VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

TIKIMYBIŲ TEORIJOS IR SKAIČIŲ TEORIJOS KATEDRA

Kotryna Petronytė

ELIOTO TIPO RIBINĖ TEOREMA DIRICHLĖ L FUNKCIJOMS ANALIZINIŲ FUNKCIJŲ ERDVĖJE

Magistro baigiamasis darbas

Leidžiu ginti . . . .

Darbo vadovas **prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas**

Vilnius 2017

Turinys

1. Įvadas

Tegul $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis, o χ yra Dirichlė charakteris moduliu q. Dirichlė L funkcija $L(s, \chi)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$L(s, \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s}.$$

Jeigu χ nėra pagrindinis charakteris, tai funkcija $L(s, \chi)$ yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, kitaip tariant, ji yra sveikoji funkcija. Jeigu $\chi = \chi_0$ yra pagrindinis charakteris, tai funkcija $L(s, \chi)$ yra analizinė visoje kompleksinėje plokštumoje, išskyrus paprastąjį polių taške $s = 1$ su reziduumu

$$\prod_{p|q} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big),$$

čia p žymi pirminį skaičių.

Dirichlė L funkcijas pradėjo nagrinėti L. Dirichlė ir pritaikė jas pirminių skaičių aritmetinėse progresijose problemoms tirti. Dirichlė L funkcijos turi daugybę ir kitų pritaikymų, todėl yra svarbu žinoti kuo daugiau šių funkcijų savybių. Dirichlė L funkcijų reikšmių pasiskirstymas yra sudėtinga problema, daug uždavinių yra neišspręsti iki šiol. Tai ypač liečia Dirichlė L funkcijų nulių, t.y., tokių s reikšmių, kurioms $L(s, \chi) = 0$, išsidėstymą. Tiriant Dirichlė L funkcijas yra naudojami įvairūs metodai, vienas iš jų yra tikimybinis metodas. Tikimybių teorijos taikymo Dirichlė eilutėms tirti idėja priklauso danų matematikui H. Borui (Bohr), kuris praėjusio amžiaus pradžioje gavo pirmuosius tikimybinius rezultatus Rymano dzeta funkcijai $\zeta(s)$, kuri srityje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s},$$

ir yra meromorfiškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą su vieninteliu poliumi taške $s = 1$. Boro idėja labai paprasta : imama kuri nors kompleksinės plokštumos aibė A ir nagrinėjama, kaip dažnai funkcijos $\zeta(s)$ reikšmės patenka į šitą aibę. Gaunamus rezultatus yra patogu formuluoti tikimybinių matų silpnojo konvergavimo terminais. Primename tokio pabūdžio teoremą Dirichlė L funkcijoms. Tegul $measA$ yra mačios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matas, o $\mathcal{B}(X)$ yra erdvės X Borelio σ kūnas (Borelio aibių klasė). Tuomet yra teisingas toks tvirtinimas.

1.1 teorema. *Tarkime, kad $\sigma > \frac{1}{2}$ yra fiksuotas skaičius. Tuomet erdvėje $\Big(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C})\Big)$ ($\mathbb{C}$ yra visų kompleksinių skaičių aibė) egzistuoja toks tikimybinis matas P, į kurį, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja dažnis*

$$\frac{1}{T} meas\Big\{t \in [0, T] : L(\sigma + it, \chi) \in A\Big\}, \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

Teoremos įrodymą, pavyzdžiui, galime rasti [8] knygoje.

Žinomi ir sudėtingesni rezultatai, kai yra nagrinėjami tikimybiniai matai sudėtingesnėse erdvėse, pavyzdžiui, analizinių funkcijų erdvėje.

Dirichlė L funkcijoms yra žinomos ir kitokio tipo ribinės teoremos, kai kinta charakterio χ modulis q. Pirmąjį tokio tipo rezultatą gavo S. Čiovla (Chowla) ir P. Erdiošas (Erdös). Jie įrodė [3] ribinę teoremą funkcijai $L(1, \chi)$ su realiuoju charakteriu χ. Tolimesni rezultatai priklauso P. Eliotui (Elliott). Jo teoremų formulavimui yra reikalingi kai kurie žymenys. Nuo šiol laikysime, kad charakterio χ modulis yra pirminis skaičius. Tegul $Q \geq 2$ ir

$$M_Q = \sum_{q \leq Q} \sum_{\substack{\chi = \chi(\bmod q) \\ \chi \neq \chi_0}} 1.$$

Be to, tegul

$$\epsilon(\chi) = \prod_{m=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{\chi(m)}{m^s}\Big) e^{-\chi(m)m^{-s}}.$$

Simboliu $\#A$ žymėsime aibės A elementų skaičių, o

$$A_Q = \Big\{\chi(\text{mod} q) : q \leq Q, \chi \neq \chi_0\Big\}.$$

Tuomet buvo gautas [4] toks rezultatas.

