VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

TIKIMYBIŲ TEORIJOS IR SKAIČIŲ TEORIJOS KATEDRA

**Mindaugas Svitojus**

# Rymano dzeta funkcijos antrojo momento liekanos vidurkis

Magistro baigiamasis darbas

Leidžiu ginti ..............................

Darbo vadovas **prof. Antanas Laurinčikas**

**Vilnius 2017**

# Turinys

# Įvadas

Rymano dzeta funkcija $\zeta(s)$, $s = \sigma + it$, yra vienas iš svarbiausių ir paslaptingiausių analizinių matematikos objektų. Pusplokštumėje $\sigma > 1$ ji yra apibrėžiama labai paprasta Dirichlė eilute

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}$$

ir yra meromorfiškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą. Ji turi vienintelį paprastąjį polių taške $s = 1$ su reziduumu 1. Funkciją $\zeta(s)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ galime apibrėžti ir taip vadinama Oilerio sandauga

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

pagal visus pirminius skaičius $p$. Funkciją $\zeta(s)$ jau XVIII a. viduryje nagrinėjo L. Oileris, tačiau jis laikė, kad kintamasis $s$ yra realus. $\zeta(s)$, kaip kompleksinio kintamojo funkciją, XIX a. viduryje pradėjo nagrinėti vokiečių matematikas B. Rymanas ir nurodė būdą kaip ją galima pritaikyti nagrinėjant pirminių skaičių pasiskirstymą aibėje $\mathbb{N}$. Funkcijos $\zeta(s)$ ryšys su pirminiais skaičiais jau yra matomas iš Oilerio tapatybės, tačiau Rymanas pasiūlė originalų būdą, kaip naudojant funkciją $\zeta(s)$, galima gauti pirminių skaičių, neviršijančių $x$, skaičiaus

$$\pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1$$

asismptotinę formulę, kai $x \longrightarrow \infty$. Iki Rymano buvo tik žinoma, kad su konstantomis $0 < c_1 < c_2$ yra teisingos nelygybės

$$\frac{c_1 x}{\log x} \leqslant \pi(x) \leqslant \frac{c_2 x}{\log x}, \quad x \geqslant 2.$$

Šios nelygybės nurodo teisingą funkcijos $\pi(x)$ augimo eilę, kai $x \to \infty$, tačiau matematikų svajonė buvo įrodyti, kad

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\int\limits_2^x \frac{du}{\log u}} = 1. \tag{1.1}$$

Šį tvirtinimą žinojo P. Čebyšovas, tačiau jis nemokėjo įrodyti ribos egzistavimo. Rymanas pilnai neįrodė (1.1) lygybės, tačiau jo pasiūlytas įrodymo kelias [9] buvo teisingas. Pasirodė, kad (1.1) lygybės įrodyme svarbų vaidmenį atlieka funkcijos $\zeta(s)$ nuliai, tai yra, tokios $s$ reikšmės, su kuriomis $\zeta(s) = 0$. Įrodę, kad $\zeta(s) \neq 0$ srityje

$$\sigma > 1 - \frac{c}{\log(|t| + 2)}$$

su kuria nors konstanta $c > 0$, 1896 m. Ž. Adamaras [2] ir Š. Valė Pusenas [10] nepriklausomai vienas nuo kito įrodė (1.1) lygybę. Tai buvo vienas iš svarbiausių matematikoje rezultatų, parodantys funkcijos $\zeta(s)$ svarbą. Vėliau pasirodė, kad funkcija $\zeta(s)$ turi įvairių pritaikymų ne tik matematikoje, bet ir kituose gamtos moksluose, pavyzdžiui, kvantinėje mechanikoje. Todėl nenuostabu, kad Rymano dzeta funkcijos nagrinėjimui buvo ir yra skiriamas didelis dėmesys.

Be abejonės, centrinė funkcijos $\zeta(s)$ teorijos problema yra jos nulių išsidėstymas. Ši funkcija turi trivialiuosius nulius taškuose $s = -2m, m \in \mathbb{N}$, tačiau ji turi ir be galo daug netrivilialiųjų nulių, kurie yra kompleksiniai ir guli kritinėje juostoje

$$[s \in \mathbb{C} : 0 \leqslant \sigma \leqslant 1].$$

Garsioji Rymano hipotezė tvirtina, kad visi jie yra kritinėje tiesėje $\sigma = \frac{1}{2}$. Visi kompiuteriniai skaičiavimai remia Rymano hipotezę.

