VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
TIKIMYBIŲ TEORIJOS IR SKAIČIŲ TEORIJOS KATEDRA

Juozas Petkelis

Įsipareigojimų nevykdymo tikimybė

Probability of default

Magistro baigiamasis darbas

Leidžiu ginti ....
Darbo vadovas dr. Andrius Grigutis

VILNIUS 2017

Turinys

1 Įvadas

1.1 Temos aktualumas

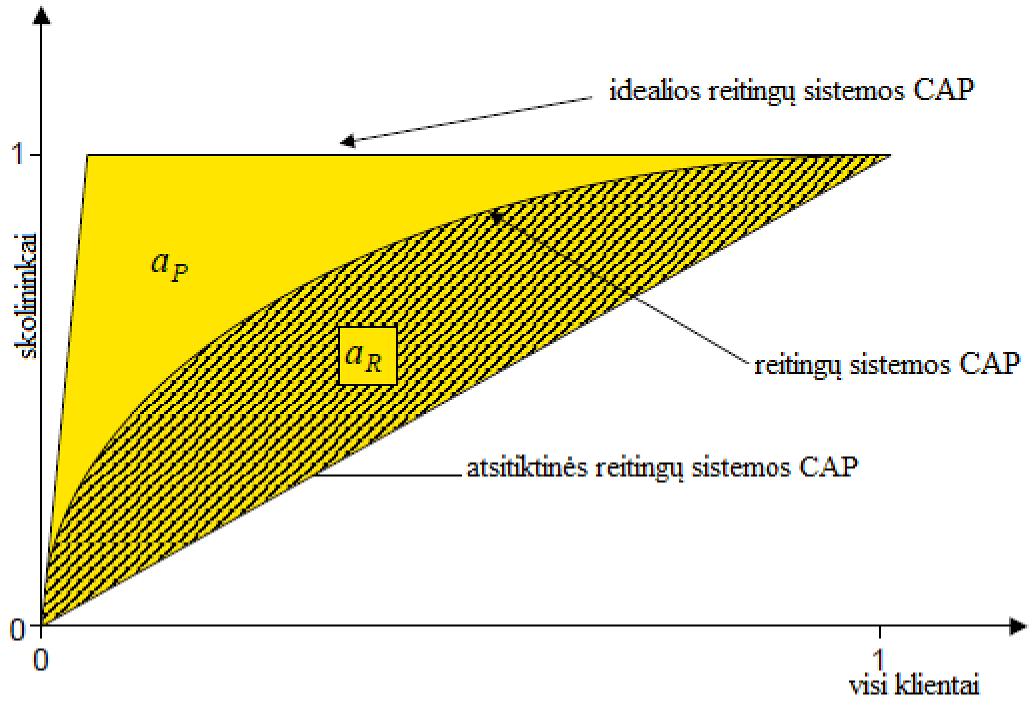
Kiekvienos komercinės įmonės vienas iš pagrindinių tikslų yra kurti pridėtinę vertę savo akcininkams. Siekiant šio tikslo, turi būti kaip galima veiksmingiau valdomi turimi ištekliai ir kylanti rizika. Viena reikšmingiausių yra kredito rizika. Kredito rizikos valdymas komerciniuose bankuose yra plačiai tyrinėta bei seniai taikoma tema. Tačiau kredito rizikos valdymas nefinansinio verslo įmonėse yra nauja ir menkai tyrinėta. Efektyvesnis kredito rizikos valdymas leistų sumažinti dėl pirkėjų nemokumo atsirandančius finansinius nuostolius, o kartu ir įmonės bankroto tikimybę. Yra skiriamos dvi kredito formos – piniginis ir prekinis kreditas. Pagrindinė piniginio kredito rūšis – banko kreditas. Prekinis kreditas - tai kreditas, kurį pirkėjui suteikia prekių ar paslaugų pardavėjas, atidėdamas mokėjimo terminą. Kredito rizika atsiranda visais atvejais, kai verslo proceso metu viena iš šalių pristato prekes, suteikia paslaugas ar atlieka darbus prieš gaudama už tai atlyginimą iš kitos sandorio šalies.

1.2 Reitingavimo sistema

Skolininkų rizikai vertinti rekomenduojama taikyti ekspertinius vertinimus ir kiekybinius, statistiniais metodais pagrįstus rizikos vertinimo modelius. Klientų vertinimui siūloma taikyti klientų reitingavimo sistemą, t.y. kiekvienam klientui priskirti kredito reitingą. Kredito reitingas nusako gebėjimą įvykdyti įsipareigojimus, t.y. rodo nemokumo tikimybę. Tai padeda priimti sprendimą įmonei, ar suteikti prekinį kreditą. Taip pat, yra būtina nuolat vertinti reitingavimo sistemos patikimumą. Vienas iš būdų yra skaičiuoti tikslumo santykį (angl. *accuracy ratio*).

1.3 Tikslumo santykis ir kaupiamojo tikslumo kreivė

Tarkime, kad turime reitingavimo modelį, kuris kiekvienam klientui priskiria kredito balą. Aukštas kredito balas dažniausiai yra mažas įsipareigojimų nevykdymo tikimybės rodiklis. Idealiu atveju visi skolininkai turės žemiausią balą, tačiau praktikoje dažniausiai yra kiek kitaip. Norėdami įvertinti modelio patikimumą ieškosime įmonės turimo reitingavimo modelio bei idealaus modelio kaupiamojo tikslumo kreivių (angl.*cumulative accuracy profile curve*, toliau – CAP kreivė) santykį. CAP kreivė – kreivė parodanti įsipareigojimų neįvykdžiusių skolininkų kaupiamosios procentinės dalies ir visų skolininkų kaupiamosios procentinės dalies ryšį.



Naudodama CAP kreives, įmonė gali įvertinti tikslumo santykį (AR), t.y. įvertinti ploto tarp diagonalės ir reitingų sistemos CAP kreivės ir ploto tarp diagonalės ir idealios reitingų sistemos CAP kreivės santykį. Tikslumo santykio reikšmių intervalas yra [0,1], didesnis tikslumo santykis yra stipresnės diskriminacinės galios indikatorius.

$$AR = \frac{a_R}{a_P}$$

Modelis laikomas patikimu, kai $AR > 0,5$.

1.4 Įsipareigojimų nevykdymo tikimybė

Suteikusi kreditą įmonė prisiima kredito riziką - galimybę patirti nuostolį, t.y. neatgauti paskolintų lėšų. Prekinio kredito atveju, rizika yra dažniausiai didesnė, nes nėra taikomos kredito užtikrinimo priemonės (užstatas). Iš anksto negalima pasakyti, ar įmonė tokį nuostolį tikrai patirs. Galimybė patirti nuostolį įvertinama kaip įsipareigojimų nevykdymo tikimybė (PD). Jeigu skolininkas neįvykdo įsipareigojimų, ji yra lygi 1, o jeigu juos įvykdo – 0. Visais kitais atvejais (skolininkui vykdant įsipareigojimus, bet dar nepasibaigus įsipareigojimų įvykdymo terminui) įsipareigojimų nevykdymo tikimybė yra tarp 0 ir 1. Įsivertinus galimybę patirti nuostolį, įmonė galės įvertinti tikėtiną nuostolį.