1.2 teorema.

$$\frac{1}{M_Q} \#\Big\{\chi \in A_Q : |\epsilon(\chi)|^{-1} |L(s, \chi)| < x\Big\},$$

kai $Q \to \infty$, konverguoja į pasiskirstymo funkciją visuose jos tolydumo taškuose. Ši ribinė funkcija nusakoma Furjė transformacija.

Darbe [5] panašus rezultatas buvo gautas funkcijos $L(s, \chi)$ argumentui. Tegul $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ ir $L(s, \chi) \neq 0$. Tuomet $\arg L(s, \chi)$ reiškia funkcijos $L(s, \chi)$ argumentą, kuris gaunamas tolydžiai judant iš taško $s = 2$ išilgai kreivės, kurioje $L(s, \chi) \neq 0$.

Taigi, turime, kad $\arg L(s,\chi)$ yra apibrėžtas tik daugiklio $2\pi i$ tikslumu. Teisinga tokia teorema.

1.3 teorema. *Tarkime, kad $\sigma > \frac{1}{2}$. Tuomet*

$$\frac{1}{M_Q}\#\Big\{\chi \in A_Q : \frac{1}{2\pi}\arg L(s,\chi) < x(\mathrm{mod} 1)\Big\},$$

kai $Q \to \infty$, konverguoja į tolydžią pasiskirstymo funkciją moduliu 1. Ta funkcija yra nusakoma Furjė transformacija.

E. Stankus Elioto rezultatus apibendrino [12] dvimačiu atveju. Jis įrodė teoremą kompleksinėje plokštumoje.

1.4 teorema. *Tarkime, kad $\sigma > \frac{1}{2}$. Tuomet*

$$\frac{1}{M_Q}\#\Big\{\chi \in A_Q : L(s,\chi) \in A\Big\}, \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

kai $Q \to \infty$, silpnai konverguoja į tikimybinį matą erdvėje $\Big(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C})\Big)$. Šis matas yra taip apibrėžiamas charakteringąja transformacija.

Magistro darbo tikslas yra apibendrinti 1.4 teoremą analizinių funkcijų erdvėje bei nurodyti išreikštinį ribinio mato pavidalą. Tegul $D = \Big\{s \in \mathbb{C} : \sigma > \frac{1}{2}\Big\}$, o $H(D)$ yra analizinių pusplokštumėje D funkcijų erdvė su tolygaus konvergavimo kompaktinėse aibėse topologija. Teoremos formulavimui yra reikalinga viena topologinė struktūra. Tegul $\gamma = \Big\{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\Big\}$ yra vienetinis apskritimas kompleksinėje plokštumoje. Apibrėžiame aibę

$$\Omega = \prod_p \gamma_p,$$

čia $\gamma_p = \gamma$ su visais pirminiais p. Aibę Ω, kuri yra vadinama begaliniamačiu toru, sudaro visos funkcijos, kurios visų pirminių skaičių aibę atvaizduoja vienetiniame apskritime. Su sandaugos topologija [10] ir pataškinės daugybos operacija toras Ω yra topologinė kompaktinė Abelio grupė, todėl mačioje erdvėje $\Big(\Omega, \mathcal{B}(\Omega)\Big)$ galima apibrėžti [8] tikimybinį Haro (Haar) matą m_H. Gauname tikimybinę erdvę $\Big(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H\Big)$. Tegul $\omega(p)$ yra elemento $\omega \in \Omega$ projekcija į p-tąjį apskritimą γ_p. Kadangi projekcija yra tolydi funkcija, tai $\omega(p)$ yra kompleksines reikšmes įgyjantis atsitiktinis dydis, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $\Big(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H\Big)$. Apibrėžiame $H(D)$ reikšmį atsitiktinį elementą $L(s,\chi,\omega)$ formule

$$L(s,\chi,\omega) = \prod_p \Big(1 - \frac{\chi(p)\omega(p)}{p^s}\Big)^{-1}.$$

Pastebime, kad ši begalinė sandauga su beveik visais $\omega \in \Omega$ mato m_H atžvilgiu konverguoja tolygiai pusplokštumės D kompaktinėse aibėse. Funkciją $\omega(p)$ galima pratęsti į visą aibę $\mathbb{N}$ formulės

$$\omega(m) = \prod_{\substack{p^\alpha | m \\ p^{\alpha+1} \nmid m}} \omega^\alpha(p), \qquad m \in \mathbb{N},$$

pagalba. Tuomet atsitiktinį elementą $L(s, \chi, \omega)$ galima užrašyti eilute

$$L(s, \chi, \omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)\omega(m)}{m^s},$$

kuri su beveik visais ω taip pat konverguoja tolygiai kompaktinėse pusplokštumės D aibėse. Tegul P_L yra atsitiktinio elemento $L(s, \chi, \omega)$ pasiskirstymas, t.y., P_L yra tikimybinis matas erdvėje $\Big(H(D), \mathcal{B}(H(D))\Big)$, apibrėžiamas formule

$$P_L(A) = m_H\Big\{\omega \in \Omega : L(s, \chi, \omega) \in A\Big\}, \qquad A \in \mathcal{B}\Big(H(D)\Big).$$

