VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
TIKIMYBIŲ TEORIJOS IR SKAIČIŲ TEORIJOS KATEDRA

Jurgita Petuškinaitė

Vienos funkcijos, susijusios su Dirichlė L funkcijomis, nulių skaičiaus įvertis

Magistro baigiamasis darbas

Leidžiu ginti ____________________________

Darbo vadovas **prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas**

Vilnius 2017

Turinys

1 Įvadas

Tegul $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis, o χ yra Dirichlė charakteris moduliu q. Charakterio apibrėžimas bus pateiktas 2 skyrelyje. Dirichlė L funkcija $L(s,\chi)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama eilute

$$L(s,\chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s}$$

ir yra meromorfiškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą. Kai χ_0 yra pagrindinis charakteris moduliu q, tai funkcija $L(s,\chi_0)$ yra visur reguliari, išskyrus tašką $s = 1$, kuris yra paprastasis polius su reziduumu

$$\prod_{p/q} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

čia sandauga imama pagal pirminius skaičius p, kurie dalija modulį q. Jeigu $\chi \neq \chi_0$, tai tuomet funkcija $L(s,\chi)$ yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, kitaip tariant, ji yra sveikoji funkcija. Dirichlė L funkcijos atlieka labai svarbų vaidmenį analizinėje skaičių teorijoje. Prancūzų matematikas L. Dirichlė (Dirichlet) apibrėžė šias funkcijas (1837 m.) norėdamas nustatyti pirminių skaičių pasiskirstymo dėsnį aritmetinėse progresijose

$$a, a+q, a+2q, ...,$$

kai a ir q yra tarpusavyje pirminiai skaičiai. Jam pasisekė, jis įrodė, kad kiekvienoje tokioje progresijoje yra be galo daug pirminių skaičių. Tiesa, Dirichlė tai pavyko įrodyti ne iš karto, buvo daromos kai kurios klaidos, kurias pavyko vėliau ištaisyti. Svarbų vaidmenį Dirichlė sukurtoje teorijoje atliko nelygybė $L(1,\chi) \neq 0$ su kiekvienu nepagrindiniu charakteriu. Vėliau Dirichlė L funkcijų teoriją vystė daugelis žinomų matematikų, kuriems pavyko įrodyti pirminių skaičių pasiskirstymo dėsnį aritmetinėse progresijose, t.y., gauti funkcijos

$$\pi(x;a,q) = \sum_{\substack{p \le x \\ p \equiv a (\bmod q)}} 1$$

asimptotinę formulę, kai $x \to \infty$. Ta formulė yra gana sudėtinga, tačiau daugeliu atvejų funkcija $\pi(x; a, q)$ elgiasi panašiai kaip

$$\frac{1}{\varphi(q)} \int_2^x \frac{du}{\log u},$$

kai $x \to \infty$. Čia $\varphi(q)$ yra Oilerio funkcija, kuri parodo, kiek yra sveikųjų teigiamų skaičių, neviršijančių q ir tarpusavyje pirminių su q. Vėlgi šie rezultatai buvo gauti naudojant informaciją apie Dirichlė L funkcijų nulius. Yra gerai žinoma [10], kad $L(s, \chi) \neq 0$ pusplokštumėje $\sigma > 1$. Kiek sudėtingiau yra įrodyti, kad $L(s, \chi)$ tiesėje $\sigma = 1$ taip pat nevirsta nuliu. Viena iš garsiausių hipotezių, vadinamoji apibendrinta Rymano hipotezė, tvirtina, kad visos Dirichlė L funkcijos neturi nulių pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$. Ši hipotezė yra viena iš septynių svarbiausių tūkstantmečio problemų, už ją pažadėta 1 mln. JAV dolerių. Minėtos pastabos rodo, kad Dirichlė L funkcijų nulių išsidėstymo problema yra svarbi ir visi tokio tipo rezultatai nusipelno dėmesio.

Magistro darbo tikslas yra gauti kai kurių analizinių funkcijų, susijusių su Dirichlė L funkcijomis, nulių skaičiaus įverčius iš apačios. Patogumo dėlei, naudosime tokį apibrėžimą. Sakysime, kad kuriai nors funkcijai $f(s)$ yra teisingas tvirtinimas $A(\sigma_1, \sigma_2; c, T)$, jeigu su visais $\sigma_1, \sigma_2, \frac{1}{2} < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$, egzistuoja tokia teigiama konstanta c, su kuria pakankamai dideliems T funkcija $f(s)$ turi daugiau negu cT nulių, gulinčių stačiakampyje $\{s \in \mathbb{C} : \sigma_1 < \sigma < \sigma_2, 0 < t < T\}$. Magistro darbe nagrinėjame vienos sudėtinių funkcijų klasės $F\left(L\left(s, \chi_1\right), ..., L\left(s, \chi_r\right)\right)$ nulių skaičių. Tegul $V > 0$ yra bet koks teigiamas skaičius, $D_V = \left\{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1, |t| < V\right\}$, o $H(D_V)$ yra analizinių srityje D_V funkcijų erdvė su tolygaus konvergavimo kompaktinėse aibėse topologija. Be to, tegul

$$S_V = \{g \in H(D_V) : g(s) \neq 0 \text{ arba } g(s) \equiv 0\}.$$

Nagrinėjame klasę $U_{r,V}$ tokių tolydžių operatorių $F : H^r(D_V) \to H(D_V)$, kuriems su kiekvienu polinomu $p = p(s)$ aibė

$$\left(F^{-1}\{p\}\right) \bigcap S_V^r$$

yra netuščia. Čia $F^{-1}\{p\}$ yra polinomo p pirmavaizdis, t.y., visos funkcijos, kurias operatorius F atvaizduoja į polinomą p. Dabar formuluojame pagrindinį darbo rezultatą.