2 Įsipareigojimų nevykdymo tikimybės įvertinimas

Kredito rizikos valdytojui yra būtina vertinti skolininkų kreditingumą. Šie įvertinimai yra išreiškiami įsipareigojimų nevykdymo tikimybe. Į šį įverti rekomenduojama įtraukti tam tikrą lygį konservatyvumo. Jei pasirinktas modelis įvertina, kad tikroji PD yra intervale $[0, p_1]$, tada pačiam konservatyviausiam rizikos valdytojui PD=p_1, o per pus mažiau konservatyviam PD=$\frac{p_1}{2}$.

Panagrinėsime tinkamiausio (saugiausio) įvertinimo principą, t.y vertinsime PD pagal viršutines pasikliovimo ribas, tuo pačiu užtikrinant PD išskirstymą pagal reitingo balus. Panagrinėkime keletą skirtingų atvejų.

2.1 Nesusiję klientai, nėra įsipareigojimų nevykdymų

Tarkime visi įmonės klientai yra pasiskirstę į N reitingo grupių A_1, A_2,..., A_N, su atitinkamais dažniais n_{A_1}, n_{A_2},..., n_{A_N}. Geriausią kreditingumą pažymėkime A_1, atitinkamai blogiausią - A_N. Tarkim, kad istoriškai nei vienoj iš šių grupių nebuvo pastebėta įsipareigojimų nevykdymų, tačiau vis tiek norime įsivertinti nevykdymo tikimybes p_{A_1}, p_{A_2},..., p_{A_N}. Patikimos reitingavimo sistemos atveju galioja tokios nelygybės

$$p_{A_1} \leqslant p_{A_2} \leqslant ... \leqslant p_{A_N}. \tag{1}$$

Iš (1) nelygybių seka, kad p_{A_1} negali būti didesnė, nei p_{A_N}. Konservatyviausio įvertinimo principo atveju, p_{A_1} įvertis gaunamas, darant prielaidą jog p_{A_1}=p_{A_N}. Iš to išplaukia, kad p_{A_1}=p_{A_2}=...=p_{A_N}. Po šios prielaidos, modelyje yra pasirenkamas pasikliovimo lygmuo γ. Remiantis juo gaunamas pasikliovimo intervalas $[0, \widehat{p_{A_1}}]$. Tai reiškia, jog $p_{A_1} \in [0, \widehat{p_{A_1}}]$ su tikimybe γ. Jei γ artinsime prie 1, tai pasikliovimo intervalo ilgis taip pat artės prie 1, nes p_{A_1} priklauso intervalui $[0, 1]$ su tikimybe 1.

Šiuo atveju pasikliovimo intervalą apibrėžiame, kaip visų galimų tikimybių p_{A_1} aibe, tenkinančių sąlygą, kad tikimybė nepatirti įsipareigojimų nevykdymų yra ne didesnė nei $1 - \gamma$.

Jei p_{A_1}=p_{A_2}=...=p_{A_N}, tai reitingo grupės A_1, A_2,..., A_N nesiskiria savo rizikingumu. Tai leidžia elgtis su klientu baze, kaip su viena aibe $n_{A_1} + n_{A_2} + ... + n_{A_N}$. Padarius prielaidą, jog klientai yra nesusiję tarpusayje, iš to išplaukia, kad įsipareigojimų nevykdymai yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai. Tada tikimybė, kad nebus įsipareigojimų nevykdymų lygi $(1 - p_{A_1})^{n_{A_1}+n_{A_2}+...+n_{A_N}}$. Iš čia išplaukia, kad

$$1 - \gamma \leqslant (1 - p_{A_1})^{n_{A_1}+n_{A_2}+...+n_{A_N}} \tag{2}$$

Iš (2) seka

$$p_{A_1} \leqslant 1 - (1 - \gamma)^{1/n_{A_1}+n_{A_2}+...+n_{A_N}} \tag{3}$$

Toliau iš (1) nelygybės seka, kad p_{A_2} negali būti didesnė, nei p_{A_N}. Konservatyviausio įvertinimo principo atveju, p_{A_2} įvertis gaunamas darant prielaidą, jog $p_{A_2} = p_{A_N}$. Jei p_{A_2}=...=p_{A_N}, tai reitingo grupės A_2,..., A_N nesiskiria savo rizikingumu. Vėl padarius prielaidą, jog įsipareigojimų nevykdymai yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, tikimybė, kad nebus įsipareigojimų nevykdymų lygi $(1 - p_{A_2})^{n_{A_2}+..+n_{A_N}}$. Iš čia išplaukia, kad

$$1-\gamma \leqslant (1-p_{A_2})^{n_{A_2}+...+n_{A_N}} \tag{4}$$
$$\Downarrow$$
$$p_{A_2} \leqslant 1-(1-\gamma)^{1/n_{A_2}+...+n_{A_N}} \tag{5}$$

Atitinkamai,

$$1-\gamma \leqslant (1-p_{A_N})^{1/n_{A_N}} \text{ ir } p_{A_N} \leqslant 1-(1-\gamma)^{1/n_{A_N}}.$$

2.2 Nesusiję klientai, keletas įsipareigojimų nevykdymų

Vėl tariame, kad klientai yra nesusiję ir pasiskirstę į N reitingo grupių A_1, A_2,..., A_N, su atitinkamais dažniais n_{A_1}, n_{A_2},..., n_{A_N}. Tik šį kartą tariame, jog per praėjusį laikotarpį buvo pastebėti k_1 įsipareigojimų nevykdymai A_1 grupėje, k_2 - A_2, ..., k_N - A_N. Pasikliovimo intervalą tikimybei p_{A_1} apibrėžiame padarę prielaidą, kad visų reitingo grupių PD yra lygios. Įsipareigojimų nevykdymas yra Bernulio atsitiktinis dydis, t.y. klientas nevykdo įsipareigojimų su tikimybe p_{A_1} arba juos vykdo su tikimybe $1-p_{A_1}$. Iš to išplaukia, kad įsipareigojimų nevykdymai yra pasiskirstę binomiškai. Tai tikimybė nepatirti daugiau nei $k_1+...+k_N$ įsipareigojimų nevykdymus yra

$$\sum_{i=0}^{k_1+...+k_N} \binom{n_{A_1}+n_{A_2}+...+n_{A_N}}{i} {p_{A_1}}^i (1-p_{A_1})^{n_{A_1}+n_{A_2}+...+n_{A_N}-i} \tag{6}$$

Iš 6 išplaukia, kad įsipareigojimų nevykdymo tikimybės pasikliovimo intervalas su pasikliovimo lygmeniu γ, yra aibė p_{A_1} tenkinančių nelygybę

$$1-\gamma \leqslant \sum_{i=0}^{k_1+...+k_N} \binom{n_{A_1}+n_{A_2}+...+n_{A_N}}{i} {p_{A_1}}^i (1-p_{A_1})^{n_{A_1}+n_{A_2}+...+n_{A_N}-i} \tag{7}$$

Atitinkamai įvertiname ir kitų reitingo grupių PD

$$1-\gamma \leqslant \sum_{i=0}^{k2+...+k_N} \binom{n_{A_2}+...+n_{A_N}}{i} {p_{A_2}}^i (1-p_{A_2})^{n_{A_2}+...+n_{A_N}-i} \tag{8}$$

$$1-\gamma \leqslant \sum_{i=0}^{k_N} \binom{n_{A_N}}{i} {p_{A_N}}^i (1-p_{A_N})^{n_{A_N}-i} \tag{9}$$

Nesunku yra parodyti binominio ir beta skirstinio, su teigiamais sveikaisiais parametrais, sąryšį. Todėl nelygybės (7), (8),(9) gali būti išspręstos analitiškai.