Magistro darbe yra įrodoma tokia teorema.

1.5 teorema. *Dažnis*

$$\frac{1}{M_Q}\#\Big\{\chi \in A_Q : L(s, \chi) \in A\Big\}, \qquad A \in \mathcal{B}\Big(H(D)\Big),$$

kai $Q \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P_L.

2. Tikimybių teorijos elementai

Šiame skyrelyje patogumo dėlei priminsime kai kurias tikimybių teorijos sąvokas ir rezultatus, naudojamus magistro darbe.

Tarkime, kad S yra kuri nors metrinė arba net topologinė erdvė. Simboliu $\mathcal{B}(S)$ žymėsime erdvės S Borelio - σ kūną (σ algebrą), generuotą erdvės S stvirųjų aibių sistemos, t.y., mažiausią σ kūną, kuriam priklauso erdvės S atvirųjų aibių sistema. Gauname porą $\Big(S, \mathcal{B}(S)\Big)$, kuri yra vadinama mačia erdve. Tikimybiniu matu, apibrėžtu mačioje erdvėje $\Big(S, \mathcal{B}(S)\Big)$, yra vadinama neneigiama aibės funkcija $P : \mathcal{B}(S) \to \mathbb{R}$, tenkinanti aksiomas:

1. $P(S) = 1$;

2. Jei aibės $A_1, A_2, ... \in \mathcal{B}(S)$ ir $A_k \bigcap A_m = \varnothing$, kai $k \neq m$, tai tuomet

$$P\Big(A \bigcup_{k=1}^{\infty}\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

Tegul P_n, $n \in \mathbb{N}$, ir P yra tikimybiniai matai mačioje erdvėje $\Big(S, \mathcal{B}(S)\Big)$. Sakome, kad P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P, jei su kiekviena realia tolydžia aprėžta funkcija g, apibrėžta erdvėje S, yra teisinga lygybė

$$\lim_{n\to\infty} \int_S g dP_n = \int_S g dP.$$

Tarkime, turime tikimybinę erdvę $\Big(\Omega, \mathcal{A}, P\Big)$. Čia Ω yra bet kuri netuščia aibė, $\mathcal{A}$ - aibės Ω poaibių σ kūnas, o P yra tikimybinis matas mačioje erdvėje $\Big(\Omega, \mathcal{A}\Big)$. $\Big(\mathcal{A}, \mathcal{B}(S)\Big)$ mati funkcija $X : \Omega \to S$ yra vadinama S reikšmiu atsitiktiniu elementu, apibrėžtu tikimybinėje erdvėje $\Big(\Omega, \mathcal{A}, P\Big)$ ir įgyjančiu reikšmes iš metrinės erdvės S. Tai reiškia, kad su kiekviena aibe $A \in \mathcal{B}(S)$ aibė

$$\Big\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\Big\} \in \mathcal{A}.$$

Atsitiktinio elemento $X(\omega)$ pasiskirstymu yra vadinamas tikimybinis matas

$$P(A) = P\Big(\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\Big), \qquad A \in \mathcal{B}(S).$$

Tegul $\Big(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H\Big)$ yra tikimybinė erdvė, apibrėžta įvade. Bus reikalingas tvirtinimas iš [1] disertacijos. Primename, kad užrašas $f(x) = O\Big(g(x)\Big)$, $g(x) > 0$, $x \in X$, reiškia, kad egzistuoja tokia konstanta $C > 0$, su kuria yra teisinga nelygybė $|f(x)| \leq Cg(x), \ \ x \in X$.