1.1 teorema. *Tarkime, kad* $\chi_1, ..., \chi_r$ *yra kas du neekvivalentūs Dirichlė charakteriai, o* $F \in U_{r,V}$ *su pakankamai dideliais* V*. Tuomet egzistuoja tokia konstanta*

$$c = c(\sigma_1, \sigma_2, \chi_1, ..., \chi_r, F) > 0,$$

su kuria funkcijai $F(L(s, \chi_1), ..., L(s, \chi_r))$ *su* $T < V$ *yra teisingas tvirtinimas* $A(\sigma_1, \sigma_2; c, T)$*.*

Teoremos įrodymas remiasi Dirichlė L funkcijų jungtinio universalumo savybe.

2 Dirichlė charakteriai

Dirichlė charakteris $\chi : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ yra pakankamai sudėtingai apibrėžiama aritmetinė funkcija. Iš pradžių Dirichlė charakteris yra apibrėžiamas moduliu, kuris yra lygus pirminio skaičiaus laipsniui. Pateiksime pavyzdį, kai charakterio modulis $q = p^\alpha$, $p > 2$, yra pirminis skaičius, o $\alpha \in \mathbb{N}$. Į charakterio apibrėžimą įeina kai kurios elementariosios skaičių teorijos sąvokos ir tvirtinimai. Jeigu $(a, q) = 1$ (p ir q yra tarpusavyje pirminiai), tai visada galima rasti tokius skaičius $\beta \in \mathbb{N}$, su kuriais yra teisingas lyginys

$$a^\beta \equiv 1(\mathrm{mod} q). \tag{2.1}$$

Tegul $\varphi(q)$ yra Oilerio funkcija, t.y., skaičius tokių $k \in \mathbb{N}$, $k \leq q$, $(k, q) = 1$. Pavyzdžiui, $\varphi(6) = 2$, tuomet skaičių β, kuriems galioja lyginys (2.1), egzistavimą patvirtina Oilerio teorema

$$a^{\varphi(q)} \equiv 1(\mathrm{mod} q).$$

Taigi, visada galime imti $\beta = \varphi(q)$. Jeigu (2.1) lyginys negalioja su jokiu $\beta < \varphi(q)$, tai tuomet skaičius a yra vadinamas primityviąja (pirmykšte) šaknimi moduliu q. Tarkime, kad d yra mažiausia primityvioji šaknis moduliu q. Tuomet skaičiaus a indeksu moduliu q ir pagrindu d vadiname skaičių $\beta \in \mathbb{N}$, kuriam galioja lyginys

$$d^\beta \equiv a(\mathrm{mod} q)$$

ir žymime $\beta = \mathrm{ind}_d a$.

Dirichlė charakteris moduliu $q = p^\alpha$, $p > 2$, $\alpha \in \mathbb{N}$, yra aritmetinė funkcija

$$\chi(m) = \chi(m; q, n) = \begin{cases} 0, & \text{kai } (m, q) > 1, \\ \exp\left\{2\pi i n \frac{\mathrm{ind}_d m}{\varphi(q)}\right\}, & \text{kai } (m, q) = 1, \end{cases} \tag{2.2}$$

čia n yra sveikasis parametras. Iš šio apibrėžimo matome, kad $|\chi(m)| = 0$ arba 1. Kadangi $e^{2\pi i \mathrm{ind}_d m} = 1$, tai iš (2.2) matome, kad

$$\chi(m; q, n + \varphi(q)) = \exp\left\{2\pi i \left(n + \varphi(q)\right) \frac{\mathrm{ind}_d m}{\varphi(q)}\right\} =$$

$$= \exp\left\{2\pi i n \frac{\mathrm{ind}_d m}{\varphi(q)}\right\} \exp\left\{2\pi i \mathrm{ind}_d m\right\} = \exp\left\{2\pi i n \frac{\mathrm{ind}_d m}{\varphi(q)}\right\}.$$

Ši lygybė rodo, kad charakteris moduliu q parametro n atžvilgiu yra periodinė funkcija su periodu $\varphi(q)$. Iš čia išplaukia, kad yra iš viso $\varphi(q)$ skirtingų charakterių moduliu $q = p^\alpha$, $p > 2$, $\alpha \in \mathbb{N}$. Kadangi žinoma, kad $\mathrm{ind}_d(m+q) = \mathrm{ind}_d m$, tai matome, kad $\chi(m+q) = \chi(m)$. Tai reiškia, jog charakteris moduliu q yra periodinė funkcija su periodu q. Atvejis, kai $q = 2^\alpha$ yra sudėtingesnis, nes šiuo atveju neegzistuoja primityviosios šaknys moduliu q. Šio atvejo nenagrinėsime, tačiau jis yra pakankamai analogiškas jau išnagrinėtam atvejui. Jeigu dabar charakterio modulis turi pavidalą

$$q = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r},$$

kuriame $p_1, ..., p_r$ yra skirtingi pirminiai skaičiai, o $\alpha_1, ..., \alpha_r \in \mathbb{N}$, tuomet charakteris χ_m moduliu q yra apibrėžiamas formule

$$\chi(m) = \prod_{k=1}^{r} \chi(m; p_k^{\alpha_k}).$$

Apskritai taikymuose yra patogu naudotis tokiu tvirtinimu. Aritmetinė funkcija $\chi(m)$, turinti savybes:

