VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

TIKIMYBIŲ TEORIJOS IR SKAIČIŲ TEORIJOS KATEDRA

Laura Laukytė

Diskrečioji jungtinė universalumo teorema Dirichlė L funkcijai ir Lercho dzeta funkcijai

Magistro baigiamasis darbas

Leidžiu ginti ....

Darbo vadovas prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas

Vilnius 2017

Turinys

Įvadas

Analizinėje skaičių teorijoje taikant kompleksinio kintamojo funkcijų teorijos metodus yra nagrinėjamas įvairių skaičių, pavyzdžiui pirminių skaičių, pasiskirstymas. Šiam tikslui ir naudojamas dzeta arba L funkcijų aparatas. Taikymams skaičių teorijoje reikia žinoti dzeta ir L funkcijų savybes. Todėl didelė analizinės skaičių teorijos dalis ir yra skiriama minėtų funkcijų tyrimui.

Viena iš dzeta ir L funkcijų įdomiausių savybių yra jų universalumas. Rymano dzeta funkcijos $\zeta(s), \quad s = \sigma + it$, kuri pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}$$

ir yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus paprastąjį polių taške $s = 1$ su reziduumu 1, universalumo savybę 1975m. atrado S.M. Voroninas [13]. Ši savybė reiškia, kad plati analizinių funkcijų klasė norimu tikslumu gali būti aproksimuojama funkcija $\zeta(s)$ postūmiais $\zeta(s + i\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}$. Tiksliam Voronino teoremos formulavimui reikalingi kai kurie žymenys. Tegul $D = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$, $\mathcal{K}$ yra juostos D kompaktinių aibių, turinčių jungųjį papildinį, klasė, o $H_0(K), K \in \mathcal{K}$, yra funkcijų, tolydžių ir nevirstančių nuliumi aibėje K, ir analizinių aibės K viduje, klasė. Tada šiuolaikinis Voronino teoremos variantas tvirtina, kad jei $K \in \mathcal{K}$, o $f(s) \in H_0(K)$, tai su visais $\epsilon > 0$ yra teisinga nelygybė

$$\liminf_{T \to \infty} \frac{1}{T} meas \Big\{ \tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau) - f(s)| < \epsilon \Big\} > 0,$$

čia $measA$ žymi mačios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matą. Ši teorema tvirtina, kad aibė postūmių $\zeta(s + i\tau)$, aproksimuojančių duotą funkciją $f(s) \in H_0(K)$, turi teigiamą apatinį tankį. Tai rodo, jog postūmių $\zeta(s + i\tau)$, aproksimuojančių duotą funkciją, yra be galo daug.

Universalios yra ir daugelis kitų klasikinių dzeta ir L funkcijų. Magistro darbe nagrinėsime Dirichlė L funkcijas ir Lercho dzeta funkciją, todėl pateiksime ir jų apibrėžimus. Dirichlė L funkcijų apibrėžimui yra reikalinga Dirichlė charakterio sąvoka. Jos pilnas ir tikslus apibrėžimas yra gana sudėtingas [11], todėl tik pastebime, kad kiekviena funkcija $\chi : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, kuri yra periodinė su periodu $q \in \mathbb{N}$ $\Big(\chi(m+q) = \chi(m), m \in \mathbb{N}\Big)$, visiškai multiplikatyvi $\Big(\chi(mn) = \chi(m)\chi(n), \quad m, n \in \mathbb{N}\Big)$, $\chi(m) = 0$, kai $(m, q) > 1$, ir $\chi(m) \neq 0$, kai $(m, q) = 1$, sutampa su vienu iš Dirichlė charakterių moduliu q. Iš viso yra $\varphi(q)$ charakterių moduliu q. Čia $\varphi(q)$ yra Oilerio funkcija, tai yra,

$$\varphi(q) = \#\{1 \leq m \leq q : (m, q) = 1\}.$$

Tegul $\chi(m)$ yra Dirichlė charakteris moduliu q. Pusplokštumėje $\sigma > 1$ Dirichlė L funkcija $L(s, \chi)$ yra aprėžiama Dirichlė eilute

$$L(s, \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s}.$$

Charakteris χ_0 moduliu q yra vadinamas pagrindiniu, jei $\chi_0(m) = 1$ su visais $(m, q) = 1$. Funkcija $L(s, \chi_0)$ yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus paprastąjį polių taške $s = 1$ su reziduumu

$$\prod_{p|q} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big),$$

čia p žymi pirminį skaičių. Jei χ nėra pagrindinis charakteris moduliu q, tai funkcija $L(s, \chi)$ yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, kitaip tariant, ji yra sveikoji funkcija. Dirichlė L funkcijų universalumą taip pat įrodė S.M. Voroninas [13]. Yra teisinga tokia teorema.

1 teorema. *Tarkime, kad $K \in \mathcal{K}$, o $f(s) \in H_0(K)$. Tuomet su kiekvienu $\epsilon > 0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{T \to \infty} \frac{1}{T} meas \Big\{ \tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |L(s + i\tau, \chi) - f(s)| < \epsilon \Big\} > 0.$$

Kitas magistro darbo objektas yra Lercho dzeta funkcija. Tegul $\lambda \in \mathbb{R}$ ir α, $0 < \alpha \leq 1$, yra fiksuoti parametrai. Tuomet Lercho dzeta funkcija $L(\lambda, \alpha, s)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$L(\lambda, \alpha, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda m}}{(m + \alpha)^s}.$$

Kai $\lambda \in \mathbb{Z}$, tai funkcija $L(\lambda, \alpha, s)$ yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus paprastąjį polių taške $s = 1$ su reziduumu 1. Kai $\lambda \notin \mathbb{Z}$, tuomet funkcija $L(\lambda, \alpha, s)$ yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą. Šiuo atveju dėl $e^{2\pi i \lambda m}$ periodiškumo galime laikyti , kad $0 < \lambda \leq 1$.

Funkcijos $L(\lambda, \alpha, s)$ universalumas yra sudėtingesnis ir priklauso nuo parametrų α ir λ. Čia primename tik paprastesnį atvejį, kai α ir transcendentusis skaičius, tai yra, jis nėra jokio polinomo su racionaliaisiais koeficientais šaknis. Tegul $H(K)$, $K \in \mathcal{K}$, yra funkcijų, tolydžių aibėje K ir analizinių jos viduje, klasė. Tuomet yra teisinga tokia universalumo teorema[6].