2.1 lema. *Tarkime, kad $\{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ yra kompleksinių skaičių seka, kuriai su kuriuo nors $\alpha > 0$ ir su visais $n \in \mathbb{N}$ yra teisingas įvertis*

$$\sum_{m=1}^{n} |a_m|^2 = O(n^{2\alpha})$$

ir srityje $\sigma > \alpha + \frac{1}{2}$

$$X(s, \omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m \omega(m)}{m^s}, \qquad \omega \in \Omega.$$

Tegul $\{A_m : m \in \mathbb{N}\}$ yra toro Ω tokia baigtinių aibių seka, kad su kiekvienu $\omega \in \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ funkcija $X(s, \omega)$ turi analizinį pratęsimą į pusplokštumę $D_\alpha = \{s \in \mathbb{C} : \sigma > \alpha\}$, tenkinanti sąlygas:

1. *Kai $|t| \to \infty$, tai su kuria nors konstanta $A > 0$ tolygiai $m \in \mathbb{N}$ ir σ intervalo (α, ∞) kompaktinėse aibėse atžvilgiu yra teisingas įvertis:*

$$\frac{1}{\#A_m} \sum_{\omega \in A_m} \Big| X(\sigma + it, \omega) \Big|^2 = O(|t|^A),$$

(čia # - aibės A elementų skaičius);

2. *Tolygiai s iš pusplokštumės D_α kompaktinių aibių atžvilgiu yra teisingas įvertis*

$$\sum_{\omega \in A_m} \Big| X(s, \omega) \Big|^2 = O(\#A_m), \qquad m \to \infty;$$

3. *Kai $m \to \infty$, tai dažnis*

$$\frac{\#(A \bigcap A_m)}{\#A_m}, \qquad A \in \mathcal{B}(\Omega),$$

silpnai konverguoja į Haro matą m_H.

Tuomet, kai $m \to \infty$, dažnis

$$\frac{1}{\#A_m} \#\{\omega \in A_m : X(s, \omega) \in A\}, \qquad A \in H(D_\alpha),$$

silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento $X(s, \omega)$ pasiskirstymą.

Tarkime, kad G yra kompaktinė Abelio grupė. Tuomet mačioje erdvėje $\big(G, \mathcal{B}(G)\big)$ gali būti apibrėžtas tikimybinis Haro matas μ. Primename, kad Haro matas išsiskiria iš kitų tikimybinių matų invariantiškumo savybe. Tai reiškia, kad su kiekviena aibe $A \in \mathcal{B}(G)$ ir kiekvienu $g \in G$ yra teisingos lygybės:

$$\mu(A) = \mu(gA) = \mu(Ag).$$

Apibrėžimas. *Seka $\{x_m : m \in \mathbb{N}\} \subset G$ yra vadinama tolygiai pasiskirsčiusia, jeigu su kiekviena realia aprėžta mačia funkcija f*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} f(x_m) = \int_G f d\mu.$$

Grupėje G galima apibrėžti charakterius. Charakteriu vadiname funkciją $\chi : G \to \gamma$, kuriai su visais $g_1, g_2 \in G$ galioja lygybė $\chi(g_1 g_2) = \chi(g_1)\chi(g_2)$. Charakteris $\chi(g) = 1$ su visais $g \in G$ yra vadinamas grupės G trivialiuoju charakteriu.

2.2 lema. *Tegul G yra kompaktinė Abelio grupė. Tuomet seka $\{x_m : m \in \mathbb{N}\} \subset G$ yra tolygiai pasiskirsčiusių grupėje G tada ir tik tada kai su kiekvienu netrivialiuoju grupės G charakteriu χ yra teisinga lygybė*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \chi(x_m) = 0.$$

Lemos įrodymą galima rasti [7] monografijoje, 4 skyrius, 1.2 išvada.

3. Dirichlė L funkcijos

Šiame skyrelyje pateiksime rezultatus apie Dirichlė L funkcijas, reikalingus pagrindinės teoremos įrodymui.

Iš pradžių primename Dirichlė charakterio sąvoką. Tikslus Dirichlė charakterio moduliu q apibrėžimas yra gana sudėtingas, jį galima rasti, pavyzdžiui, [6], [11] monografijose, tačiau mūsų darbe jis nebus reikšmingas, todėl apsiribosime tokia pastaba : kiekviena funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, tenkinanti reikalavimus:

1. $\chi(m)$ yra periodinė su periodu q, t.y., $\chi(m+q) = \chi(m)$ su visais $m \in \mathbb{N}$;
2. $\chi(m)$ yra visiškai multiplikatyvi, t.y., $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$ su visais $m, n \in \mathbb{N}$;
3. $\chi(m) = 0$, kai $(m, q) > 1$;
4. $\chi(m) \neq 0$, kai $(m, q) = 1$,

sutampa su vienu iš Dirichlė charakterių moduliu q. Charakteris $\chi, \chi(m) = 1$ su visais $(m, q) = 1$, yra vadinamas pagrindiniu charakteriu moduliu q. Yra iš viso $\varphi(q)$ charakterių moduliu q. Čia $\varphi(q)$ yra Oilerio funkcija, t.y., $\varphi(q) = \#\Big\{1 \leq k \leq q : (k, q) = 1\Big\}$.