1. $\chi(m)$ yra periodinė funkcija su periodu q, t.y., $\chi(m+q) = \chi(m)$ su visais $m \in \mathbb{N}$;
2. $\chi(m) = 0$, kai $(m, q) > 1$;
3. $\chi(m) \neq 0$, kai $(m, q) = 1$;
4. $\chi(m)$ yra visiškai multiplikatyvi funkcija, t.y., $\chi(m_1 m_2) = \chi(m_1)\chi(m_2)$ su visais $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, sutampa su vienu iš Dirichlė charakterių moduliu q.

Mums bus reikalingi kai kurie Dirichlė charakterių tipai. Charakteris $\chi_0(m)$ moduliu q yra vadinamas pagrindiniu, jeigu $\chi_0(m) = 1$ su visais $(m, q) = 1$.

Taip pat yra reikalinga dviejų Dirichlė charakterių ekvivalentiškumo sąvoka. Žinome, kad charakteris $\chi(m)$ moduliu q turi periodą q. Tačiau kartais pasitaiko, kad charakteris $\chi(m)$ turi mažesnį periodą negu q, kai $(m, q) = 1$. Tuomet sakome, kad charakteris nėra primityvus. Jeigu $\chi(m)$, kai $(m, q) = 1$, neturi mažesnio periodo negu q, tai sakome, kad jis yra primityvus. Yra žinoma [10], kad kiekvienam neprimityviam charakteriui $\chi(m)$

moduliu q galima rasti tokį primityvųjį charakterį $\hat{\chi}(m)$ moduliu q_1, kad

$$\chi(m) = \begin{cases} 0, & \text{kai } (m, q_1) > 1, \\ \hat{\chi}(m), & \text{kai } (m, q_1) = 1. \end{cases}$$

Šiuo atveju sakome, kad charakteris $\hat{\chi}(m)$ indukuoja charakterį $\chi(m)$. Dabar galime pateikti ekvivalenčių charakterių apibrėžimą: charakteriai $\chi_1(m)$ ir $\chi_2(m)$ yra vadinami ekvivalenčiais, jeigu juos indukuoja tas pats primityvusis charakteris. Priešingu atveju, charakteriai $\chi_1(m)$ ir $\chi_2(m)$ yra vadinami neekvivalenčiais.

3 Dirichlė L funkcijų universalumas

1975 m. S. M. Voroninas atrado Dirichlė L funkcijų universalumą. Suformuluosime šiuolaikinį Voronino teoremos variantą, kuris yra šiek tiek bendresnis už teoremą, suformuluotą [12] darbe.

Mums bus reikalingi kai kurie žymenys. Tegul $D = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$, $\mathcal{K}$ yra juostos D kompaktinių poaibių, turinčių jungųjį papildinį, klasė, o $H(K)$, $K \in \mathcal{K}$, yra funkcijų, tolydžių ir nevirstančių nuliu aibėje K, ir analizinių aibės K viduje, klasė. Be to, tegul $meas A$ žymi mačios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matą. Tuomet Voronino teorema turi tokį pavidalą.

3.1 teorema. *Tarkime, kad $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H(K)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{T \to \infty} \frac{1}{T} meas \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |L(s + i\tau, \chi) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Ši teorema tvirtina, kad yra be galo daug Dirichlė L funkcijos postūmių $L(s + i\tau, \chi)$, ε tikslumu aproksimuojančių duotą analizinę funkciją iš klasės $H(K)$, nes tų postūmių aibė turi teigiamą apatinį tankį. Teoremos įrodymo Voroninas nepateikė, jis rašė, kad įrodymas panašus į analogiškos teoremos įrodymą Rymano dzeta funkcijai. [4] monografijoje įrodymas yra pateiktas, bet šiek tiek silpnesniam universalumo teoremos variantui.

Yra žinomi ir jungtiniai Voronino universalumo teoremos variantai. Šiuo atveju kelių analizinių funkcijų rinkinys vienu metu yra aproksimuojamas Dirichlė L funkcijų postūmių rinkiniu. Pirmąją jungtinę universalumo teoremą neišreikštiniu pavidalu nagrinėdamas Dirichlė L funkcijų funkcinį nepriklausomumą įrodė pats Voroninas [13]. Panašius rezultatus gavo S. M. Gonekas ir B. Bagčis savo disertacijose [3] ir [1]. Mes formuluojame šiuolaikinį jungtinės universalumo teoremos Dirichlė L funkcijoms variantą, pateiktą [11] monografijoje.

3.2 teorema. *Tarkime, kad $\chi_1, ..., \chi_r$ yra kas du neekvivalentūs Dirichlė charakteriai, $K_1, ..., K_r \in \mathcal{K}$, o $f_1(s) \in H(K_1), ..., f_r(s) \in H(K_r)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$ yra* *teisinga nelygybė*

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}meas\left\{\tau\in[0,T]:\sup_{1\le j\le r}\sup_{s\in K_j}|L(s+i\tau,\chi_j)-f_j(s)|<\varepsilon\right\}>0.$$

Kai kurios 3.2 teoremos įrodymo dalys yra duotos [6] straipsnyje.