2 teorema. *Tarkime, kad α yra transcendentusis skaičius, o $0 < \lambda \leq 1$, $K \in \mathcal{K}$, o $f(s) \in H(K)$. Tuomet su kiekvienu $\epsilon > 0$ teisinga nelygybė*

$$\liminf_{T \to \infty} \frac{1}{T} meas \Big\{ \tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |L(\lambda, \alpha, s + i\tau) - f(s)| < \epsilon \Big\} > 0.$$

Dirichlė L funkcija $L(s, \chi)$ pusplоštumėje $\sigma > 1$ yra užrašoma Oilerio sandauga pagal pirminius skaičius

$$L(s, \chi) = \prod_p \Big(1 - \frac{\chi(p)}{p^s} \Big)^{-1}.$$

Tuo tarpu, Lercho dzeta funkcija su transcendenčiuoju parametru α tokios sandaugos neturi. Todėl 2 teoremoje yra aproksimuojamos funkcijos iš klasės $H(K)$, o 1 teoremoje – iš klasės $H_0(K)$. Aišku, kad $H_0(K) \subset H(K)$.

1 ir 2 teoremos yra tolydaus tipo, nes jose menamoji postūmio dalis τ gali įgyti bet kurias realias reikšmes. Yra nagrinėjamos ir vadinamosios diskrečiosios universalumo teoremos, kai τ įgyja reikšmes iš kurios nors diskrečiosios aibės, tarkime, iš aritmetinės progresijos $\{kh : k = 0, 1, ...\}, h > 0$ yra fiksuotas skaičius. Tegul $\#A$ yra aibės A elementų skaičius. Tuomet diskretusis 1 teoremos analogas turi tokį pavidalą.

3 teorema. *Tarkime, kad $K \in \mathcal{K}$, o $f(s) \in H_0(K)$. Tuomet su kiekvienu $\epsilon > 0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{N \to \infty} \frac{1}{N+1} \# \Big\{ 0 \leq k \leq N : \sup_{s \in K} |L(s + ikh, \chi) - f(s)| < \epsilon \Big\} > 0.$$

Pirmąją diskretaus tipo universalumo teoremą algebrinių skaičių kūno Dedekindo dzeta funkcijoms įrodė A. Reichas[12]. 3 teoremos įrodymą galima rasti [1] disertacijoje.

2 teoremos diskretusis analogas turi pavidalą.

4 teorema. *Tarkime, kad α yra transcendentusis skaičius, o $0 < \lambda \leq 1$. Tegul*

$K \in \mathcal{K}$, o $f(s) \in H(K)$. Tuomet su kiekvienu $\epsilon > 0$ yra teisinga nelygybė

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \Big\{ 0 \le k \le N : \sup_{s \in K} |L(\lambda, \alpha, s+ikh) - f(s)| < \epsilon \Big\} > 0.$$

4 teoremos įrodymas mažai kuo skiriasi nuo analogiškos teoremos įrodymo [1] Hurvico dzeta funkcijai $\zeta(s, \alpha)$, kuri pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama eilute

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+\alpha)^s}$$

ir yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą išskyrus paprastąjį polių taške $s = 1$ su reziduumu 1.

Magistro darbo tikslas yra įrodyti diskrečiąją jungtinę universalumo teoremą Dirichlė L funkcijai ir Lercho dzeta funkcijai. Pagrindinis magistro darbo rezultatas yra tokia teorema. Apibrėžkime aibę

$$\mathbf{L}(\mathbb{P}, \alpha, \pi, h) = \Big\{ (\log p : p \in \mathbb{P}), (\log(m+\alpha) : m \in \mathbb{N}_0), \frac{\pi}{h} \Big\}.$$

5 teorema. *Tarkime, kad aibė $\boldsymbol{L}(\mathbb{P}, \alpha, \pi, h)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$, o $0 < \lambda \le 1$. Tegul $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$, o $f_1(s) \in H_0(K_1)$ ir $f_2(s) \in H(K_2)$. Tuomet su kiekvienu $\epsilon > 0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \Big\{ 0 \le k \le N : \sup_{s \in K_1} |L(s+ikh, \chi) - f_1(s)| < \epsilon, \\ \sup_{s \in K_2} |L(\lambda, \alpha, s+ikh) - f_2(s)| < \epsilon \Big\} > 0.$$

5 teoremos įrodymas, kaip ir 1–4 teoremų, remiasi tikimybinio pobūdžio ribinėmis teoremomis.

1. Tikimybių teorijos elementai

Šiame skyrelyje pateiksime reikalingus apibrėžimus ir rezultatus apie tikimybinius matus ir jų konvergavimą.

Tegul Ω yra bet kuri netuščia aibė, o $\mathcal{A}$ yra aibės Ω poaibių σ algebra (σ kūnas). Tuomet aibės funkcija $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ yra vadinama tikimybiniu matu, jeigu galioja aksiomos:

1. $\mathbb{P}(A) \geq 0$ su kiekviena aibe $A \in \mathcal{A}$;

2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

3. Jei aibės $A_1, A_2, ...$ kas dvi neturi bendrų elementų, tai tuomet

$$\mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k).$$

Trejetas $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ yra vadinamas tikimybine erdve. Tikimybinėje erdvėje yra apr̄ėžiami atsitiktiniai dydžiai arba atsitiktiniai elementai. Tarkime, kad S yra metrinė erdvė, o $\mathcal{B}(S)$ yra erdvės S Borelio aibių klasė, tai yra, minimalus σ kūnas (σ algebra), kuriam priklauso erdvės S atvirųjų aibių sistema. Tuomet funkcija $X : \Omega \to S$ yra vadinama S reikšmiu atsitiktiniu elementu, apibrėžtu tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, jei su kiekviena Borelio aibe $B \in \mathcal{B}(S)$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}.$$

Tikimybinis matas P, apibrėžtas mačioje erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$ formule

$$P(A) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}, A \in \mathcal{B}(S),$$

yra vadinamas atsitiktinio elemento X pasirinkimu.

Dabar apibrėšime silpnąjį tikimybinių matų konvergavimą. Tegul P_n, $n \in \mathbb{N}$, ir P yra tikimybiniai matai mačioje erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$. Jeigu su kiekviena realia aprėžta tolydžia funkcija f, apibrėžta erdvėje S, yra teisinga lygybė

$$\lim_{n\to\infty} \int_S f dP_n = \int_S f dP,$$

tai sakoma, kad P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P.

Yra žinomi tikimybinių matų silpnojo konvergavimo ekvivalentai įvairių aibių terminais. Universalumo teoremos įrodymui reikalingas toks ekvivalentas atvirųjų aibių terminais.

1.1 lema. *P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P, tada ir tik tada, kai galioja tvirtinimas: su kiekviena erdvės S atvirąja aibe G yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{n \to \infty} P_n(G) \geq P(G).$$

Lemos įrodymas duotas [2] monografijoje, 2.1 teorema.