Dirichlė L funkcija $L(s, \chi)$, atitinkanti Dirichlė charakterį χ moduliu q, pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$L(s, \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s}.$$

Kadangi charakteris $\chi(m)$ yra visiškai multiplikatyvi funkcija, tai Dirichlė L funkciją $L(s, \chi)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ galima užrašyti Oilerio sandauga

$$L(s, \chi) = \prod_p \Big(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\Big)^{-1}$$

pagal pirminius skaičius p. Kaip jau minėjome įvade, funkcija $L(s, \chi)$ yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą (jei χ yra pagrindinis charakteris, tai ji yra meromorfinė funkcija ir turi vienintelį paprastąjį polių taške $s = 1$).

4. Pagrindinės teoremos įrodymas

Šiame skyrelyje įrodysime pagrindinę magistro darbo teoremą apie Dirichlė L funkcijų pasiskirstymą analizinių funkcijų erdvėje, kai charakterio modulis neaprėžtai auga perbėgdamas pirminius skaičius. Trumpai primename jos formulavimą. Tegul $Q \geq 2$ ir

$$M_Q = \sum_{q \leq Q} \sum_{\substack{\chi = \chi(\bmod q) \\ \chi \neq \chi_0}} 1,$$

čia q yra pirminis skaičius. D žymi pusplokštumę $\{s \in \mathbb{C} : \sigma > \frac{1}{2}\}$, o $L(s, \chi, \omega)$ yra $H(D)$ reikšmis atsitiktinis elementas, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $\Big(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H\Big)$ eilute

$$L(s, \chi, \omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)\omega(m)}{m^s}, \qquad \omega \in \Omega.$$

Tegul P_L yra atsitiktinio elemento $L(s, \chi, \omega)$ pasiskirstymas, o

$$A_Q = \Big\{\chi(\bmod q) : q \leq Q, \chi \neq \chi_0\Big\}.$$

Tuomet yra teisinga teorema.

4.1 teorema. *Dažnis*

$$\frac{1}{M_Q} \#\Big\{\chi \in A_Q : L(s, \chi) \in A\Big\}, \qquad A \in \mathcal{B}\Big(H(D)\Big),$$

kai $Q \to \infty$, silpnai konverguoja į P_L.

Įrodymas. Tikriname 2.1 lemos sąlygas. Aišku, kad

$$\sum_{m=1}^{n} |\chi(m)|^2 = n = n^{2\frac{1}{2}}.$$

Todėl mūsų atveju $\alpha = \frac{1}{2}, D_\alpha = D$ ir, kai $\sigma > 1$, tai

$$X(s, \omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)\omega(m)}{m^s}, \qquad \omega \in \Omega.$$

Tegul $\mathbb{P}$ yra visų pirminių skaičių aibė, o χ yra Dirichlė charakteris moduliu $q \in \mathbb{P}$. Apibrėžiame

$$\hat{\chi}(p) = \begin{cases} \chi(p), & \text{kai } p \in \mathbb{P} \backslash \{q\}, \\ 1, & \text{kai } p = q. \end{cases}$$

Tuomet aišku, kad $\hat{\chi}$ yra toro Ω elementas, nes $|\chi(p)|= 1$, kai $p \neq q$. Kadangi yra žinoma, kad pusplokštumėje $\sigma > 1$ Dirichlė L funkciją galima užrašyti Oilerio sandauga

$$L(s,\chi) = \prod_p \Big(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\Big)^{-1},$$

tai iš šio apibrėžimo turime, kad

$$L(s,\chi) = l_q(s) L(s,\hat{\chi}), \tag{4.1}$$

čia

$$l_q(s) = 1 - \frac{\chi(p)}{q^s}.$$

Tarkime, kad p_m yra m-tasis pirminis skaičius, χ_0 yra pagrindinis charakteris ir

$$A_m = \Big\{\chi(\mathrm{mod} p_m) : \chi \neq \chi_0\Big\}.$$

Kadangi modulių p_m iš viso yra $\varphi(p_m) = p_m - 1$, tai aibė A_m yra sudaryta iš $p_m - 2$ elementų, t.y., $\# A_m = p_m - 2$. Apibrėžiame dar vieną aibę

$$\hat{A_m} = \Big\{\widehat{\chi} : \chi \in A_m\Big\}.$$

Kurioje nors tikimybinėje erdvėje $\Big(\Omega_0, \mathcal{A}, \mathcal{P}\Big)$ apibrėžiame du $H(D)$ reikšmius atsitiktinius elementus $X_m(s)$ ir $\hat{X_m}(s)$ atitinkamai formulėmis

$$P\Big(X_m(s) = L(s,\chi)\Big) = \frac{1}{p_m - 2}, \qquad \chi \in A_m,$$

ir

$$P\Big(\hat{X_m}(s) = L(s,\widehat{\chi})\Big) = \frac{1}{p_m - 2}, \qquad \widehat{\chi} \in \hat{A_m}.$$