Apibrėžimas. *Beta funkcija $B(a,b)$ yra apibrėžiama taip:*

$$B(a,b)=\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}du \quad a>0, b>0.$$

Apibrėžimas. *Beta pasiskirstymo funkcija:*

$$F_{a,b}(x) = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^x t^{j-1}(1-t)^{k-1}dt, \quad x \in (0,1)$$

Teiginys. *Tegul $F_{a,b}(x)$ yra beta pasiskirstymo funkcija su parametrais $a \in (0,\infty)$ ir $b \in (0,\infty)$. O $G_{n,p}$ apibrėžkime kaip binominio pasiskirstymo funkciją su bandymų parametru $n \in \mathbb{N}^+$ ir sėkmės parametru $p \in (0,1)$. Jei $j \in \mathbb{N}^+$, $k \in \mathbb{N}^+$ ir $x \in (0,1)$, tada*

$$F_{j,k}(x) = G_{j+k-1,1-x}(k-1)$$

Įrodymas.

Pagal apibrėžimą pasiskirstymo funkcija $F_{j,k}(x)$ lygi:

$$F_{j,k}(x) = \frac{1}{B(j,k)} \int_0^x t^{j-1}(1-t)^{k-1}dt$$

Pažymėkime $u := (1-t)^{k-1}$ ir $dv := t^{j-1}dt \Rightarrow du = -(k-1)(1-t)^{k-2}dt$ ir $v = t^j/j$. Integruodami $F_{j,k}(x)$ dalimis gauname:

$$F_{j,k}(x) = \frac{1}{jB(j,k)}(1-x)^{k-1}x^j + \frac{k-1}{jB(j,k)} \int_0^x t^j(1-t)^{k-2}dt$$

Beta funkciją galima užrašyti

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \quad \text{čia} \quad \Gamma(k) = \int_0^\infty x^{k-1}e^{-x}dx, \quad k \in (0,\infty)$$

Jei $j \in \mathbb{N}_+$, $k \in \mathbb{N}_+$, o $\Gamma(n) = (n-1)!$, tai $B(j,k) = \frac{(j-1)!(k-1)!}{(j+k-1)!}$.

Taigi $\frac{1}{jB(j,k)} = \binom{j+k-1}{k-1}$ ir $\frac{k-1}{jB(j,k)} = \frac{1}{B(j+1,k-1)}$ iš to išplaukia, kad

$$F_{j,k}(x) = \binom{j+k-1}{k-1}(1-x)^{k-1}x^j + F_{j+1,k-1}(x)$$

Jei $a > 0$ ir $b = 1$, tada $F(x) = x^a$, čia $0 < x < 1 \Rightarrow F_{j+k-1,1}(x) = x^{j+k-1}$. Iteruojant paskutinę lygybe ir gauname teiginio įrodymą. ■

Pasinaudodami įrodytu teiginiu, gauname, kad (9) nelygybės atveju, tikimybė, kad įvyks ne daugiau nei l įsipareigojimų nevykdymų lygi:

$$\sum_{i=0}^{l} \binom{n_{A_N}}{i} {p_{A_N}}^i (1-p_{A_N})^{n_{A_N}-i} = P[X \leqslant k] = 1 - P[Y \leqslant p] = \frac{\int_p^1 t^l(1-t)^{n_{A_N}-l-1}dt}{\int_0^1 t^l(1-t)^{n_{A_N}-l-1}dt} \tag{10}$$

su parametrais $\alpha = l+1$ ir $\beta = n-l$. Beta pasiskirstymo ir jos atvirkštinės funkcijos yra prieinamos daugumoje skaičiavimų paketų, pvz. Excel.

Jei įmonė turi didelį kiekį klientų su vienodu rizikingumu, bei mažai įsipareigojimų nevykdymų, t.y. įsipareigojimų nevykdymo tikimybė artima nuliui, tai binominį

skirstinį galime aproksimuoti Puasono skirstiniu.
Teiginys.

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \tag{11}$$

,kai $\lambda = np$, $n \to \infty$, $p \to 0$.
Įrodymas.

$$P[X = k] = \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{n^k}\frac{\lambda^k}{k!}\frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^k}$$

,kai $n \to \infty$, $p \to 0$. Tada

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{n^k} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k = 1$$

$$\Downarrow$$

$$P[X = k] \approx e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$\blacksquare$

Deja praktikoje retai kada galime tikėtis, jog klientai yra nesusiję ir įsipareigojimų nevykdymai yra nepriklausomi. Todėl pereisime prie labiau realistiško atvejo, kur modeliuosime koreliuojančius įsipareigojimų nevykdymus bei vertinsime įsipareigojimų nevykdymo tikimybę.

3 Susiję klientai

Apibrėžimas. *Atsitiktinių dydžių vektorius* $\boldsymbol{L} = (L_1, ..., L_m)$ *vadinamas (Bernulio) nuostolių statistika, jei visi ribiniai* $\boldsymbol{L}$ *skirstiniai yra binominiai:*

$$L_i \sim B(1; p_i).$$

Tai $\mathbf{L}$ nuostolis gali būti apibrėžiamas, kaip

$$L = \sum_{i=1}^{m} L_i.$$

Tada tikimybės $p_i = P[L_i = 1]$ yra vadinamos $\mathbf{L}$ įsipareigojimų nevykdymo tikimybėmis.

Visi įmonės suteikti kreditai sukuria du galimus ateities scenarijus, arba klientas vykdys įsipareigojimus arba ne, i-tojo skolininko nevykdymo atveju $L_i = 1$. Visus suteiktus kreditus vadinsime portfeliu, o atskirą kliento kreditą - sandoriu.

3.1 Bendrasis Bernulio modelis

Tegul stebime portfelio nuostolį iš nuostolių statistikos $\mathbf{L} = (L_1, ..., L_m)$, čia $L_i \sim B(1; P_i)$. Ir tegul nevykdymo tikimybė yra atsitiktinis dydis $\mathbf{P} = (P_1, ..., P_m) \sim \mathbf{F}$ pasiskirstęs pagal pasiskirstymo funkciją $\mathbf{F}$, kuri įgyja reikšmes iš aibės $[0, 1]^m$. Papildomai pareikalaukime sąlyginės nevykdymų nepriklausomybės, t.y.

$$L_i|_{P_i=p_i} \sim B(1; p_i), \qquad (L_i|_{\mathbf{P}=\mathbf{p}})_{i=1,...,m} \quad \text{nepriklausomi.}$$

Tada daugiamatė L_i pasiskirstymo funkcija yra:

$$\mathbb{P}[L_1 = l_1, ..., L_m = l_m] = \int_{[0,1]^m} \prod_{i=1}^{m} p_i^{l_i} (1 - p_i)^{1-l_i} d\mathbf{F}(p_1, ..., p_m), \tag{12}$$

kai $l_i \in \{0, 1\}$. Pirmieji ir antrieji L_i momentai yra

$$\mathbb{E}[L_i] = \mathbb{E}[P_i], \qquad \mathbb{V}[L_i] = \mathbb{E}[P_i](1 - \mathbb{E}[P_i]) \quad (i = 1, ..., m).$$