Tegul X_n, $n \in \mathbb{N}$, ir X yra S reikšmiai atsitiktiniai elementai, apibrėžti erdvėje $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Sakoma, kad X_n, kai $n \to \infty$, konverguoja į X pagal pasiskirstymą, jei elemento X_n pasiskirstymas, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento X pasiskirstymą. Šį faktą užrašome taip: $X_n \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{D}} X$.

Mums yra naudingas toks tvirtinimas.

1.2 lema. *Tarkime, kad (S, ρ) yra separabili metrinė erdvė, o S reikšmiai atsitiktiniai elementai $Y_n, X_{1n}, X_{2n}, \dots$ yra apibrėžti kurioje nors tikimybinėje erdvėje $(\hat{\Omega}, \mathcal{A}, P)$. Tegul, kai $n \to \infty$, $X_{kn} \xrightarrow{\mathcal{D}} X_k$ su $\forall k \in \mathbb{N}$ ir $X_k \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, kai $k \to \infty$. Be to, tegul su kiekvienu $\epsilon > 0$ yra teisinga lygybė*

$$\lim_{k \to \infty} \lim_{n \to \infty} P\{\rho(X_{kn}, Y_n) \geq \epsilon\} = 0.$$

Tuomet $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, kai $n \to \infty$.

Lemos įrodymą galime rasti [2] monografijoje.

Nagrinėjant tikimybinių matų silpnąjį konvergavimą, svarbų vaidmenį atlieka Prochorovo teorema. Ši teorema suriša dvi tikimybinių matų šeimų sąvokas. Sakome, kad tikimybinių matų šeima $\{P\}$ yra suspausta, jei kiekvieną $\epsilon > 0$ atitinka tokia kompaktinė aibė $K = K(\epsilon) \subset S$, kad su visais šeimos $\{P\}$ matais yra teisinga nelygybė $P(K) > 1 - \epsilon$. Ši matų šeima yra vadinama reliatyviai kompaktiška, jei kiekviena jos seka turi silpnai konverguojantį posekį į kurį nors tikimybinį matą erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$.

1.3 lema. *Jei tikimybinių matų šeima yra suspausta, tai ji yra realiatyviai kompaktiška.*

Lemos įrodymas yra duotas [2] monografijoje.

Nagrinėjant tikimybinių matų silpnąjį konvergavimą, yra naudojamos įvairios tų matų transformacijos, iš kurių konvergavimo išplaukia silpnasis matų konvergavimas. Tokios teoremos yra vadinamos tolydumo teoremomis. Suformuluosime tolydumo teoremą tikimybiniams matams kompaktinėse grupėse G. Šiam tikslui reikia apibrėžti mato Furjė transformaciją. Jos apibrėžimui yra naudojami grupės charakteriai. Grupės G charakteriu vadiname kiekvieną funkciją $\chi : G \to \gamma$, turinčią savybę, kad su visais $g_1, g_2 \in G$

$$\chi(g_1, g_2) = \chi(g_1)\chi(g_2).$$

Čia $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$ yra vienetinis apskritimas kompleksinėje plokštumoje. Grupės charakteriai vėl sudaro grupę, kuri yra vadinama pradinės grupės dualiąja grupe. Tarkime, kad P yra tikimybinis matas mačioje erdvėje $(G, \mathcal{B}(G))$, o χ yra grupės G charakteris. Tuomet mato P Furjė transformaciją apibrėžiame integralu

$$F(\chi) = \int_G \chi(g) dP.$$

Yra teisingas toks tvirtinimas.

1.4 lema. *Tarkime, kad G yra kompaktinė grupė, $P_n, n \in \mathbb{N}$, yra tikimybinis matas mačioje erdvėje $(G, \mathcal{B}(G))$. Jei mato P_n Furjė transformacija $F_n(\chi)$, kai $n \to \infty$, su visais grupės G charakteriais χ konverguoja į kurią nors tolydžią funkciją $F(\chi)$, tai tuomet P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į kurį nors tikimybinį matą P erdvėje $(G, \mathcal{B}(G))$. Be to, $F(\chi)$ yra mato P Furjė transformacija.*

Lema yra atskiras atvejis analogiško tvirtinimo, įrodyto [4] monografijoje bendresnėms lokaliai kompaktiškoms grupėms.

Tarkime, kad turime dar vieną metrinę erdvę X_1. Funkcija $u : X \to X_1$ yra vadinama $(\mathcal{B}(X), \mathcal{B}(X_1))$ mačia, jei su kiekviena aibe $A_1 \in \mathcal{B}(X_1)$ yra teisingas sąryšis $u^{-1}A_1 \in \mathcal{B}(X)$. Jeigu funkcija u yra tolydi, tai ji yra $(\mathcal{B}(X), \mathcal{B}(X_1))$ mati.[2] Tegul P yra tikimybinis matas erdvėje $(X, \mathcal{B}(X))$, o $u : X \to X_1$ yra mati funkcija. Tuomet matas P apibrėžia vienintelį matą Pu^{-1} erdvėje $(X_1, \mathcal{B}(X_1))$:

$$Pu^{-1}(A_1) = P(u^{-1}A_1), \quad A_1 \in \mathcal{B}(X_1).$$

Teisingas toks tvirtinimas.

1.5 lema. *Tegul funkcija $u : X \to X_1$ yra tolydi. Jei P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P, tai tada ir matas $P_n u^{-1}$, kai $n \to \infty$, taip pat silpnai konverguoja į Pu^{-1}.*

2. Jungtinė ribinė diskrečioji teorema

Šiame skyrelyje įrodysime dvimatę diskrečiąją teoremą Dirichlė L funkcijai ir Lercho dzeta funkcijai. Pradėsime ribine teorema tikimybiniams matams, apibrėžtiems dviejų begaliniamačių torų sandaugoje.

Tarkime, kad γ yra vienetinis apskritimas kompleksinėje plokštumoje, t.y., $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$. Apibrėžkime dvi aibes

$$\Omega_1 = \prod_p \gamma_p, \quad \Omega_2 = \prod_{m=0}^{\infty} \gamma_m,$$

čia $\gamma_p = \gamma$ su visais pirminiais skaičiais p ir $\gamma_m = \gamma$ su visais neneigiamais sveikais m. Iš Dekarto sandaugos apibrėžimo turime, kad torą Ω_1 sudaro visos funkcijos, kurios pirminių skaičių aibę $\mathbb{P}$ atvaizduoja vienetiniame apskritime, o torą Ω_2 sudaro visos funkcijos, atvaizduojančios aibę $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ vienetiniame apskritime. Kadangi apskritimas yra kompaktinė aibė, tai pagal Tichonovo teoremą [10] torai Ω_1 ir Ω_2 su sandaugos topologija ir pataškinės daugybos operacija yra kompaktinės topologinės Abelio grupės. Imame jų Dekarto sandaugą