Įvade suformuluotos teoremos apie nulių skaičių įrodymui yra reikalinga universalumo teorema funkcijai, kurios nulių skaičius yra nagrinėjamas. Primename žymenis, kurie jau buvo paminėti įvade. Tegul $V>0$ yra bet koks skaičius. Apibrėžiame stačiakampį

$$D_V=\left\{s\in\mathbb{C}:\frac{1}{2}<\sigma<1,|t|<V\right\}.$$

$H(D_V)$ yra funkcijų, analizinių stačiakampyje D_V, erdvė su tolygaus konvergavimo kompaktinėse aibėse topologija. Šioje topologijoje seka $\{g_n(s)\}\subset H(D_V)$, kai $n\to\infty$, konverguoja į funkciją $g(s)\in H(D_V)$ tada ir tik tada, kai su kiekviena kompaktine aibe $K\subset D_V$ yra teisinga lygybė

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{s\in K}|g_n(s)-g(s)|=0.$$

Kaip įprasta, $H^r(D_V)=\underbrace{H(D_V)\times...\times H(D_V)}_{r}$. Be to, tegul

$$S_V=\{g\in H(D_V):g(s)\neq 0 \text{ arba } g(s)\equiv 0\}.$$

Dabar jau galime formuluoti mums reikalingą universalumo teoremą.

3.3 teorema. *Tarkime, kad $\chi_1,...,\chi_r$ yra kas du neekvivalentūs Dirichlė charakteriai, $K\in\mathcal{K}$, $f(s)\in H(K)$. Tegul $V>0$ yra toks, kad $K\subset D_V$, o $F:H^r(D_V)\to H(D_V)$ yra toks tolydus operatorius, kad su kiekvienu polinomu $p=p(s)$ aibė $(F^{-1}\{p\})\bigcap S_V^r\neq\varnothing$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon>0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}meas\left\{\tau\in[0,T]:\sup_{s\in K}|F(L(s+i\tau,\chi_i),...,L(s+i\tau,\chi_n))-f(s)|<\varepsilon\right\}>0.$$

Tarkime, kad $r=2$. Pateiksime operatoriaus, tenkinačio 3.3 teoremos sąlygas, pavyzdį. Tegul $F(g_1,g_2)=g_1^2+g_2^2$, $g_1,g_2\in H(D_V)$. Imame bet kokį polinomą $p(s)$. Tuomet egzistuoja tokia konstanta $c>0$, kad su visais $s\in D_V$ yra teisinga nelygybė $|p(s)|\le c$. Imame $C>c$ ir apibrėžiame du polinomus

$$p_1(s)=\frac{p(s)+C}{2\sqrt{C}},\ p_2(s)=\frac{p(s)-C}{2i\sqrt{C}}.$$

Tuomet iš C parinkimo turime, kad $p_1(s) \neq 0$ ir $p_2(s) \neq 0$ stačiakampyje D_V. Be to,

$$p_1^2(s) + p_2^2(s) = \left(\frac{p(s) + C}{2\sqrt{C}}\right)^2 + \left(\frac{p(s) - C}{2i\sqrt{C}}\right)^2 =$$

$$= \frac{p^2(s) + 2p(s)C + C^2}{4C} - \frac{p^2(s) - 2p(s)C + C^2}{4C} = \frac{4p(s)C}{4C} = p(s).$$

Tai reiškia, kad (p_1, p_2) yra aibės $(F^{-1}\{p\}) \bigcap S_V^2$ elementas. Todėl, jei χ_1, χ_2 yra neekvivalentūs charakteriai, tai funkcijai $L^2(s, \chi_1) + L^2(s, \chi_2)$ galioja universalumo 3.3 teorema. 3.3 teoremos įrodymas yra tikimybinis. Mes pasinaudosime kai kuriais rezultatais iš [6] straipsnio.

Tarkime, kad $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$ yra vienetinis apskritimas kompleksinėje plokštumoje, o $\mathcal{B}(S)$ yra erdvės S Borelio σ kūnas, t.y., σ kūnas, generuotas erdvės S atvirųjų aibių sistemos. Apibrėžiame aibę

$$\Omega = \prod_p \gamma_p,$$

čia sandauga imama pagal visus pirminius skaičius, o $\gamma_p = \gamma$ su kiekvienu pirminiu p. Primename, kad aibę Ω sudaro visos funkcijos, atvaizduojančios visų pirminių skaičių aibę vienetiniame apskritime. Yra žinoma [5], kad su sandaugos topologija [9] ir pataškinės daugybos operacija begaliniamatis toras Ω yra kompaktinė topologinė Abelio grupė. Todėl mačioje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ galima apibrėžti tikimybinį Haro matą m_H. Šis matas turi visas tikimybinių matų savybes, t.y., yra neneigiamas, $m_H(\Omega) = 1$ ir $m_H\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} m_H(A_k)$, jeigu aibės $A_k \in \mathcal{B}(\Omega)$ kas dvi neturi bendrų elementų, be to, papildomai jis dar pasižymi invariantiškumo savybe, kuri reiškia, kad su visomis aibėmis $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ ir kiekvienu $\omega \in \Omega$ yra teisingos lygybės

$$m_H(A) = m_H(\omega A) = m_H(A\omega).$$

Taigi, sukonstravome tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Tegul $\omega(p)$ yra elemento $\omega \in \Omega$ projekcija į koordinatinę erdvę γ_p, t.y.,

$$\omega = \{\omega(p) : p - \text{pirminis skaičius}\},$$

$H(D)$ yra analizinių juostoje D funkcijų erdvė su tolygaus konvergavimo kompaktinėse aibėse topologija, o $H^r(D) = \underbrace{H(D) \times ... \times H(D)}_{r}$. Tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ apibrėžiame $H^r(D)$ reikšmį atsitiktinį elementą $\underline{L}\left(s, \omega, \underline{\chi}\right), \underline{\chi} = (\chi_1, ..., \chi_r)$, formule

$$\underline{L}\left(s, \omega, \underline{\chi}\right) = (L(s, \omega, \chi_1), ..., L(s, \omega, \chi_r)),$$

