1473.

[5] H. Iwaniec, *Topics in Classical Automorphic Forms*, Amer. Math. Soc., Providence, 1997.

[6] A. Kačėnas, A. Laurinčikas, *On Dirichlet series related to certain cusp forms*, Lith. Math. J. 38 (1988), 64-76.

[7] A. Laurinčikas, *Limit Theorems for the Riemann Zeta - Function*, Kluwer, Dordrecht, 1996.

[8] A. Laurinčikas, *On joint universality of Dirichlet* L *- functions*, Chebysh. sb. 12 (2011), 124-139.

[9] A. Laurinčikas, R. Garunkštis, *The Lerch Zeta - Function*, Kluwer, Dordrecht, 2002.

[10] A. Laurinčikas, K. Matsumoto, *The universality of zeta - functions attached to certain cusp forms*, Acta Arith. 98 (2001), 345-359.

[11] V. Paulauskas, A. Račkauskas, *Funkcinė analizė. 1 knyga. Erdvės*, UAB "Vaistų žinios", Vilnius, 2007.

[12] C. J. de la Vallée-Poussin, *Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers*, Ann. Soc. Sci. Bruxelles 20 (1896), 183-256, 281-362, 363-397.