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2.$$

Tuomet vėl pagal Tichonovo teoremą Ω yra kompaktinė topologinė Abelio grupė. Todėl mačioje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ galime apibrėžti tikimybinį Haro matą m_H[5]. Haro matas m_H išsiskiria iš kitų tikimybinių matų invariantiškumo savybe, kuri reiškia, kad su visomis aibėmis $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ ir visais $\omega \in \Omega$ yra teisingos lygybės

$$m_H(A) = m_H(\omega A) = m_H(A\omega).$$

Be to, yra žinoma, kad matas m_H yra tikimybinių Haro matų m_{1H} ir m_{2H}, apibrėžtų atitinkamose erdvėse $(\Omega_1, \mathcal{B}(\Omega_1))$ ir $(\Omega_2, \mathcal{B}(\Omega_2))$, sandauga. Tai reiškia, kad jei $A = A_1 \times A_2, \quad A_1 \in \mathcal{B}(\Omega_1), \quad A_2 \in \mathcal{B}(\Omega_2)$ tai

$$m_H(A) = m_{1H}(A_1)m_{2H}(A_2).$$

Taigi, turime tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Aibės Ω elementus žymėsime $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, $\omega_1 \in \Omega_1$, $\omega_2 \in \Omega_2$. Be to, tegul $\omega_1(p)$ yra elemento $\omega_1 \in \Omega_1$ projekcija į apskritimą γ_p, $p \in \mathbb{P}$, o $\omega_2(m)$ yra elemento $\omega_2 \in \Omega_2$ projekcija į apskritimą γ_m, $m \in \mathbb{N}_0$.

Aibėms $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ apibrėžiame

$$Q_N(A) = \frac{1}{N+1} \# \Big\{ 0 \le k \le N : \Big((p^{-ikh} : p \in \mathbb{P}), (m+\alpha)^{-ikh} : m \in \mathbb{N}_0 \Big) \in A \Big\}.$$

Primename, kad

$$\mathbf{L}(\mathbb{P}, \alpha, \pi, h) = \Big\{ (\log p : p \in \mathbb{P}), (\log (m+\alpha) : m \in \mathbb{N}_0), \frac{\pi}{h} \Big\}.$$

2.1 lema. *Tarkime, kad aibė $\boldsymbol{L}(\mathbb{P}, \alpha, \pi, h)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$. Tuomet Q_N, kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į Haro matą m_H.*

Įrodymas. Naudosime Furjė transformacijų metodą. Yra žinoma [7], kad grupės Ω charakteriai turi pavidalą

$$\prod_{p \in P} \omega_1^{k_p}(p) \prod_{m \in \mathbb{N}_0} \omega_2^{l_m}(m),$$

čia tik baigtinis skaičius sveikųjų skaičių k_p ir l_m yra nelygūs 0. Trumpumo dėlei, tegul $\underline{k} = (k_p : p \in \mathbb{P})$ ir $\underline{l} = (l_m : m \in \mathbb{N}_0)$. Tuomet mato Q_N Furjė transformacija turi pavidalą

$$g_N(\underline{k}, \underline{l}) = \int_\Omega \Big(\prod_{p \in \mathbb{P}} \omega_1^{k_p}(p) \prod_{m \in \mathbb{N}_0} \omega_2^{l_m}(m) \Big) dQ_N,$$

čia, kaip minėjome, tik baigtinis skaičius skaičių k_p ir l_m yra nenuliai. Iš čia ir Q_N apibrėžimo randame, kad

$$\begin{aligned} g_N(\underline{k}, \underline{l}) &= \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{-1kk_p h} \prod_{m \in \mathbb{N}_0} (m+\alpha)^{-1kl_m h} = \\ &= \frac{1}{N+1} \sum_{k=l}^{N} \exp\{-ikh(\sum_{p \in \mathbb{P}} k_p \log p + \sum_{m \in \mathbb{N}_0} l_m \log (m+\alpha))\}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Aišku, kad

$$g_N(\underline{0}, \underline{0}) = 1. \tag{2.2}$$

Pastebime, kad su $(\underline{k}, \underline{l}) \neq (\underline{0}, \underline{0})$

$$\exp\{-ih(\sum_{p \in \mathbb{P}} k_p \log p + \sum_{m \in \mathbb{N}_0} l_m \log (m+\alpha))\} \neq 1. \tag{2.3}$$

Tikrai, jei ši nelygybė negaliotų, tai paėmę abiejų pusių logaritmus gautume, kad

$$h\Big(\sum_{p\in\mathbb{P}} k_p \log p + \sum_{m\in\mathbb{N}_0} l_m \log(m+\alpha)\Big) = 2\pi r$$

su kuriuo nors sveikuoju r. Iš čia gauname, kad

$$\sum_{p\in\mathbb{P}} k_p \log p + \sum_{m\in\mathbb{N}_0} l_m \log(m+\alpha) - \frac{2\pi r}{h} = 0.$$

Kadangi čia tik baigtinės sumos, tai pastaroji lygybė prieštarauja aibės $\mathbf{L}(\mathbb{P},\alpha,\pi,h)$ tiesiniam nepriklausomumui virš $\mathbb{Q}$. Todėl nelygybė (2.3) yra teisinga. Remdamiesi šia nelygybe, (2.3) ir geometrinės progresijos sumos formule, randame, kad atveju $(\underline{k},\underline{l}) \neq (\underline{0},\underline{0})$

$$g_N(\underline{k},\underline{l}) = \frac{1-\exp\Big\{-i\Big(N+1\Big)h\Big(\sum_{p\in\mathbb{P}} k_p \log p + \sum_{m\in\mathbb{N}_0} l_m \log(m+\alpha)\Big\}}{\Big(N+1\Big)\Big(1-\exp\Big\{ih\Big(\sum_{p\in\mathbb{P}} k_p \log p + \sum_{m\in\mathbb{N}_0} l_m \log(m+\alpha)\Big)\Big\}}.$$

Kadangi pastarosios trupmenos skaitiklis yra aprėžtas, jis moduliu neviršija dviejų, o vardiklyje yra $(N+1)$, tai atveju $(\underline{k},\underline{l}) \neq (\underline{0},\underline{0})$ turime, kad

$$\lim_{N\to\infty} g_N(\underline{k},\underline{l}) = 0.$$

Iš čia ir (2.2) matome, kad

$$\lim_{N\to\infty} g_N(\underline{k},\underline{l}) = \begin{cases} 1, & \text{kai } (\underline{k},\underline{l}) = (\underline{0},\underline{0}); \\ 0, & \text{kai } (\underline{k},\underline{l}) \neq (\underline{0},\underline{0}). \end{cases}$$

Kadangi kairioji šios lygybės pusė yra Haro mato m_H Furjė tranformacija, tai lemos tvirtinimas išplaukia iš 1.4 lemos.