čia

$$L(s, \omega, \chi_k) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi_k(p)\omega(p)}{p^s}\right)^{-1}, k = 1, ..., r.$$

Tegul $P_{\underline{L}}$ yra atsitiktinio elemento $\underline{L}(s, \omega, \underline{\chi})$ pasiskirstymas, t.y., $P_{\underline{L}}$ yra tikimybinis matas erdvėje $(H^r(D), \mathcal{B}(H^r(D)))$, apibrėžtas formule

$$P_{\underline{L}}(A) = m_H\left(\omega \in \Omega : \underline{L}(s, \omega, \underline{\chi}) \in A\right), A \in \mathcal{B}(H^r(D)).$$

Tuomet yra teisingas tvirtinimas [6].

3.4 lema. *Tegul*

$$P_T(A) = \frac{1}{T} meas\Big\{\tau \in [0, T] : (L(s + i\tau, \chi_1), ..., L(s + i\tau, \chi_r)) \in A\Big\}, A \in \mathcal{B}(H^r(D)).$$

Tuomet, kai $T \to \infty$, tai P_T silpnai konverguoja į matą $P_{\underline{L}}$.

Primename tikimybinių matų silpnąjį konvergavimą. Tegul P_n ir P yra tikimybiniai matai erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$. Sakome, kad P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P, jei su kiekviena realia tolydžia aprėžta funkcija f erdvėje S yra teisinga lygybė

$$\lim_{n\to\infty} \int_S f dP_n = \int_S f dP.$$

Mums yra reikalingas tvirtinimas, analogiškas 3.4 lemai, erdvėje $H^r(D_V)$. Šiam tikslui yra reikalinga viena silpnojo tikimybinių matų konvergavimo savybė. Tegul S_1 ir S_2 yra dvi metrinės erdvės, o funkcija $u : S_1 \to S_2$ yra $(\mathcal{B}(S_1), \mathcal{B}(\mathcal{S}_\in))$ mati, t.y., su kiekviena aibe $A \in \mathcal{B}(S_2)$ yra teisingas sąryšis $u^{-1}A \in \mathcal{B}(S_1)$. Tuomet kiekvienas tikimybinis matas P erdvėje $(S_1, \mathcal{B}(S_1))$ apibrėžia vienintelį tikimybinį matą Pu^{-1} erdvėje $(S_2, \mathcal{B}(S_2))$ formule $Pu^{-1}(A) = P(u^{-1}A), A \in \mathcal{B}(S_2)$. Dažnai yra naudinga tokia lema [2].

3.5 lema. *Tarkime, kad P_n ir P yra tikimybiniai matai erdvėje $(S_1, \mathcal{B}(S_1))$, $u : S_1 \to S_2$ yra tolydi funkcija ir P_n, kai $n \to \infty$ silpnai konverguoja į P. Tuomet ir $P_n u^{-1}$, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą Pu^{-1}.*

Tegul $V > 0$, o $P_{T,V}$ ir $P_{\underline{L},V}$ yra matų P_T ir $P_{\underline{L}}$ siauriniai į erdvę $(H^r(D_V), \mathcal{B}(H^r(D_V)))$, t.y., šių matų apibrėžimas yra toks pat kaip ir P_T ir $P_{\underline{L}}$, tiktai jie apibrėžiami aibėms iš $\mathcal{B}(H^r(D_V))$, o ne iš $\mathcal{B}(H^r(D))$.

3.6 lema. *Su kiekvienu $V > 0$ matas $P_{T,V}$, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą $P_{\underline{L},V}$.*

Įrodymas. Funkcija $u : H^r(D_V) \to H^r(D_V)$, $u(g_1(s), ..., g_r(s)) = (g_1(s), ..., g_r(s))|_{s \in D_V}$ yra tolydi, be to, kai $A \in \mathcal{B}(H^r(D_V))$, tai

$$P_{T,V}(A) = \frac{1}{T} meas\Big\{\tau \in [0,T] : u(L + i\tau, \chi_1), ..., L(s + i\tau, \chi_r)) \in A\Big\} =$$

$$\frac{1}{T} meas\Big\{\tau \in [0,T] : (L(s + i\tau, \chi_1), ..., L(s + i\tau, \chi_r)) \in u^{-1}A\Big\} = P_T(u^{-1}A).$$

Todėl $P_{T,V} = P_T u^{-1}$. Iš čia ir 3.4, ir 3.5 lemų bei funkcijos u tolydumo gauname lemos tvirtinimą.

Dabar įrodysime ribinę teoremą sudėtinei funkcijai.