Pirmoji lygybė išplaukia iš (12). O antroji iš pilnosios dispersijos formulės :

$$\mathbb{V}[L_i] = \mathbb{V}[\mathbb{E}[L_i|\mathbf{P}]] + \mathbb{E}[\mathbb{V}[L_i|\mathbf{P}]]$$

$$= \mathbb{V}[P_i] + \mathbb{E}[P_i(1 - P_i)] = \mathbb{E}[P_i](1 - \mathbb{E}[P_i])$$

Tada kovariacija tarp dviejų įsipareigojimų nevykdymų lygi:

$$Cov[L_i, L_j] = \mathbb{E}[L_i L_j] - \mathbb{E}[L_i]\mathbb{E}[L_j] = Cov[P_i, P_j].$$

Todėl koreliacija tarp įsipareigojimų nevykdymų yra

$$Corr[L_i, L_j] = \frac{Cov[P_i, P_j]}{\sqrt{\mathbb{E}[P_i]](1 - \mathbb{E}[P_i])}\sqrt{\mathbb{E}[P_j](1 - \mathbb{E}[P_j])}}$$

Ši lygtis parodo, kad priklausomumas tarp nuostolių yra pilnai nusakomas atsitiktinio vektoriaus **P**, kurio pasiskirstymo funkcija **F**, kovariacijos matricos.

3.2 Tolygi įsipareigojimų nevykdymo tikimybė

Portfeliams kurių visi sandoriai panašūs dydžiu ir rizika, yra prasminga įsipareigojimų nevykdymo tikimybę ir koreliaciją laikyti vienodomis.

Tarkim, kad įsipareigojimų nevykdymai yra atsitiktiniai dydžiai $L_i \sim B(1; P)$ su atsitiktine nevykdymo tikimybe $P \sim F$. Čia F yra pasiskirstymo funkcija, kuri įgyja reikšmes iš aibės [0,1].
Tada daugiamatė L_i pasiskirstymo funkcija yra:

$$\mathbb{P}[L_1 = l_1, ..., L_m = l_m] = \int_0^1 p^k (1-p)^{m-k} dF(p), \tag{13}$$

$$\text{kai} \quad k = \sum_{i=1}^{m} l_i \quad \text{ir} \quad l_i \in \{0, 1\}.$$

Tikimybė, kad įvyks k įsipareigojimų nevykdymų, yra

$$\mathbb{P}[L = k] = \binom{m}{k} \int_0^1 p^k (1-p)^{m-k} dF(p). \tag{14}$$

Tai viso portfelio įsipareigojimų nevykdymo tikimybė lygi

$$\bar{p} = \mathbb{P}[L_i = 1] = \mathbb{E}[L_i] = \int_0^1 p dF(p)$$

ir įsipareigojimų nevykdymo koreliacija tarp dviejų sandorių yra

$$\rho = Corr[L_i, L_j] = \frac{\mathbb{P}[L_i = 1, L_j = 1] - \bar{p}^2}{\bar{p}(1 - \bar{p})} =$$

$$\frac{\int_0^1 p^2 dF(p) - \bar{p}^2}{\bar{p}(1 - \bar{p})}.$$

3.3 Susiję klientai, nėra įsipareigojimų nevykdymų

Tarkime, kad stebime kliento vertę (turtą) ir jei jo vertė nukrenta žemiau nustatytos ribos, mes tariame, jog jis neįvykdys įsipareigojimų.

Tarkime, kad turime m sandorių, jų vertę laiko intervale $t = [0, T]$ pažymėkime $A_t^{(i)}$. Laikysime, kad kiekvienam klientui i yra kritinis slenkstis C_i, toks kad, klientas nevykdys įsipareigojimų laiko intervale $[0, T]$ tada ir tik tada, jei $A_t^{(i)} < C_i$. Tai reiškia, kad

$$L_i = \mathbb{1}_{A_t^{(i)} < C_i} \sim B(1; \mathbb{P}[A_t^{(i)} < C_i]) \tag{15}$$

Kliento vertė yra priklausoma nuo įvairių veiksnių, atspindinčių pramonės, regionines bei kitas įtakas. Šių atskirų veiksnių sumą laikysime pagrindiniu veiksniu. Standartizuotą logaritminę vertės grąžą $log(A_T^{(i)}/A_0^{(i)})$ laikysime

$$r_i = R_i\Phi_i + \epsilon_i \quad (i = 1, ..., m). \tag{16}$$

Čia r_i tiesinė regresija, Φ_i pagrindiniai veiksniai, o ϵ_i liekanos. Dažniausiai yra priimta laikyti, kad logaritminės vertės grąžos yra pasiskirsčiusios pagal normalųjį skirstinį, tokios, kad dėl standartizavimo turime

$$r_i \sim N(0,1), \quad \Phi_i \sim N(0,1), \quad ir \quad \epsilon_i \sim N(0, 1 - R_i^2).$$

Dabar galime perrašyti (17) taip:

$$L_i = 1_{r_i < c_i} \sim B(1; \mathbb{P}[r_i < c_i]) \quad (i = 1, ..., m). \tag{17}$$

Čia c_i yra atitinkamai slenkstis C_i, po pakeitimo $A_t^{(i)}$ į r_i. Tada sąlyga $r_i < c_i$, gali būti perrašyta taip:

$$\epsilon_i < c_i - R_i\Phi_i \quad (i = 1, ..., m).$$

Jei laiko momentas $T = 1$, tai gauname, kad i-tojo kliento nemokumo tikimybė lygi $p_i = \mathbb{P}[r_i < c_i]$. Kadangi $r_i \sim N(0,1)$, tai

$$c_i = N^{-1}[p_i] \quad (i = 1, ..., m),$$

čia $N[x]$ yra standartinio normaliojo atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija. Standartizavę liekanas gauname, kad

$$\tilde{\epsilon_i} < \frac{N^{-1}[p_i] - R_i\Phi_i}{\sqrt{1 - R_i^2}} \quad \tilde{\epsilon_i} \sim N(0,1) \tag{18}$$

Iš čia gauname, kad i-tojo kliento įsipareigojimų nevykdymo tikimybė, su Φ_i veiksnių sąlyga, lygi

$$p_i(\Phi_i) = N\Big[\frac{N^{-1}[p_i] - R_i\Phi_i}{\sqrt{1 - R_i^2}}\Big] \quad (i = 1, ..., m) \tag{19}$$

Vienintelė šios lygties atsitiktinė dalis yra Φ_i. Jei $\Phi_i = z$, tai

$$p_i(z) = N\Big[\frac{N^{-1}[p_i] - R_i z}{\sqrt{1 - R_i^2}}\Big] \quad (i = 1, ..., m) \tag{20}$$

Jeigu tariame, kad koreliacija tarp sandorių yra tolygi, tai reiškia, kad turime vienintelį bendrą veiksnį, kuris įtakoja sandorius. Dažniausiai jis yra žymimas $Y \sim N(0,1)$. Tai vietoj (16), galime rašyti

$$r_i = \sqrt{\rho}Y + \sqrt{1 - \rho}Z_i \quad (i = 1, ..., m), \tag{21}$$

čia $\sqrt{1 - \rho}Z_i$, $Z_i \sim N(0,1)$ perima liekanos vaidmenį, o ρ tolygi koreliacija. Su vieno veiksnio prielaida ir tolygia koreliacija, lygtis (22) tampa

$$p_i(Y) = N\Big[\frac{N^{-1}[p_i] - \sqrt{\rho}Y}{\sqrt{1 - \rho}}\Big] \quad (i = 1, ..., m) \tag{22}$$