Dabar įrodysime jungtinę ribinę teoremą analizinių funkcijų erdvėje abiem funkcijoms, apibrėžiamoms absoliučiai konverguojančioms Dirichlė eilutėms. Tegul $\sigma > \frac{1}{2}$ yra fiksuotas skaičius. Apibrėžiame

$$v_n(m) = \exp\Big\{-\Big(\frac{m}{n}\Big)^{\sigma_0}\Big\}, \quad m,n\in\mathbb{N},$$

ir

$$v_n(m,\alpha) = \exp\Big\{-\Big(\frac{m+\alpha}{n+\alpha}\Big)^{\sigma_0}\Big\}, \quad m\in\mathbb{N}_0, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Nagrinėsime funkcijas

$$L_n(s,\chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)v_n(m)}{m^s}$$

ir

$$L_n(\lambda, \alpha, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda m} v_n(m+\alpha)}{(m+\alpha)^s}.$$

Yra žinoma [5], [6], kad šios eilutės absoliučiai konverguoja pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$. Apibrėžiame dar dvi funkcijas

$$L_n(s, \omega_1, \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)\omega_1(m)v_n(m)}{m^s}$$

ir

$$L_n(\lambda, \alpha, \omega_2, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda m}\omega_2(m) v_n(m, \alpha)}{(m+\alpha)^s}.$$

Šios eilutės taip pat absoliučiai konverguoja pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$. Čia

$$\omega_1(m) = \prod_{\substack{p^l | m,\\ p^{l+1} \nmid m}} \omega_1^l(p), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Tegul $H(D)$ yra funkcijų, analizinių juostoje D, erdvė su tolygaus konvergavimo kompaktinėse aibėse topologija, o $H^2(D) = H(D) \times H(D)$. Aibėms $A \in \mathcal{B}(H^2(D))$ apibrėžiame

$$P_{N,n}(A) = \frac{1}{N+1} \#\Big\{0 \le k \le N : \Big(L_n(s+ikh, \chi), L_n(\lambda, \alpha, s+ikh)\Big) \in A\Big\}.$$

2.2 lema. *Erdvėje* $\Big(H^2(D), \mathcal{B}(H^2(D))\Big)$ *egzistuoja toks tikimybinis matas* $\hat{P}_n$*, į kurį, kai* $n \to \infty$*, silpnai konverguoja* $P_{N,n}$*.*

Įrodymas. Apibrėžiame funkciją

$$u : \Omega \to H^2(D)$$

formule

$$u(\omega) = u(\omega_1, \omega_2) = (L_n(s, \omega_1, \chi), L_n(\lambda, \alpha, \omega_2, s)).$$

Kadangi eilutės, apibrėžiančios funkcijas $L_n(s, \omega_1, \chi)$ ir $L_n(\lambda, \alpha, \omega_2, s)$, konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$, tai funkcija u yra tolydi. Be to, iš funkcijos u apibrėžimo turime, kad

$$u\Big((p^{-ikh} : p \in \mathbb{P}), ((m+\alpha)^{-ikh} : m \in \mathbb{N}_0)\Big) = (L_n(s+ikh, \chi), L_n(\lambda, \alpha, s+ikh)).$$

Todėl iš Q_N ir $P_{N,n}$ apibrėžimų gauname, kad

$$\begin{aligned} P_{N,n}(A) &= \frac{1}{N+1} \#\Big\{0 \le k \le N : u((p^{ikh} : p \in \mathbb{P}), ((m+\alpha)^{ikh} : m \in \mathbb{N}_0)) \in A\Big\} \\ &= \frac{1}{N+1} \#\Big\{0 \le k \le N : ((p^{ikh} : p \in \mathbb{P}), (m+\alpha)^{ikh} : m \in \mathbb{N}_0)) \in u^{-1}A\Big\}. \end{aligned}$$

Taigi, $P_{N,n} = Q_N u^{-1}$. Iš čia, iš funkcijos u tolydumo, 2.1 lemos ir 1.5 lemos, gauname, kad $P_{N,n}$, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą $m_H u^{-1}$.

Dabar reikia pereiti nuo funkcijų $L_n(s,\chi)$ ir $L_n(\lambda,\alpha,s)$ prie $L(s,\chi)$ ir $L(\lambda,\alpha,s)$. Šiam tikslui yra reikalinga erdvių $H(D)$ ir $H^2(D)$ metrika.

Tegul G yra sritis kompleksinėje plokštumoje, o $\{K_l : l \in \mathbb{N}\} \subset G$ yra tokia kompaktinių aibių seka, kad

$$G = \cup_{l=1}^{n} K_l,$$

$K_l \subset K_{l+1}$ su visais $l \in \mathbb{N}$ ir, jei $K \subset G$ yra kompaktinė aibė, tai tuomet $K \subset K_l$ su kuriuo nors $l \in \mathbb{N}$. Tokios sekos egzistavimas yra įrodytas, pavyzdžiui, [3] monografijoje. Tvirtinimas taip yra formuluojamas [5] monografijoje 1.7.1 lemos pavidalu.

Mūsų atveju, $G = D$. Tegul $g_1, g_2 \in H(D)$ ir

$$\rho(g_1,g_2) = \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l} \frac{\sup_{s\in K_l} |g_1(s) - g_2(s)|}{1 + \sup_{s\in K_l} |g_1(s) - g_2(s)|}.$$

Tuomet ρ yra metrika erdvėje $H(D)$, indukuojanti jos tolygaus konvergavimo kompaktinėse aibės topologiją[5].

Tegul $\underline{g_1} = (g_{11}, g_{12}), \quad \underline{g_2} = (g_{21}, g_{22}) \in H^2(D)$. Tuomet

$$\underline{\rho}(\underline{g_1}, \underline{g_2}) = \max(\rho(g_{11}, g_{21}), \rho(g_{12}, g_{22}))$$

yra metrika erdvėje $H^2(D)$, indukuojanti sandaugos topologiją [10].

Tegul, trumpumo dėlei,

$$\underline{L}(s,\chi,\lambda,\alpha) = (L(s,\chi), L(\lambda,\alpha,s))$$

ir

$$\underline{L}_n(s,\chi,\lambda,\alpha) = (L_n(s,\chi), L_n(\lambda,\alpha,s)).$$

2.3 lema. *Teisinga lygybė*

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} \underline{\rho}(\underline{L}(s+ikh,\chi,\lambda,\alpha), \underline{L}_n(s+ikh,\chi,\lambda,\alpha)) = 0.$$

Įrodymas. Iš metrikos $\underline{\rho}$ apibrėžimo, matome, kad pakanka įrodyti, jog teisingos lygybės

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} \rho(L(s+ikh,\chi), L_n(s+ikh,\chi)) = 0 \tag{2.4}$$

ir

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\rho(L(\lambda,\alpha,s+ikh),L_n(\lambda,\alpha,s+ikh))=0. \tag{2.5}$$

Pirmoji iš šių lygybių yra gauta [1] disertacijoje. Jos įrodymui yra naudojama integralinė išraiška

$$L_n(s,\chi)=\int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}L(s+z,\chi)l_n(z)\frac{dz}{z},$$

čia $\sigma_1>\frac{1}{2}$ yra fiksuotas skaičius,

$$l_n(s)=\frac{s}{\sigma_1}\Gamma\Big(\frac{s}{\sigma_1}\Big)n^s,$$

o $\Gamma(s)$ yra Oilerio gama funkcija, ir kontūrinio integravimo metodas.