Svarbi yra ir Rymano dzeta funkcijos momentų problema. Momentais yra vadinami integralai

$$I_\sigma(T, m) = \int_2^T |\zeta(\sigma + \imath t)|^{2m} dt, \quad \sigma \geqslant \frac{1}{2}, \quad m \geqslant 0.$$

Reikia rasti dydžių $I_\sigma(T, m)$ asimptotines formules arba bent įverčius, kai $T \to \infty$. Įvairiuose taikymuose tokio tipo rezultatai pakeičia sunkiai surandamas individualias funkcijos $\zeta(s)$ reikšmes. Pavyzdžiui, garsi Lindeliofo hipotezė, tvirtinanti, kad su kiekvienu $\epsilon > 0$ yra teisingas įvertis

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = O\left(|t|^\epsilon\right), \quad |t| \geqslant t_0 > 0,$$

yra ekvivalenti momentų įverčiui

$$I_{\frac{1}{2}}(T, m) = O\left(T^{1+\epsilon}\right)$$

su visais $m \in \mathbb{N}$. Primename, kad lygybė $f(x) = O(g(x)), g(x) > 0, x \in X$, reiškia, jog egzistuoja tokia konstanta, $c > 0$, kad su visais $x \in X$ yra teisinga nelygybė

$$|f(x)| \leqslant cg(x).$$

Bene daugiausia dėmesio yra skiriama antrajam momentui $I_\sigma(T,1)$. Ž. Hardis ir Dž. Littlewood'as įrodė [3], kad

$$\lim_{T\to\infty}\frac{I_{\frac{1}{2}}(T,1)}{T\log T}=1.$$

Daugelis autorių šią formulę tikslino ir tebetikslina iki šiol. Tegul

$$E(T)=I_{\frac{1}{2}}(T,1)-T\log\frac{T}{2\pi}-(2\gamma_0-1)T,$$

čia

$$\gamma_0=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{m\leqslant n}\frac{1}{m}-\log n\right)=0,577215...$$

yra Oilerio konstanta. Yra stengiamasi gauti kuo tikslesnį įvertį funkcijai $E(T)$, kai $T\longrightarrow\infty$. Tiksliausias tokio tipo rezultatas buvo neseniai gautas [11] darbe ir turi pavidalą

$$E(T)=O\left(T^{\frac{131}{416}}(\log T)^{\frac{32587}{8320}}\right).$$

Pastebime, kad kiekvienas funkcijos $E(T)$ įverčio patikslinimas reikalauja didelių pastangų ir naujų metodų. Yra nagrinėjami ir funkcijos $E(T)$ vidurkiai

$$\int_2^T E_\sigma^2(t)dt.$$

Analogiškos problemos yra susijusios ir su momentų $I_\sigma(T,1)$, kai $\sigma>\frac{1}{2}$. Yra gerai žinoma [5], kad

$$\lim_{T\longrightarrow\infty}\frac{I_\sigma(T,1)}{\zeta(2\sigma)T+(2\pi)^{2\sigma-1}T^{2-2\sigma}\frac{\zeta(2-2\sigma)}{2-2\sigma}}=1.$$

Tegul

$$E_\sigma(T,1)=I_\sigma(T,1)-\zeta(2\sigma)T-(2\pi)^{2\sigma-1}T^{2-2\sigma}\frac{\zeta(2-2\sigma)}{2-2\sigma}$$

Yra nagrinėjami funkcijos $E_\sigma(T,1)$ įverčiai ir vidurkiai [2]. Tarkime, kad

$$\sigma_\alpha(m)=\sum_{d|m}d^\alpha$$

yra apibendrintoji daliklių funkcija. Straipsnyje [8] buvo suformuluota teorema apie vidurkį

$$\int_2^T E_\sigma^2(t,1)dt.$$

ir buvo parašyta, kad jos įrodymas yra analogiškas atvejo $\sigma=\frac{1}{2}$ įrodymui. Magistro darbo tikslas yra atstatyti tos teoremos iš [8] pilną įrodymą. Taigi, magistro darbe bus įrodytas toks tvirtinimas.

Tegul $\sigma$ yra fiksuotas, $\frac{1}{2}<\sigma<\frac{3}{4}$. Tuomet yra teisingas įvertis

$$\int_2^T E_\sigma^2(t,1)dt=\frac{2}{5-4\sigma}(2\pi)^{2\sigma-\frac{3}{2}}T^{\frac{5}{2}-2\sigma}\sum_{m=1}^\infty\frac{\sigma_{1-2\sigma}^2(m)}{m^{\frac{5}{2}-2\sigma}}+O\left(T^{\frac{7}{4}-\sigma}\log T\right).$$

# 2 skyrius

# Formulės Rymano dzeta funkcijos 2 momento liekanai

Jau įvade minėjome, kad didelis analizinės skaičių teorijos tirinėtojų dėmesys buvo ir yra skiriamas funkcijos $E(T)$ įverčiams. Kad būtų galima gauti įverčius, yra reikalinga kuo tikslesnė funkcijos $E(T)$ išraiška elementariomis funkcijomis. Tai pavyko padaryti F. V. Atkinsonui 1949 m. [1]. Jis išreiškė funkciją 2 baigtinių sumų suma su gana mažu liekamuoju nariu. Dabar ši funkcijos $E(T)$ formulė yra vadinama Atkinsono formule. Atkinsono formulė yra pakankamai ilga, todėl jos trumpinimui yra naudojami kai kurie žymenys. Kaip visada,