Tarkime vėl, kad visi įmonės klientai yra pasiskirstę į N reitingo grupių A_1, A_2,..., A_N, su atitinkamais dažniais n_{A_1}, n_{A_2},..., n_{A_N} ir nebuvo pastebėta jokių įsipareigojimų nevykdymų. Tada įsipareigojimų nevykdymo tikimybės pasikliovimo intervalas su pasikliovimo lygmeniu γ, yra aibė p_{A_1} tenkinančių nelygybę

$$1-\gamma \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y)\Big(1-N\Big[\frac{N^{-1}[p_{A_1}]-\sqrt{\rho}Y}{\sqrt{1-\rho}}\Big]\Big)^{n_{A_1}+n_{A_2}+\ldots+n_{A_N}} dy \tag{23}$$

čia ϕ ir N atitinkamai standartinio normaliojo tankio ir standartinio normaliojo pasiskirstymo funkcijos. Dešinioji nelygybės pusė nusako vieno stebėjimo periodo tikimybę nepatirti įsipareigojimų nevykdymų su $n_{A_1}+n_{A_2}+\ldots+n_{A_N}$ klientų ir vidutine p_{A_1}.

Nelygybė (23) nėra triviali, todėl panagrinėsime šios lygties asimptotikos gavimą, kurią vėliau naudosime skaičiavimuose.

3.4 Asimptotikos skaičiavimas

3.4.1 Uždavinys

Tarkim, kad a yra fiksuota konstanta ir

$$f_n(b) = E[1-N(aX+b)^n] :$$

čia $X \sim N(0,1)$, o N yra standartinio normalaus skirstinio pasiskirstymo funkcija:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{t^2/2} dt.$$

Akivaizdu, kad kiekviena f_n yra mažėjanti funkcija ir

$$f_n(b) \xrightarrow{b\to-\infty} 1, \quad f_n(b) \xrightarrow{b\to\infty} 0.$$

Tegu $\gamma \in (0,1)$ yra dar vienas fiksuotas skaičius. Tada atsiras toks vienintelis b_n, kad

$$f_n(b_n) = 1-\gamma.$$

Reikia rasti b_n asimptotiką, kai $n \to \infty$. Bei rasti p_n asimptotiką. Čia p_n yra lygties

$$\frac{N^{-1}(p_n)}{\sqrt{1-\rho}} = b_n$$

sprendinys, o $\rho \in (0,1)$- toks skaičius, kad

$$\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}} = a.$$

Kitaip tariant

$$p_n = N\Big(\frac{b_n}{\sqrt{1+a^2}}\Big).$$

3.4.2 Sprendimas

Iš pradžių spręsime paprastesnę lygtį

$$[1 - N(ax + b)]^n = 1 - \gamma;$$

čia x - koks nors fiksuotas skaičius. Jei $b_n(x)$ yra jos sprendinys, tai

$$1 - N(ax + b_n(x)) = (1 - \gamma)^{1/n} = e^{n^{-1}\ln(1-\gamma)} = 1 - \frac{c}{n} + o(n^{-1});$$

čia $c = -\ln(1 - \gamma) > 0$. Taigi

$$N(ax + b_n(x)) = \frac{c}{n} + o(n^{-1})$$

$$b_n(x) = N^{-1}(c/n + o(1/n)) - ax.$$

Pirmiausia ieškosime $y_n = -N^{-1}(c/n + o(1/n))$ sekos asimptotikos. Čia y_n yra lygties

$$N(-y_n) = \frac{c}{n} + o(n^{-1})$$

sprendinys. Aišku, kad $y_n \to \infty$. Be to, iš $N(-y) = 1 - N(y)$ lygybės

$$1 - N(y_n) = \frac{c}{n} + o(n^{-1}).$$

Kai $y \to \infty$, funkcijos $1 - N(y)$ asimptotika gerai žinoma:

$$1 - N(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_y^{\infty} e^{-t^2/2} dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_y^{\infty} t^{-1} de^{-t^2/2}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^{-1} e^{-t^2/2}\Big|_y^{\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_y^{\infty} t^{-2} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-1} e^{-y^2/2}(1 + o(1)).$$

Taigi

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} y_n^{-1} e^{-y_n^2/2}(1 + o(1)) = \frac{c}{n}(1 + o(1));$$

$$y_n^{-1} e^{-y_n^2/2} = \frac{\sqrt{2\pi}c}{n}(1 + o(1));$$

$$-\ln y_n - \frac{y_n^2}{2} = -\ln n + \ln(\sqrt{2\pi}c) + o(1);$$

$$y_n^2 + \ln y_n^2 = 2\ln n - \ln(2\pi c^2) + o(1).$$

Tegu $z = z(u)$ yra lygties

$$z + \ln z = u$$

sprendinys. Aišku, kad $z(u) \xrightarrow{u\to\infty} \infty$ ir todėl

$$\frac{u}{z(u)} = 1 + \frac{\ln z(u)}{z(u)} = 1 + o(1).$$

Be to,

$$z(u) = u - \ln z(u).$$

Iš čia

$$z(u) = u - \ln(u - \ln z(u)) = u - \ln u - \ln(1 - \frac{\ln z(u)}{u}) = u - \ln u + o(1),$$

kai $u \to \infty$. Taigi

$$\begin{aligned} y_n^2 &= 2\ln n - \ln(2\pi c^2) + o(1) - \ln(2\ln n - \ln(2\pi c^2) + o(1)) \\ &= 2\ln n - \ln(2\ln n) - \ln(2\pi c^2) + o(1) \\ &= 2\ln n - \ln\ln n - \ln(4\pi c^2) + o(1). \end{aligned}$$

O tada

$$b_n(x) - \sqrt{2\ln n - \ln\ln n - \ln(4\pi c^2) + o(1)} - ax = -\sqrt{2\ln n} - ax + o(1)$$

Tada ir

$$b_n = -\sqrt{2\ln n} - c + o(1)$$

su kokiu nors $c = -\ln(1-\gamma) \in \mathbb{R}$.

Tegu $b_n(c) = -\sqrt{2\ln n} - c$, pabandykime rasti $[1 - N(ax + b_n(c))]^n$ asimptotiką su fiksuotu x. Aišku, kad

$$1 - N(ax + b_n(c)) = N(\sqrt{2\ln n} + c - ax)$$

ir

$$\begin{aligned} 1 - N(\sqrt{2\ln n} + c - ax) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\ln n} + c - ax} \exp(-(\sqrt{2\ln n} + c - ax)^2/2) \\ &\asymp \frac{1}{\sqrt{\ln n}} \exp(-\ln n - (c - ax)\sqrt{\ln n}) \end{aligned}$$

Jei $c > ax$, tai reiškinys dešinėje pusėje yra $o(n^{-1})$ ir

$$[1 - N(ax - b_n(c))]^n = (1 - o(n^{-1}))^n \to 1.$$

Jei $c < ax$, tai reiškinys dešinėje pusėje asimptotiškai didesnis už $1/n$, nes

$$\frac{e^{\delta\sqrt{\ln n}}}{\sqrt{\ln n}} \to \infty$$

su bet kokiu $\delta > 0$. Reiškia,

$$[1 - N(ax + b_n(c))]^n \to 0, \quad x > c/a \quad ir \quad [1 - N(ax + b_n(c))]^n \to 1, \quad x < c/a.$$