Iš 4.1 lygybės turime, kad atsitiktiniai elementai $X_m(s)$ ir $\hat{X_m}(s)$, kai $m \geq 2$, yra susieti lygybe

$$X_m(s) = l_{p_m} \hat{X_m}(s).$$

Tegul

$$Q_q(A) = \frac{1}{q-2} \# \Big\{\chi(\mathrm{mod} q) : \chi \neq \chi_0, L(s,\chi) \in A\Big\}, \qquad A \in \mathcal{B}\Big(H(D)\Big).$$

Iš pradžių įrodysime, kad Q_q, kai $q \to \infty$, perbėgdamas pirminius skaičius, silpnai konverguoja į matą P_L. Šiam tikslui reikės įrodyti, kad atsitiktinis elementas $X_m(s)$, kai $m \to \infty$, pagal pasiskirstymą konverguoja į P_L, t.y., atsitiktinio elemento $X_m(s)$

pasiskirstymas, kai $m \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P_L. Iš funkcijos $l_{p_m}(s)$ apibrėžimo

$$l_{p_m}(s) = 1 - \frac{\chi(p_m)}{{p_m}^s}$$

turime, kad $l_{p_m}(s)$, kai $m \to \infty$, artėja į 1 erdvėje $H(D)$. Todėl pakanka išnagrinėti atsitiktinio elemento $\hat{X_m}(s)$ konvergavimą pagal pasiskirstymą, kai $m \to \infty$. Tai reiškia, kad 2.1 lemoje seką $\Big\{A_m : m \in \mathbb{N}\Big\}$ atitiks seka $\Big\{\hat{A_m} : m \in \mathbb{N}\Big\}$, o $X(s,\omega) = L(s,\widehat{\chi},\omega)$. Vėl, remdamiesi asimptotine lygybe $l_{p_m} \to 1$, kai $m \to \infty$, vietoje $L(s,\widehat{\chi})$ galime imti $L(s,\chi)$.

Mums bus reikalingi L funkcijų sumų įverčiai. Naudosimės įverčiu

$$\frac{1}{Q}\sum_{\substack{\chi(\bmod Q)\\ \chi\neq\chi_0}} \Big|L(\sigma+it,\chi)\Big|^2 = O\Big(|t|^{\alpha}\Big),$$

kuris yra teisingas tolygiai q atžvilgiu ir σ atžvilgiu kompaktinėse intervalo $(\frac{1}{2},\infty)$ aibėse. Tolygumas reiškia, kad konstanta simbolyje O nepriklauso nuo q ir σ. Šis tvirtinimas yra naudojamas [1] darbe, tačiau pilno įrodymo mums nepavyko rasti. Mūsų manymu, įrodymo schema galėtų būti tokia. Tegul $K \subset (\frac{1}{2},\infty)$ yra kompaktinė aibė. Jei $\sigma \in K$, tai tuomet $\sigma \geq \frac{1}{2}+\theta, \quad \theta > 0$. Pakartoję 10.1 teoremos iš [9] įrodymą, galima gauti, kad tolygiai q ir $\sigma \in K$ atžvilgiu, yra teisingas įvertis

$$\sum_{\substack{\chi(\bmod q)\\ \chi\neq\chi_0}} \int_0^t \Big|L(\sigma+iu,\chi)\Big|^2 du = O\Big(\varphi(q)t\Big).$$

Kadangi q yra pirminis skaičius, tai $\varphi(q) = q-1$. Todėl diferencijuodami šią "lygybę" ir panaudoję išvestinę įvertinti Koši integralinę formulę (galime laikyti, kad t yra kompleksinis kintamasis) gautume, kad

$$\frac{1}{q}\sum_{\substack{\chi(\bmod q)\\ \chi\neq\chi_0}} \Big|L(\sigma+it,\chi)\Big|^2 = O\Big(|t|\Big).$$

Iš šio įverčio, vėl naudojant integralinę Koši formulę, yra gaunamas įvertis

$$\sum_{\substack{\chi(\bmod q)\\ \chi\neq\chi_0}} \Big|L(s,\chi)\Big|^2 = O(q), \qquad q \to \infty,$$

kuris yra tolygus s atžvilgiu kompaktinėse pusplokštumės $\sigma > \frac{1}{2}$ aibėse. Šis įvertis be įrodymo taip pat yra naudojamas [1] darbe.