(2.5) lygybė yra įrodoma visiškai taip pat, kaip ir analogiška lygybė periodinei Hurvico dzeta funkcijai [8] straipsnyje, 4.1 teorema. Čia taip pat yra naudojamas kontūrinio integravimo metodas su funkcija

$$l_n(s,\alpha)=\frac{s}{\sigma_1}\Gamma\Big(\frac{s}{\sigma_1}\Big)(n+\alpha)^s$$

vietoje funkcijos $l_n(s)$.

Dabar formuluojame pagrindinį šio skyrelio rezultatą. Jo formulavimui reikalingi kai kurie žymenys. Visų pirma, tikimybinėje erdvėje $(\Omega,\mathcal{B}(\Omega),m_H)$ apibrėžiame $H^2(D)$ reikšmį atsitiktinį elementą $\underline{L}(s,\omega,\chi,\lambda,\alpha)$:

$$\underline{L}(s,\omega,\chi,\lambda,\alpha)=\Big(L(s,\omega_1,\chi),L(\lambda,\alpha,\omega_2,s)\Big),$$

čia

$$L(s,\omega_1,\chi)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\chi(m)\omega_1(m)}{m^s}$$

ir

$$L(\lambda,\alpha,\omega_2,s)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{2\pi i\lambda m}\omega_2(m)}{(m+\alpha)^s}.$$

Primename, kad $\omega=(\omega_1,\omega_2)$. Yra žinoma [5], [6], kad abi šios eilutės konverguoja tolygiai juostos D kompaktinėse aibėse, todėl jos apibrėžia $H(D)$ reikšmius atsitiktinius elementus tikimybinėje erdvėje $(\Omega,\mathcal{B}(\Omega),m_H)$.

Tegul

$$P_N(A)=\frac{1}{N+1}\#\Big\{0\le k\le N:\underline{L}(s+ikh,\chi,\lambda,\alpha)\in A\Big\},\quad A\in\mathcal{B}(H^2(D)),$$

o $P_{\underline{L}}$ yra atsitiktinio elemento $\underline{L}(s,\omega,\chi,\lambda,\alpha)$ pasiskirstymas, t.y.,

$$P_{\underline{L}}(A) = m_H\{\omega \in \Omega : \underline{L}(s,\omega,\chi,\lambda,\alpha) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(H^2(D)).$$

2.4 teorema. *Tarkime, kad aibė $\boldsymbol{L}(\mathbb{P},\alpha,\pi,h)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$. Tuomet P_N, kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į $P_{\underline{L}}$.*

Įrodymas. Kurioje nors tikimybinėje erdvėje $(\hat{\Omega},\mathcal{A},\mu)$ apibrėžiame atsitiktinį dydį θ_N, turintį pasiskirstymą

$$\mu(\theta_N = kh) = \frac{1}{N+1}, \quad k = 0,1,\dots,N.$$

Tegul

$$X_{N,n} = X_{N,n}(s) = \underline{L}_n(s + i\theta_N,\chi,\lambda,\alpha),$$

o $\hat{X}_n = \hat{X}_n(s)$ yra $H^2(D)$ reikšmis atsitiktinis elementas, kurio pasiskirstymas yra $\hat{P}_n$, matas $\hat{P}_n$ yra aprėžtas 2.2 lemoje. Tuomet pagal 2.2 lemą turime, kad

$$X_{N,n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \hat{X}_n. \tag{2.6}$$

Įrodysime, jog matų šeima $\{\hat{P}_n\}$ yra suspausta.
Tegul

$$\hat{P}_{n,1}(A) = \hat{P}_n(A \times H(D)), \quad A \in \mathcal{B}(H(D)),$$

ir

$$\hat{P}_{n,2}(A) = \hat{P}_n(H(D) \times A), \quad A \in \mathcal{B}(H(D)).$$

Tuomet įrodinėjant ribines teoremas Dirichlė L funkcijai [1] ir Lercho dzeta funkcijai [6] yra gaunama, kad matų šeimos $\{\hat{P}_{n,1} : n \in \mathbb{N}\}$ ir $\{\hat{P}_{n,2} : n \in \mathbb{N}\}$ yra suspaustos. Todėl kiekvieną $\epsilon > 0$ atitinka tokios kompaktinės aibės $K_1 \subset H(D)$ ir $K_2 \subset H(D)$, kad yra teisingos nelygybės

$$\hat{P}_{n,1}(K_1) > 1 - \frac{\epsilon}{2}$$

ir

$$\hat{P}_{n,2}(K_2) > 1 - \frac{\epsilon}{2}$$

su visais $n \in \mathbb{N}$. Tegul $K = K_1 \times K_2$. Tuomet K yra kompaktinė aibė erdvėje $H^2(D)$. Be to,

$$\Big(H^2(D) \setminus K\Big) = \Big((H(D) \setminus K_1) \times H(D)\Big) \cup \Big(H(D) \times (H(D) \setminus K_2)\Big).$$

Todėl su visais $n \in \mathbb{N}$

$$\hat{P}_n(H^2(D) \setminus K) \leq \hat{P}_n\Big((H(D) \setminus K_1) \times H(D)\Big) + \hat{P}_n\Big(H(D) \times (H(D) \setminus K_2)\Big) =$$
$$= \hat{P}_{n,1}(H(D) \setminus K_1) + \hat{P}_{n,2}(H(D) \setminus K_2) < (1 - 1 + \frac{\epsilon}{2}) + (1 - 1 + \frac{\epsilon}{2}) =$$
$$= \epsilon.$$

Iš čia išplaukia, kad su visai $n \in \mathbb{N}$

$$\hat{P}_n(K) = 1 - \hat{P}_n(H^2(D) \setminus K) > 1 - \epsilon.$$

Tai reiškia, kad matų šeima $\{\hat{P}_n : n \in \mathbb{N}\}$ yra suspausta.