Iš čia išplaukia, kad

$$E[1 - N(aX + b_n(c))]^n \to P(X < c/a).$$

Tegu $z_{1-\gamma}$ yra standartinio normalaus dėsnio $(1-\gamma)$-kvantilis, t.y.

$$P(X < z_{1-\gamma}) = 1 - \gamma.$$

Jei $c' < az_{1-\gamma}$, tai

$$E[1 - N(aX + b_n(c'))]^n \to P(X < c'/a) < 1 - \gamma;$$

todėl, kai n pakankamai didelis,

$$E[1 - N(aX + b_n(c'))]^n < 1 - \gamma$$

ir, reiškia, $b_n(c') > b_n$. Analogiškai įrodoma, kad jei $c'' > az_{1-\gamma}$,tai $b_n(c'') < b_n$ su pakankamai dideliais n. Reiškia,

$$b_n = -\sqrt{2\ln n} - az_{1-\gamma} + o(1).$$

Iš čia išplaukia p_n asimptotika

$$\begin{aligned} p_n &= N\Big(\frac{-\sqrt{2\ln n} - az_{1-\gamma} + o(1)}{\sqrt{1+a^2}}\Big) \\ &= 1 - N\Big(\frac{\sqrt{2\ln n} + az_{1-\gamma} + o(1)}{\sqrt{1+a^2}}\Big) \\ = \frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi}} &\frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{2\ln n} + az_{1-\gamma} + o(1)} \exp\Big(- \frac{(\sqrt{2\ln n} + az_{1-\gamma} + o(1))^2}{2(1+a^2)}\Big) \\ &\asymp \frac{1}{n^{1/(1+a^2)}} \exp\Big(- \frac{\sqrt{2}az_{1-\gamma}}{1+a^2}\sqrt{\ln n}\Big)\frac{1}{\sqrt{\ln n}} \exp(o(\sqrt{\ln n})) = p^*. \end{aligned}$$

Pastaroji lygybė reiškia, kad $c_1|p^*| \leqslant p_n \leqslant c_2|p^*|$, čia c_1 ir c_2 teigiamos konstantos. Šią asimptotiką ir naudosime skaičiuojant įsipareigojimų nevykdymo tikimybę susijusių klientų atveju.

4 Skaičiavimai

4.1 Reitingavimo sistemos modeliavimas

Panagrinėsime vienos telekomunikacijų bendrovės fizinių klientų reitingavimo sistemą bei įsipareigojimų nevykdymo tikimybę. Praktikoje įmonės dėl duomenų trūkumo pačios nedaro kliento pirminio reitingavimo, tai daro atskiros specializuotos įmonės, kurios surenka informaciją iš įvairiausių įmonių apie kliento mokėjimo ypatumus ir priskiria rekomenduotiną kredito balą. Savo ruožtu įmonės turi vidines reitingavimo sistemas, kurios pagal rekomenduotinus balus, bei rizikos valdytojų įžvalgas paskirsto klientus į skirtingas reitingo grupes. Tai padeda sukurti taisykles, pagal kurias žiūrima koks ar kokio dydžio prekinis kreditas yra suteikiamas.

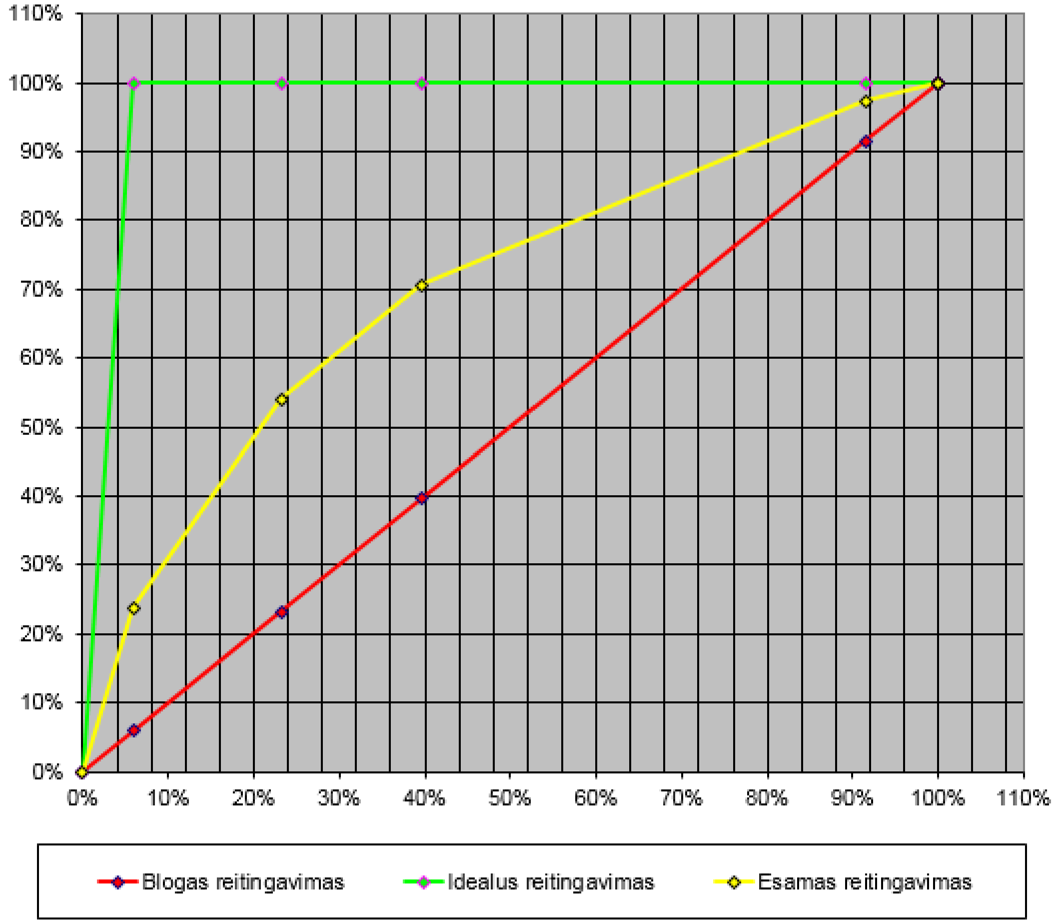
Per metus įmonė sudarė 52461 prekinio kredito sutartis. Kiekvienam klientui buvo priskirtas rekomenduotinas kredito balas $x \in [-200, 200]$. Iš tų visų klientų 633 neįvykdė įsipareigojimų. Įmonė taiko vidinę reitingavimo sistemą, kuri paskirsto klientus į penkias skirtingas grupes, pagal rekomenduotinus balus.