Lieka patikrinti 2.1 lemos 3^o sąlygą. Šiam tikslui taikome 2.2 lemą. Yra gerai žinoma [8], kad grupės Ω charakteriai χ_Ω turi pavidalą

$$\chi_\Omega(\omega) = \prod_p \omega^{k_p}(p),$$

čia tik baigtinis skaičius sveikųjų skaičių k_p yra ne nuliai. Taigi, iš tikrųjų turime tik baigtinę sandaugą. Skaičiai k_p gali būti tiek teigiami, tiek neigiami. Surinkę atskirai teigiamus ir neigiamus k_p, gausime, kad

$$\chi_\Omega(\omega) = \omega(m_1)\overline{\omega(m_2)},$$

čia $^-$ reiškia kompleksinį jungtinį skaičių. Be to, iš $\omega(m)$ apibrėžimo turime, kad $(m_1, m_2) = 1$. Todėl iš čia randame, kad

$$\begin{aligned}\frac{1}{\#\widehat{A}_m}\sum_{\omega\in\widehat{A}_m}\chi_\Omega(\omega) &= \frac{1}{p_m-2}\sum_{\omega\in\widehat{A}_m}\omega(m_1)\overline{\omega(m_2)}\\ &= \frac{1}{p_m-2}\sum_{\substack{\chi(\bmod p_m)\\ \chi\neq\chi_0}}\widehat{\chi}(m_1)\overline{\widehat{\chi}(m_2)},\end{aligned}\tag{4.2}$$

čia $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ yra fiksuoti skaičiai. Todėl jie ir jų skirtumas nesidalija iš p_m, jeigu m yra pakankamai didelis. Iš čia ir 4.2 lemos randame, kad

$$\begin{aligned}\frac{1}{\#\widehat{A}_m}\sum_{\omega\in\widehat{A}_m}\chi_\Omega(\omega) &= \frac{1}{p_m-2}\sum_{\substack{\chi(\bmod p_m)\\ \chi\neq\chi_0}}\chi(m_1)\overline{\chi(m_2)}\\ &= -\frac{\chi_0(m_1)\overline{\chi_0(m_2)}}{p_m-2} + \frac{1}{p_m-2}\sum_{\substack{\chi(\bmod p_m)\\ \chi\neq\chi_0}}\chi(m_1)\overline{\chi(m_2)}\\ &= -\frac{1}{p_m-2}\to 0,\end{aligned}$$

kai $m\to\infty$.

Taigi, pagal 2.2 lemą gauname, kad seka $\left\{\hat{A}_m : m\in\mathbb{N}\right\}$ yra tolygiai pasiskirsčiusi, o tai reiškia, kad yra išpildyta 2.1 lemos 3^o sąlyga. Taigi turime, kad yra išpildytos 2.1 lemos visos sąlygos atsitiktiniams elementams X_m, todėl gauname, kad

$$\frac{1}{q-2}\#\Big\{\chi(\bmod q), \chi\neq\chi_0 : L(s,\hat{\chi})\in A\Big\}, A\in\mathcal{B}\Big(H(D)\Big),$$

kai $q\to\infty$, silpnai konverguoja į matą P_L. Iš čia ir lygybės

$$\lim_{m\to\infty} l_{p_m}(s) = 1$$

erdvėje $H(D)$ gauname, kad

$$\frac{1}{q-2}\#\Big\{\chi(\bmod q), \chi\neq\chi_0 : L(s,\chi)\in A\Big\}, A\in\mathcal{B}\Big(H(D)\Big),\tag{4.3}$$

kai $q\to\infty$, taip pat silpnai konverguoja į matą P_L.

Lieka pereiti prie dažnio, nagrinėjamo teoremoje. Tarkime, kad A yra mato P_L tolydumo aibė, t.y., $P_L(\partial A) = 0$, čia ∂A yra aibės A kraštas. Tuomet iš (4.3) silpnojo konvergavimo ir silpnojo tikimybinių matų konvergavimo ekvivalento tolydumo aibių terminais [2], 2.1 teorema, turime, kad

$$\lim_{q\to\infty}\frac{1}{q-2}\#\Big\{\chi(\mathrm{mod} q), \chi\neq\chi_0 : L(s,\chi)\in A\Big\} = P_L(A).$$

Iš čia, kai $q\to\infty$,

$$\#\Big\{\chi(\mathrm{mod} q), \chi\neq\chi_0 : L(s,\chi)\in A\Big\} = qP_L(A)+o(q). \tag{4.4}$$

Fiksuojame $\epsilon>0$. Tuomet rasime tokį q_0, kad su visais $q\geq q_0$ galios nelygybė

$$\Big|\#\Big\{\chi(\mathrm{mod} q), \chi\neq\chi_0 : L(s,\chi)\in A\Big\} - qP_L(A)\Big| < \epsilon q.$$