Iš 1.3 lemos išplaukia, kad šeima $\{\hat{P}_n : n \in \mathbb{N}\}$ yra reliatyviai kompaktinė. Todėl egzistuoja toks posekis $\{\hat{P}_{n_r}\} \subset \{\hat{P}_n\}$ ir tikimybinis matas P erdvėje $(H(D), \mathcal{B}(H(D)))$, į kurį, kai $r \to \infty$, silpnai konverguoja $\hat{P}_{n_r}$. Kadangi $\hat{P}_{n_r}$ yra atsitiktinio elemento X_{n_r} pasiskirstymas, tai turime, kad

$$\hat{X}_{n_r} \xrightarrow[r \to \infty]{\mathcal{D}} P. \tag{2.7}$$

Šis sąryšis suprantamas ta prasme, kad atsitiktinio elemento X_{n_r} pasiskirstymas, kai $r \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P.

Apibrėžiame dar vieną $H(D)$ reikšmį atsitiktinį elementą

$$X_N = X_N(s) = \underline{L}(s + i\theta_N, \chi, \lambda, \alpha).$$

Tuomet iš 2.3 lemos gauname, kad su kiekvienu $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \mu\Big(\underline{\rho}\Big(X_N(s), X_{N,n}(s)\Big) \geq \epsilon\Big) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \#\Big\{0 \leq k \leq N : \underline{\rho}\Big(\underline{L}(s + ikh, \chi, \lambda, \alpha)), \underline{L}_n(s + ikh, \chi, \lambda, \alpha)\Big) \geq \epsilon\Big\} \leq$$
$$\leq \lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{(N+1)\epsilon} \sum_{k=0}^{N} \underline{\rho}\Big(\underline{L}(s + ikh, \chi, \lambda, \alpha), \underline{L}_n(s + ikh, \chi, \lambda, \alpha)\Big) = 0.$$

Ši lygybė kartu su (2.6) ir (2.7) sąryšiais bei 1.2 lema įrodo, jog

$$X_N \xrightarrow[N \to \infty]{\mathcal{D}} P. \tag{2.8}$$

Šis sąryšis yra ekvivalentus mato P_N, kai $N \to \infty$, silpnajam konvergavimui į matą P. Be to, iš (2.8) išplaukia, kad matas P nepriklauso nuo sekos $\{\hat{P}_{n_r}\}$ parinkimo. Todėl iš reliatyvaus kompaktiškumo gauname, kad

$$\hat{X}_n \xrightarrow[r \to \infty]{\mathcal{D}} P.$$

Kitaip tariant, turime, kad $\hat{P}_n$, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į P. Taigi, P_N, kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į $\hat{P}_n$ ribinį matą P.

Iš aibės $\mathbf{L}(\mathbb{P}, \alpha, \pi, h)$ tiesinio nepriklausomumo išplaukia jos dalies

$$\mathbf{L}(\mathbb{P}, \alpha) = \{(\log p : p \in \mathbb{P}), (\log (m + \alpha) : m \in \mathbb{N}_0)\}$$

tiesinis nepriklausomumas. Darbe [7] buvo gauta, kad su transcendenčiuoju α

$$\frac{1}{T} meas\{\tau \in [0, T] : \underline{L}(s + i\tau, \chi, \lambda, \alpha) \in \mathcal{A}\}, \quad \mathcal{A} \in \mathcal{B}(H(D)),$$

kai $T \to \infty$, tai pat silpnai konverguoja į mato $\hat{P}_n$ ribinį matą P ir $P = P_{\underline{L}}$. Parametro α transcendentiškumas yra naudojamas tik aibės $\mathbf{L}(\mathbb{P}, \alpha)$ tiesiniam nepriklausomumui gauti. Todėl iš šių pastabų išplaukia, kad P_N, kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į matą $P_{\underline{L}}$.

Dar yra reikalinga mato $P_{\underline{L}}$ atrama. Tarkime, kad S yra separabilioji metrinė erdvė (joje yra skaiti ir visur tiršta aibė), o P yra tikimybinis matas erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$. Primename, kad mato P atrama yra vadinama tokia minimali uždara aibė S_P, kad $P(S_P) = 1$. Aibė S_P yra sudaryta iš tų elementų $x \in S$, kurių kiekvienai atskirąjai aplinkai G yra teisinga nelygybė $P(G) > 1$.

Tegul

$$V = \{g \in H(D) : g(s) \neq 0 \quad \text{arba} \quad g(s) \equiv 0\}.$$

2.5 lema. *Tarkime, kai aibė* $\mathbf{L}(\mathbb{P}, \alpha)$ *yra tiesiškai nepriklausoma virš* $\mathbb{Q}$*, tuomet mato* $P_{\underline{L}}$ *atrama yra aibė* $V \times H(D)$.

Įrodymas. Lema yra [7] darbo 9 lemos atskiras atvejis, kai $l = 1$ ir $r = 1$.

3. Universalumo teoremos įrodymas

Primename Mergeliano teorema, apie analizinių funkcijų aproksimavimą polinomais, kuri visada yra naudojama įrodinėjant universalumo teoremas dzeta ir L funkcijoms[9].

3.1 lema. *Tarkime, kad K yra kompaktinė aibė kompleksinėje plokštumoje, turinti jungųjį papildinį, o funkcija $f(s)$ yra tolydi aibėje $\mathcal{K}$ ir analizinė aibės K viduje. Tuomet kiekvieną $\epsilon > 0$ atitinka toks polinomas $p(s)$, kad*

$$\sup_{s\in K}|f(s) - p(s)| < \epsilon.$$

.

Dabar formuluojame pagrindinę magistro darbo teoremą.

Primename, kad

$$\mathbf{L}(\mathbb{P}, \alpha, \pi, h) = \Big\{(\log p : p \in \mathbb{P}), (\log(m+\alpha) : m \in \mathbb{N}_0), \frac{\pi}{h}\Big\}.$$

3.2 teorema. *Tarkime, kad aibė $\boldsymbol{L}(\mathbb{P}, \alpha, \pi, h)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių kūno, o $0 < \lambda \leq 1$. Tegul $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$, o $f_1(s) \in H_0(K_1)$ ir $f_2(s) \in H(K_2)$. Tuomet su kiekvienu $\epsilon > 0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1}\#\Big\{0 \leq k \leq N : \sup_{s\in K_1}|L(s+ikh, \chi) - f_1(s)| < \epsilon,$$
$$\sup_{s\in K_2}|L(\lambda, \alpha, s+ikh) - f_2(s)| < \epsilon\Big\} > 0.$$

.