3.7 lema. *Tarkime, kad $F : H^r(D_V) \to H(D_V)$ yra tolydus operatorius. Tuomet*

$$P_{T,V,F}(A) = \frac{1}{T} meas\Big\{\tau \in [0,T] : F(L(s + i\tau, \chi_1), ..., L(s + i\tau, \chi_r)) \in A\Big\}, \ A \in \mathcal{B}(H(D_V)),$$

kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą $P_{\underline{L},V} F^{-1}$.

Įrodymas. Įrodymas yra panašus į 3.6 lemos įrodymą. Turime, kad su $A \in \mathcal{B}(H(D_V))$

$$P_{T,V,F}(A) = \frac{1}{T} meas\Big\{\tau \in [0,T] : (L(s + i\tau, \chi_1), ..., L(s + i\tau, \chi_r)) \in F^{-1}A\Big\}.$$

Todėl $P_{T,V,F} = P_{T,V} F^{-1}$. Taigi, lemos tvirtinimas išplaukia iš lemų 3.5 ir 3.6 bei operatoriaus F tolydumo.

Toliau mums yra reikalinga tikimybinio mato atramos sąvoka. Tarkime, kad S yra separabili metrinė erdvė, o P yra tikimybinis matas erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$. Primename, kad minimali uždara aibė $S_P \subset S$, kuriai $P(S_P) = 1$, yra vadinama mato P atrama. Ji yra sudaryta iš tokių elementų $x \in S$, kurių kiekvienai atvirai aplinkai G yra teisinga nelygybė $P(G) > 0$.

3.8 lema. *Tarkime, kad $\chi_1, ..., \chi_r$ yra kas du neekvivalentūs Dirichlė charakteriai. Tuomet mato $P_{\underline{L},V}$ atrama yra aibė S_V^r.*

Lemos įrodymas yra duotas [6] straipsnyje, 13 lema.
Mums yra labai naudinga Mergeliano teorema, kurią formulujame atskira lema.

3.9 lema. *Tegul $K \subset \mathbb{C}$ yra kompaktinė aibė, turinti jungųjį papildinį, o funkcija $g(s)$ yra tolydi aibėje K ir analizinė jos viduje. Tuomet kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks polinomas $p(s)$, su kuriuo*

$$\sup_{s \in K} |g(s) - p(s)| < \varepsilon.$$

Lemos įrodymą galima rasti [7] straipsnyje.

3.10 lema. *Tarkime, kad $\chi_1, ..., \chi_r$ yra kas du neekvivalentūs Dirichlė charakteriai, o $F \in U_{r,V}$. Tuomet mato $P_{\underline{L},V} F^{-1}$ atrama yra aibė $H(D_V)$.*

Įrodymas. Imame bet kokį elementą $x \in H(D_V)$ ir bet kurią jo atvirąją aplinką G. Kadangi operatorius V yra tolydus, tai aibė $F^{-1}G$ (aibės G pirmavaizdis) yra atvira erdvėje $H^r(D_V)$. Yra žinoma [6], kad erdvėje $H(D_V)$ funkcijų aproksimavimas sutampa su jų aproksimavimu kompaktinėse aibėse, turinčiose jungųjį papildinį. Todėl galime taikyti 3.9 lemą. Jei $f \in G$, tai galime rasti tokį polinomą $p(s)$, kuris priklauso aibei G. Pagal klasės $U_{r,V}$ apibrėžimą turime, kad

$$\left(F^{-1}\{p\}\right) \bigcap S_V^r \neq \varnothing.$$

Kadangi $p \in G$, tai iš čia gauname, kad

$$\left(F^{-1}G\right) \bigcap S_V^r \neq \varnothing,$$

t.y., aibė $F^{-1}G$ yra netuščia, ji yra kurio nors elemento iš S_V^r atviroji aplinka. Tuomet pagal 3.8 lemą

$$P_{\underline{L},V} F^{-1}(G) = P_{\underline{L},V}(F^{-1}G) > 0.$$

Kadangi x ir G buvo parinkti bet kaip, gauname, kad mato $P_{\underline{L},V}F^{-1}$ atrama yra visa erdvė $H(D_V)$.

Mums yra reikalingas silpnojo tikimybinių matų konvergavimo ekvivalentas atvirųjų aibių terminais.

3.11 lema. *Tarkime, kad P_n ir P yra tikimybiniai matai erdvėje $(S, B(S))$. Tuomet P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į P tada ir tik tada, kai su kiekviena atvirąja aibe $G \subset S$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{n\to\infty} P_n(G) \geq P(G).$$

Lemos įrodymas yra duotas [2] monografijoje, 2.1 teorema.

3.3 teoremos *įrodymas.* Iš 3.9 lemos turime, kad egzistuoja toks polinomas $p(s)$, su kuriuo yra teisinga nelygybė

$$\sup_{s\in K} |f(s) - p(s)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.1}$$

Apibrėžiame aibę

$$G = \left\{ g \in H(D_V) : \sup_{s\in K} |p(s) - g(s)| < \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Tuomet G yra atviroji aibė. Todėl iš 3.7 ir 3.11 lemų išplaukia, kad

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas \Big\{ \tau \in [0, T] : F\left(L(s + i\tau, \chi_1), ..., L(s + i\tau, \chi_r)\right) \in G \Big\} \geq P_{\underline{L},V,F}(G). \tag{3.2}$$

Pagal 3.10 lemą polinomas $p(s)$ yra mato $P_{\underline{L},V,F}$ atramos elementas. Be to, G yra polinomo $p(s)$ atviroji aplinka. Todėl $P_{\underline{L},V,F}(G)>0$. Iš čia, (3.2) nelygybės ir aibės G apibrėžimo, gauname, kad

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{s\in K} |F\left(L(s + i\tau, \chi_1), ..., L(s + i\tau, \chi_r)\right) - p(s)| < \frac{\varepsilon}{2} \right\} > 0. \tag{3.3}$$

Lieka šioje nelygybėje pereiti nuo $p(s)$ prie funkcijos $f(s)$.