Iš čia ir (4.4) gauname, kad

$$\begin{aligned}&\frac{1}{M_Q}\#\Big\{\chi\in A_Q : L(s,\chi)\in A\Big\} - \frac{P_L(A)}{M_Q}\sum_{q\leq Q} q\\ &= O\Big(\frac{1}{M_Q}\sum_{q\leq q_0} q\Big) + O\Big(\frac{\epsilon}{M_Q}\sum_{q_0\leq q\leq Q} q\Big) = O(\epsilon)+o(1),\end{aligned}$$

kai $Q\to\infty$. Čia pasinaudojome žinomais įverčiais

$$M_Q \geq \frac{cQ^2}{logQ}$$

ir

$$\sum_{q\leq Q} q \leq Q\sum_{q\leq Q} 1 = O\Big(\frac{Q^2}{logQ}\Big).$$

Iš čia, kai $Q\to\infty$, išplaukia, kad

$$\frac{1}{M_Q}\#\Big\{\chi\in A_Q : L(s,\chi)\in A\Big\} = P_L(A)+o(1)$$

su bet kuria mato P_L tolydumo aibe A. Vėl, panaudoję silpnojo tikimybinių matų konvergavimo ekvivalentą tolydumo aibių terminais, gauname teoremos tvirtinimą.

Summary

A limit theorem of the Elliott type for Dirichlet L - functions in the space of analytic functions

Kotryna Petronytė

Let χ be a Dirichlet character modulo q (q is a prime number), $s = \sigma + it$ be a complex variable and let $L(s, \chi)$ be a Dirichlet L function defined, for $\sigma > 1$, by the series

$$L(s, \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s},$$

and by analytic continuation elsewhere. Let $D = \{s \in \mathbb{C} : \sigma > \frac{1}{2}\}$. Denote by $H(D)$ the space of analytic functions on D endowed with the topology of uniform convergence on compact. In the master work, we prove a limit theorem for $L(s, \chi)$ in the space $H(D)$ when $q \to \infty$. More precisely, let, for $Q \geq 2$,

$$M_Q = \sum_{q \leq Q} \sum_{\substack{\chi = \chi (\bmod q) \\ \chi \neq \chi_0}} 1,$$

and

$$A_Q = \Big\{\chi(\mathrm{mod} q) : q \leq Q, \chi \neq \chi_0\Big\}.$$

We prove that

$$\frac{1}{M_Q} \# \Big\{\chi \in A_Q : L(s, \chi) \in A\Big\}, A \in \mathcal{B}\Big(H(D)\Big),$$

converges weakly to the measure P_L as $Q \to \infty$. Also, the explicit form of the measure P_L is given. It is the distribution of a certain $H(D)$ - valued random element.

Literatūra

[1] B. Bagchi, *The Statistical Behaviour and Universality Properties of the Riemann Zeta - Function and Other Allied Dirichlet Series*, Ph. D. Thesis, Indian Stat. Institute, Calcutta, 1981.

[2] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, John Wiley and Sons, New York, 1968.

[3] S. Chowla, P. Erdös, *A theorem on the values of L-function*, J. Indian Math. Soc.(N.S.), **15** (1951), 11-18.

[4] P. D. T. A. Elliott, *On the distribution of the values of L-series in the half-plane* $\sigma > \frac{1}{2}$, Indag. Math., **33** (1971), 222-234.

[5] P. D. T. A. Elliott, *On the distribution of* $\arg L(s, \chi)$ *in the half-plane* $\sigma > \frac{1}{2}$, Acta Arith., **20** (1972), 155-159.

[6] H. Iwaniec, E. Kowalski, *Analytic Number Theory*, American Math. Soc. Colloq. Publ. vol 53, 2004.

[7] L. Kuipers, H. Niederreiter, *Uniform Distribution of Sequences*, Pure Appl. Math., John Wiley and Sons, New York, 1974.

[8] A. Laurinčikas, *Limit Theorems for the Riemann Zeta - Function*, Kluwer, Dordrecht, 1996.

[9] H. L. Montgomery, *Topics in Multiplicative Number Theory*, Lecture Notes Math. 227, Springer, Berlin, 1971.

[10] V. Paulauskas, A. Račkauskas, *Funkcinė analizė. 1 knyga. Erdvės*, UAB "Vaistų žinios", Vilnius, 2007.

[11] K. Prachar, *Raspredelenije prostych čisel*, Mir, Maskva, 1967.

[12] E. Stankus, *Raspredelenije L-funkcii Dirichle, Liet. Mat. rink.*, **15**(2), (1975), 127-134.