Įrodymas. Iš 3.1 lemos išplaukia tokių polinomų $p(s)$ ir $q(s)$ egzistavimas, kad

$$\sup_{s\in K_1}|f_1(s) - e^{p(s)}| < \frac{\epsilon}{2} \tag{3.1}$$

ir

$$\sup_{s\in K_2}|f_2(s) - q(s)| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.2}$$

Apibrėžiame aibę

$$G = \Big\{(g_1, g_2) \in H^2(D) : \sup_{s \in K_1} |g_1(s) - e^{p(s)}| < \frac{\epsilon}{2},$$
$$\sup_{s \in K_2} |g_2(s) - q(s)| < \frac{\epsilon}{2}\Big\}.$$

Tuomet G yra elemento $\Big(e^{p(s)}, q(s)\Big)$, kuris pagal 2.5 lemą yra mato $P_{\underline{L}}$ atramos elementas, atviroji aplinka. Todėl ir atramos savybių turime, kad

$$P_{\underline{L}}(G) > 0. \tag{3.3}$$

Iš 2.4 teoremos ir 1.1 lemos išplaukia, kad

$$\liminf_{N \to \infty} P_N(G) \geq P_{\underline{L}}(G).$$

Iš čia, (3.3) nelygybės, aibės G ir mato P_N apibrėžimų gauname nelygybę

$$\liminf_{N \to \infty} \frac{1}{N+1} \# \Big\{0 \leq k \leq N : \sup_{s \in K_1} |L(s + ikh, \chi) - e^{p(s)}| < \frac{\epsilon}{2},$$
$$\sup_{s \in K_2} |L(\lambda, \alpha, s + ikh) - q(s)| < \frac{\epsilon}{2}\Big\} > 0. \tag{3.4}$$

Iš (3.1) (3.2) nelygybių randame, kad jei k tenkina nelygybes

$$\sup_{s \in K_1} |L(s + ikh, \chi) - e^{p(s)}| < \frac{\epsilon}{2}$$

ir

$$\sup_{s \in K_2} |L(\lambda, \alpha, s + ikh) - q(s)| < \frac{\epsilon}{2},$$

tai k tenkina ir nelygybes

$$\sup_{s \in K_1} |L(s + ikh, \chi) - f_1(s)| \leq \sup_{s \in K_1} |L(s + ikh, \chi) - e^{p(s)}| + \sup_{s \in K_1} |f_1(s) - e^{p(s)}| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

ir

$$\sup_{s \in K_2} |L(\lambda, \alpha, s + ikh) - f_2(s)| \leq \sup_{s \in K_2} |L(\lambda, \alpha, s + ikh) - q(s)| + \sup_{s \in K_2} |f_2(s) - q(s)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Taigi,

$$\Big\{0 \leq k \leq N : \sup_{s \in K_1} |L(s + ikh, \chi) - e^{p(s)}| < \frac{\epsilon}{2},$$
$$\sup_{s \in K_2} |L(\lambda, \alpha, s + ikh) - q(s)| < \frac{\epsilon}{2}\Big\} \subset$$
$$\Big\{0 \leq k \leq N : \sup_{s \in K_1} |L(s + ikh, \chi) - f_1(s)| < \epsilon,$$
$$\sup_{s \in K_2} |L(\lambda, \alpha, s + ikh) - f_2(s)| < \epsilon\Big\}.$$

Iš čia ir (3.4) nelygybės gauname teoremos tvirtinimą.

A discrete joint universality theorem for a Dirichlet L-function and a Lerch zeta-function

Laura Laukytė

Summary

Let $s = \sigma + it$ be a complex variable, $\lambda \in \mathbb{R}$ and $0 < \alpha \leq 1$ be fixed parameters. A Dirichlet L function $L(s, \chi)$ with a Dirichlet character χ is defined, for $\sigma > 1$, by the series

$$L(s, \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s},$$

and is is meromorphically continuable over the whole complex plane. The Lerch zeta-function $L(\lambda, \alpha, s)$ is defined, for $\sigma > 1$, by the series

$$L(\lambda, \alpha, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda m}}{(m+\alpha)^s},$$

and is meromorphically continued to the whole complex flame.

Let $D = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$. Denote by $\mathcal{K}$ the class of compact subsets of the strip D with connected complements, by $H(K), \quad K \in \mathcal{K}$, the class of continuous functions on K which are analytic in the interior of K, and by $H_0(K)$ the subclass of $H(K)$ of non-vanishing functions on K. Moreover, let

$$\mathbf{L}(\mathbb{P}, \alpha, \pi, h) = \Big\{(\log p : p \in \mathbb{P}), (\log{(m+\alpha)} : m \in \mathbb{N}_0), \frac{\pi}{h}\Big\}$$

with $h > 0$, and the set of prime members $\mathbb{P}$. Then in the master work we prove the following theorem.

Theorem. *Suppose that the set $\boldsymbol{L}(\mathbb{P}, \alpha, \pi, h)$ is linearly independent over the field of rational numbers. Let $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ and $f_1(s) \in H_0(K_1)$, $f_2(s) \in H(K_2)$. Then,*

for every $\epsilon > 0$,

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \Big\{ 0 \le k \le N : \sup_{s\in K_1} |L(s+ikh,\chi) - f_1(s)| < \epsilon, \\ \sup_{s\in K_2} |L(\lambda,\alpha,s+ikh) - f_2(s)| < \epsilon \Big\} > 0.$$

Literatūra

[1] B. Bagchi, The statistical behaviour and universality properties of the Riemann zeta-function and other allied Dirichlet series, Ph. D. Thesis, Indian Statistical Institute, Calcutta, 1981.

[2] P. Billingsley, Convergence of Probability Measures, Wiley, New York, 1968.

[3] J.B. Conway, Functions of One Complex Variable, Springer, Berlin, 1978.

[4] H. Heyer, Probability Measures on Locally Compact Groups, Springer, Berlin, 1977.

[5] A. Laurinčikas, Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function, Kluwer, Dordrecht, 1996.

[6] A. Laurinčikas, R. Garunkštis, The Lerch Zeta-Function, Kluwer, Dordrecht, 2002.

[7] A. Laurinčikas, R. Macaitienė, The joint universality of Dirichlet L-functions and Lerch zeta-functions, Siberian Math J. **55**, No. 4 (2014), 645–657.

[8] A. Laurinčikas, R. Macaitienė, The discrete universality of the periodic Hurwitz zeta-function, Integral Transforms Spec. Funct. 20(9-10), (2009), 673-686.

[9] S.N. Mergelyan, Uniform approximation of functions of a complex variable, Uspekhi Mat. Nauk, 7:2(48) (1952), 31–122. (rusų k.)

[10] V. Paulauskas, A. Rackauskas, Funkcinė analizė, I knyga. Erdvės, „Vaistu žinios“, Vilnius, 2007.

[11] K. Prachar, Razpredelenie Prostykh Chisel, Mir, Moskva, 1967.

[12] A. Reich, Werteverteilung von Zetafunktionen, Arch. Math. 34 (1980), 440-451.

[13] S.M. Voronin, Theorem on the "universality" of the Riemann zeta-function, Math. USSR Izv. 9, No. 3 (1975), 443-453.