Tarkime, jog $\tau \in [0, T]$ tenkina nelygybę

$$\sup_{s\in K} |F\left(L(s + i\tau, \chi_1), ..., L(s + i\tau, \chi_r)\right) - p(s)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tuomet iš (3.1) nelygybės gauname, kad tokiems τ

$$\sup_{s\in K}\left|F\left(L(s+i\tau,\chi_1),...,L(s+i\tau,\chi_r)\right)-f(s)\right|\leq$$

$$\leq\sup_{s\in K}\left|F\left(L(s+i\tau,\chi_1),...,L(s+i\tau,\chi_r)\right)-p(s)\right|+\sup_{s\in K}|f(s)-p(s)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Taigi, turime, jog

$$\left\{\tau\in[0,T]:\sup_{s\in K}\left|F\left(L(s+i\tau,\chi_1),...,L(s+i\tau,\chi_r)\right)-p(s)\right|<\frac{\varepsilon}{2}\right\}\subset$$

$$\subset\left\{\tau\in[0,T]:\sup_{s\in K}\left|F\left(L(s+i\tau,\chi_1),...,L(s+i\tau,\chi_r)\right)-f(s)\right|<\varepsilon\right\}.$$

Todėl iš mato monotoniškumo ir (3.3) nelygybės gauname, jog

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}meas\left\{\tau\in[0,T]:\sup_{s\in K}\left|F\left(L(s+i\tau,\chi_1),...,L(s+i\tau,\chi_r)\right)-f(s)\right|<\varepsilon\right\}>0.$$

Teorema įrodyta.

4 Pagrindinė teorema

Primename, kad kuriai nors funkcijai $g(s)$ tvirtinimas $A(\sigma_1, \sigma_2; c, T)$ reiškia, kad su visais $\sigma_1, \sigma_2, \frac{1}{2} < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$, egzistuoja tokia konstanta $c > 0$, su kuria, pakankamai dideliems T funkcija $f(s)$ turi daugiau negu cT nulių stačiakampyje

$$\{s \in \mathbb{C} : \sigma_1 < \sigma < \sigma_2, 0 < t < T\}.$$

Dabar formuluojame teoremą apie funkcijos $F(L(s, \chi_1), ..., L(s, \chi_r))$ nulių skaičiaus įvertį.

4.1 teorema. *Tarkime, kad $\chi_1, ..., \chi_r$ yra kas du neekvivakentūs Dirichlė charakteriai, o operatorius $F : H^r(D_V) \to H(D_V)$ priklauso klasei $U_{r,V}$ su pakankamai dideliais V. Tuomet egzistuoja tokia konstanta $c = c(\sigma_1, \sigma_2, \chi_1, ..., \chi_r, F) > 0$, su kuria funkcijai*

$$F(L(s, \chi_1), ..., L(s, \chi_r))$$

su pakankamai dideliais $T < V$ yra teisingas tvirtinimas $A(\sigma_1, \sigma_2; c, T)$.

Teoremos įrodymas remiasi 3.3 teorema ir Rušė teorema, kurią formuluojame 4.2 lemos pavidalu.

4.2 lema. *Tarkime, kad funkcijos $g_1(s)$ ir $g_2(s)$ yra analizinės ant paprastojo uždarojo kontūro L ir jo viduje, ir ant kontūro L galioja nelygybės $g_1(s) \neq 0$ ir $|g_2(s)| < |g_1(s)|$. Tuomet funkcijos $g_1(s)$ ir $g_1(s) + g_2(s)$ turi tą patį nulių skaičių kontūro L viduje.*

Lemos įrodymą galima rasti, pavyzdžiui, [8] vadovėlyje.

4.1 teoremos *įrodymas.* Tegul

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \text{ ir } \rho = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}.$$

Taikome 3.3 teoremą su $K = \{s \in \mathbb{C} : |s - \sigma_0| \leq \rho\}$ ir $f(s) = s - \sigma_0$. Tuomet iš 3.3 teoremos išplaukia, kad su kiekvienu $\varepsilon > 0$ yra teisinga nelygybė

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |F(L(s + i\tau, \chi_1), ..., L(s + i\tau, \chi_r)) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Ši nelygybė reiškia, kad matas tokių $\tau \in [0, T]$, kuriems galioja nelygybė

$$\sup_{s \in K} |F\left(L(s + i\tau, \chi_1), ..., L(s + i\tau, \chi_r)\right) - f(s)| < \varepsilon, \tag{4.1}$$

yra didesnis už cT, su kuria nors teigiama konstanta c, priklausančia nuo $\sigma_1, \sigma_2, \chi_1, ..., \chi_r$ ir F, jei tik T yra pakankamai didelis. Dabar pareikalaujame, kad skaičiui ε galiotų nelygybės

$$0 < \varepsilon < \sup_{|s-\sigma_0|=\rho} |f(s)| = \rho.$$

Tuomet funkcijos $f(s)$ ir $F(L(s + i\tau, \chi_1), ..., L(s + i\tau, \chi_r)) - f(s)$ skritulyje K tenkina 4.2 lemos sąlygas. Jos yra analizinės tame skritulyje, $f(s) \neq 0$ ant to skritulio kontūro $|s - \sigma_0| = \rho$, be to, ant šio kontūro

$$|F(L(s + i\tau, \chi_1), ..., L(s + i\tau, \chi_r)) - f(s)| < \varepsilon < |f(s)|.$$