<40	41-80	81-96	97-120	>120
A_5	A_4	A_3	A_2	A_1

Apskaičiuosime esamos sistemos kaupiamojo tikslumo kreives ir tikslumo santykį. Klientai ir įsipareigojimų nevykdymai pasiskirstę taip:

	A_5	A_4	A_3	A_2	A_1
Klientų sk.	3101	9054	8609	27225	4472
Nevykdymų sk.	151	191	105	169	17
Akumuliantai nevykdymų	5,91%	23,17%	39,58%	91,48%	100%
Akumuliantai klientų	23,85%	54,03%	70,62%	97,31%	100%

Idealios reitingavimo sistemos atveju visi įsipareigojimų nevykdymai būtų žemiausios reitingo grupės (E). Taip atrodo kaupiamojo tikslumo kreivės:



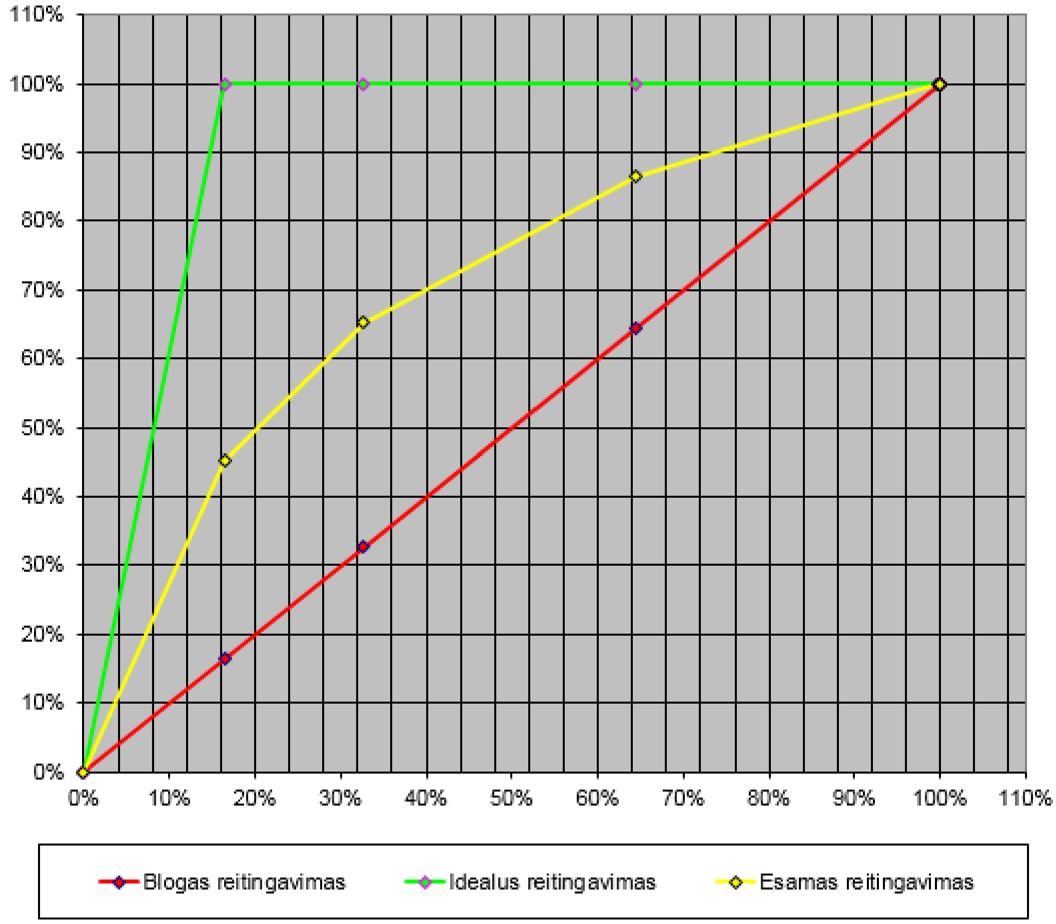
Šios reitingavimo sistemos tikslumo santykis AR=0,4174. Gautas rezultatas parodo, jog ši sistema nėra patikima, tai reiškia, kad daugiau negu pusė portfelio yra nepatikima.

Jei taikoma vidinė reitingavimo sistema būtų tokia:

<70	71-90	91-110	111-135	>135
A_5	A_4	A_3	A_2	A_1

Tai klientai ir įsipareigojimų nevykdymai pasiskirstę taip:

	A_5	A_4	A_3	A_2	A_1
Klientų sk.	8591	8537	16639	18589	105
Nevykdymų sk.	286	127	134	86	0
Akumuliantai nevykdymų	16,38%	32,65%	64,37%	99,80%	100,00%
Akumuliantai klientų	45,18%	65,24%	86,41%	100,00%	100,00%



Štai tokios reitingavimo sistemos tikslumo santykis būtų lygus AR=0,4774. Tokia reitingavimo sistema truputį patikimesnė už buvusią. Jei didesnis reitingo balas lemia didesnį (brangesnį) kredito suteikimą, tai taikant tokią sistemą įmonė patirtų mažesnius nuostolius. Tačiau vis tiek tokios sistemos negalime laikyti patikimos.

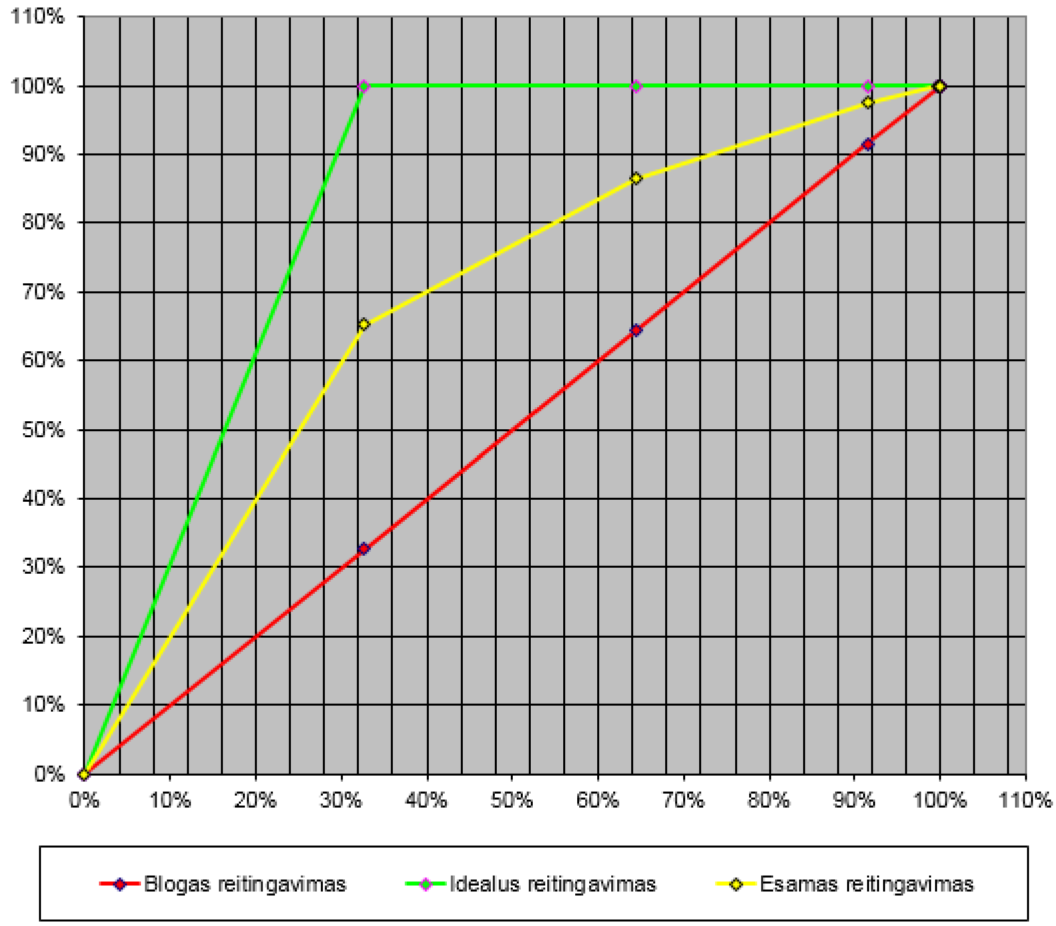
O jei įmonė taikytų tokią vidinę reitingavimo sistemą:

<90	91-110	111-120	121-135	>135
A_5	A_4	A_3	A_2	A_1

Klientų ir nevykdymų pasiskirstymas atrodytų taip:

	A_5	A_4	A_3	A_2	A_1
Klientų sk.	17128	16639	14222	4367	105
Nevykdymų sk.	413	134	70	16	0
Akumuliantai nevykdymų	32,65%	64,37%	91,48%	99,80%	100,00%
Akumuliantai klientų	65,24%	86,41%	97,47%	100,00%	100,00%

Čia kaupiamojo tikslumos kreivės yra:



Šios reitingavimo sistemos patikimumas yra didžiausias AR=0,5359. Tai reiškia, kad šią reitingavimo sistemą jau galime laikyti patikima, bei įmonės patiriamas nuostolis, dėl klientų nemokumo bus mažiausias iš buvusiųjų.