Taigi, pagal 4.2 lemą funkcijos $f(s)$ ir $F(L(s + i\tau, \chi_1), ..., L(s + i\tau, \chi_r)) - f(s) + f(s) = F(L(s + i\tau, \chi_1), ..., L(s + i\tau, \chi_r))$ turi tą patį nulių skaičių skritulio K viduje. Tačiau funkcija $f(s) = s - \sigma_0$ tame skritulyje turi tiksliai vieną nulį $s = \sigma_0$. Todėl ir funkcija $F(L(s + i\tau, \chi_1), ..., L(s + i\tau, \chi_r))$ taip pat turi vieną nulį skritulio K viduje. Tačiau, iš kitos pusės, matėme, kad matas tokių $\tau \in [0, T]$, kurie tenkina (4.1) nelygybę, yra didesnis už cT. Taigi, funkcija $F(L(s, \chi_1), ..., L(s, \chi_r))$ turi daugiau negu cT nulių stačiakampyje $\{s \in \mathbb{C} : \sigma_1 < \sigma < \sigma_2, 0 < t < T\}$.

Teorema įrodyta.

An estimate of the number of zeros of one function related to Dirichlet L - functions

Jurgita Petuškinaitė

(Summary)

For $V > 0$, let $D_V = \left\{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1, |t| < V\right\}$, and let $H(D_V)$ denote the space of functions analytic on D_V endowed with the topology of uniform convergence on compacta. Moreover, let

$$S_V = \{g \in H(D_V) : g(s) \neq 0 \text{ or } g(s) \equiv 0\}.$$

Denote by $U_{r,V}$ the class of continuous operators $F : H^r(D_V) \to H(D_V)$ such that, for every polynomial $p = p(s)$, the set

$$\left(F^{-1}\{p\}\right) \bigcap S_V^r$$

is non-empty.

As usual, denote by $L(s, \chi)$ the Dirichlet L - function with a Dirichlet character χ.

In the master work, we prove the following theorem.

Suppose that $\chi_1, ..., \chi_r$ are pairwise non-equivalent Dirichlet characters, and $F \in U_{r,V}$ with sufficiently large V. Then, for every $\sigma_1, \sigma_2, \frac{1}{2} < \sigma_1, \sigma_2 < 1$, there exists a constant $c = c(\sigma_1, \sigma_2, \chi_1, ..., \chi_r, F) > 0$ such that, for sufficiently large T, $T < V$, the function $F(L(s, \chi_1), ..., L(s, \chi_r))$ has more than cT zeros lying in the rectangle

$$\{s \in \mathbb{C} : \sigma_1 < \sigma < \sigma_2, \ 0 < t < T\}.$$

For the proof of the above theorem, an universality theorem on the approximation of analytic functions by shifts $F(L(s + i\tau, \chi_1), ..., L(s + i\tau, \chi_r))$, $\tau \in \mathbb{R}$, is applied.

Literatūra

[1] B. Bagchi, *The statistical behaviour and universality properties of the Riemann zeta-function and other allied Dirichlet series*, Ph. D. Thesis, Indian Statistical Institute, Calcutta, 1981.

[2] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, Wiley, New York, 1968.

[3] S.M. Gonek, *Analytic properties of zeta and L-functions*, Thesis, University of Michigan, 1979.

[4] A.A. Karatsuba, S.M. Voronin, *The Riemann Zeta - Function*, Walter de Gruyter, New York, 1992.

[5] A. Laurinčikas, *Limit Theorems for the Riemann Zeta - Function*, Kluwer, Dordrecht, Boston, London, 1996.

[6] A. Laurinčikas, *On joint universality of Dirichlet L – functions*, Chebysh. sb. 12(1) (2011), 124 - 139.

[7] S.N. Mergelyan, *Uniform approximation to functions of a complex variable*, Usp. Mat. Nauk 7 (1952), 31 – 122 (rusų kalba).

[8] A. Nagelė, L. Papreckienė, *Kompleksinio kintamojo funkcijų teorija*, Žara, Vilnius, 1996.

[9] V. Paulauskas, A. Račkauskas, *Funkcinė analizė*, I knyga. Erdvės, UAB „Vaistų žinios", Vilnius, 2007.

[10] K. Prachar, *Raspredelenie prostych čisel*, Mir, Moskva, 1967 (rusų kalba).

[11] J. Steuding, *Value - Distribution of L - Functions*, Lecture Notes Math. 1877, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2007.

[12] S.M. Voronin, *Theorem on the „universality" of the Riemann rate - function*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 39 (1975, 475-489 (rusų kalba); Math. USSR Izv. 9 (1975), 443-453.

[13] S.M. Voronin, *On the functional independence of Dirichlet L - functions*, Acta Arith. 27 (1975), 443 - 453 (rusų kalba).