4.2 Įsipareigojimų nevykdymo tikimybės skaičiavimas

Įvertinsime paskutiniosios, patikimiausios reitingavimo sistemos visų grupių įsipareigojimų nevykdymo tikimybes šiais atvejais:

1. Nesusiję klientai, nėra įsipareigojimų nevykdymų.
2. Nesusiję klientai, yra įsipareigojimų nevykdymų.
3. Susiję klientai, nėra įsipareigojimų nevykdymų.

4.2.1 Nesusiję klientai, nėra įsipareigojimų nevykdymų

Šiuo atveju klientai yra pasiskirstę taip:

	A_5	A_4	A_3	A_2	A_1
Klientų sk.	17128	16639	14222	4367	105

Pritaikius šią formulę

$$p_{A_i} \leqslant 1 - (1 - \gamma)^{1/n_i}, \tag{24}$$

su pasikliovimo lygmeniu $\gamma = 95\%$ ir $n_i = \sum_{j=i}^{5} n_j$, gauname:

	A_5	A_4	A_3	A_2	A_1
Klientų sk.	17128	16639	14222	4367	105
Priskiriamas PD	0,0174%	0,0088%	0,0062%	0,0057%	0,0056%

4.2.2 Nesusiję klientai, yra įsipareigojimų nevykdymų

Šiuo atveju klientai ir nevykdymai yra pasiskirstę taip:

	A_5	A_4	A_3	A_2	A_1
Klientų sk.	17128	16639	14222	4367	105
Nevykdymų sk.	413	134	70	16	0

Pritaikius šią formulę

$$1-\gamma \leqslant \sum_{i=0}^{k+l} \binom{n_i}{i} {p_{A_i}}^i (1-p_{A_i})^{n_i-i} \tag{25}$$

su pasikliovimo lygmeniu $\gamma = 95\%$, gauname:

	A_5	A_4	A_3	A_2	A_1
Klientų sk.	17128	16639	14222	4367	105
Nevykdymų sk.	413	134	70	16	0
Priskiriamas PD	2,61%	1,74%	1,37%	1,29%	1,29%

4.2.3 Susiję klientai, nėra įsipareigojimų nevykdymų

Šiuo atveju klientai yra pasiskirstę taip:

	A_5	A_4	A_3	A_2	A_1
Klientų sk.	17128	16639	14222	4367	105

Dėl duomenų trūkumo nepavyko įvertinti klientų priklausomybės, todėl naudosime Bazelio bankų priežiūros komitetos rekomenduojama minimalią sandorių koreliaciją $\rho = 12\%$. Pritaikius šios formulės

$$1-\gamma \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y)\Big(1 - N\Big[\frac{N^{-1}[p_{A_i}] - \sqrt{\rho}Y}{\sqrt{1-\rho}}\Big]\Big)^{n_i} dy \quad (i = 1, ..., m) \tag{26}$$

asimptotinę lygtį

$$p_{A_i} = 1 - N\Big(\frac{\sqrt{2\ln n_i} + az_{1-\gamma} + o(1)}{\sqrt{1+a^2}}\Big) \tag{27}$$

čia $a = \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}}$, $z_{1-\gamma} = N^{-1}(1-\gamma)$, $o(1)$ yra funkcijos $e^{\ln(1-\gamma)/n}$ skleidinio Teiloro eilute nariai $(\ln(1-\gamma)/n)^k/k!$, $\quad k = 2, 3, ...$, ir pasikliovimo lygmuo $\gamma = 99,9\%$, gauname:

	A_5	A_4	A_3	A_2	A_1
Klientų sk.	17128	16639	14222	4367	105
Priskiriamas PD	0,106%	0,066%	0,051%	0,04789%	0,04782%

4.3 Išvados

Keičiant vidinės reitingavimo sistemos rėžius pavyko gauti patikimesnės reitingavimo sistemos modelį. Toks reitingavimo modelis sumažintų patiriamus nuostolius dėl klientų nemokumo, tačiau prieš pradedant taikyti, reikėtų įsivertinti ar pakeitę modelį neprarasime dalies pelno dėl galimų pajamų sumažėjimo. Taip gali nutikti, jei geresnei kredito grupei suteiksime didesnį kreditą, o prekės maržos dalis bus procentinė. Tačiau, jei įmonė visoms prekėms taiko fiksuotą maržą, tai patikimesnės sistesmos atveju pelnas padidėtų.

Įsivertinę kiekvienos grupės įsipareigojimo nevykdymo tikimybę ir sekdami dabartinį klientų srautą, jų pasiskirstymą pagal reitingo grupes, bei sandorių dydžius, galime nuspėti, koks bus patiriamas nuostolis. Tai leidžia atidėti konkrečią pinigų sumą nuostoliams padengti. Be to įsivertinus savo rizikingiausius klientus ir jų rizikos lygį, galime jiems tikslingai "padėti" vykdyti įsipareigojimus, pavyzdžiui, pasliūlyti patogesnį apmokėjimo būdą ar terminus, arba pareikalauti tam tikro dydžio užstato prieš suteikiant kreditą. Visa tai padeda valdyti kredito riziką bei kurti didesnę įmonės pridėtinę vertę, o tai yra pagrindinis komercinės įmonės tikslas.

5 Summary

Probability of default Juozas Petkelis

For credit risk management purposes in general, numerical assessments of the credit-worthiness of borrowers are indispensable. These assessments are expressed in terms of probabilities of default (PD). The aim of the work was to analyze and calibrate ranking system of one telecommunication company and then to estimate the PDs by upper confidence bounds while guaranteeing at the same time a PD ordering that respects the differences in credit quality indicated by the rating grades. The methodology was applied under an assumption of independent default events and correlated defaults. PD's estimations were analyzed and were proposed some analytical and numerical solutions of equations.

6 Literatūra

Literatūra

[1] Basel Committee on Banking Supervision, *Studies on the Validation of Internal Rating Systems* 2005.

[2] Katja Pluto and Dirk Tasche, *Estimating Probabilities of Default for Low Default Portfolios* 2004.

[3] Bluhm, C., Overbeck, L. and C. Wagner, *An Introduction to Credit Risk Modeling* 2003.

[4] Vytautas Valvonis, *Kredito rizikos vertinimo ir valdymo modelis: Lietuvos bankų praktika ir perspektyvos*

[5] www.math.uah.edu/stat