$$d(m) = \sum_{d|m} 1, \quad m \in \mathbb{N},$$

yra daliklių funkcija. Tegul

$$\operatorname{arsinh}(x) = \log\left(\sqrt{1+x^2} + x\right)$$

ir

$$f(T,m) = 2T \operatorname{arsinh}\left(\sqrt{\frac{\pi m}{2T}} + \sqrt{\pi^2 m^2 + 2\pi m T} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Apibrėžiamia dvi sumas

$$\Sigma_1(T) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m \leqslant N} \frac{(-1)^m d(m)}{\sqrt{m}} \left(\operatorname{arsinh}\left(\sqrt{\frac{\pi m}{2\pi}}\right)\right)^{-1} \left(\frac{1}{4} + \frac{T}{2\pi m}\right)^{-\frac{1}{4}} \cos(f,(T,m))$$

ir

$$\Sigma_2(T) = \sum_{m \leqslant N_1} \frac{d(m)}{\sqrt{m}} \left(\log \frac{T}{2\pi m}\right)^{-1} \cos\left(T \log \frac{T}{2\pi m} + \frac{\pi}{4} - T\right).$$

Šiose sumose skaičius $N$ yra apibrėžtas nelygybėmis $c_1T < N < c_2T$ su konstantomis $0 < c_1 < c_2$, ir

$$N_1 = N_1(T, N) = \frac{T}{2\pi} + \frac{N}{2} - \sqrt{\frac{NT}{2\pi} + \frac{N^2}{4}}.$$

Tuomet F. Atkinsonas įrodė, kad

$$E(T) = \Sigma_1(T) - \Sigma_2(T) + O\left(\log^2 T\right). \tag{2.1}$$

Tegul $\sigma$, $\frac{1}{2} < \sigma < \frac{3}{4}$, yra fiksuotas skaičius. Funkcijos $E_\sigma(T, 1)$ nagrinėjimui irgi yra reikalinga formulė, analogiška (2.1) formulei. Ji buvo gauta [8] darbe. Šiuo atveju vietoj daliklių funkcijos $d(m)$ yra naudojama apibendrintoji daliklių funkcija $\sigma_\alpha(m)$. Apibrėžiame sumas

$$\Sigma_{1,\sigma}(T) = 2^{\sigma-1}\left(\frac{T}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}-\sigma} \sum_{m\leqslant N} \frac{(-1)^m \sigma_{1-2\sigma}(m)}{m^{1-\sigma}} \left(\operatorname{arsinh}\left(\sqrt{\frac{\pi m}{2T}}\right)\right)^{-1} \left(\frac{1}{4} + \frac{T}{2\pi m}\right)^{-\frac{1}{4}} \cos(f(T, m))$$

ir

$$\Sigma_{2,\sigma}(T) = -2\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}-\sigma} \sum_{m\leqslant N_1} \frac{\sigma_{1-2\sigma}(m)}{m^{1-\sigma}} \left(\log\frac{T}{2\pi m}\right)^{-1} \cos\left(T\log\frac{T}{2\pi m} + \frac{\pi}{4} - T\right).$$

Tuomet yra teisingas toks tvirtinimas [8].

**2.1 lema.** *Tarkime, kad $\sigma$, $\frac{1}{2} < \sigma < \frac{3}{4}$, yra fiksuotas skaičius. Tuomet yra teisingas įveris*

$$E_\sigma(T, 1) = \Sigma_{1,\sigma}(T) + \Sigma_{2,\sigma}(T) + O(\log T),$$

*čia konstanta simbolyje $O$, priklauso tik nuo $\sigma$.*

# 3 skyrius

# Pagalbiniai įverčiai

Įvade suformuluotos teoremos apie funkcijos $E_\sigma(T,1)$ vidurkį įrodymas yra pakankamai sudėtingas, yra reikalingi įvairūs įverčiai, daugumoj susiję su apibendrintąja daliklių funkcija $\sigma_\alpha(m)$. Šiame skyrelyje pateiksime keletą tokių įverčių.

**3.1 lema.** *Tarkime, kad $g_j(t), \quad j=1,...,k$, ir $f(t)$ yra realios tolydžios monotoniškos funkcijos intervale $[a,b]$, o funkcija $f(t)$ dar turi tolydžią monotonišką išvestinę tame intervale. Jeigu intervale $[a,b]$ galioja nelygybės $|g_j(t)| \leqslant M_j, \quad j=1,...,k$ ir $f'(t) \geqslant M_0^{-1}$, tai tuomet yra teisinga nelygybė*

$$\left| \int\limits_a^b \prod_{j=1}^k g_j(t) e^{2\pi i f(t)} dt \right| \leqslant 2^{k+3} \prod_{j=0}^k M_j.$$

Lema yra 15.3 lema iš [5] monografijos.

Kitiems įverčiams gauti primename dalinio sumavimo formulę. Tegul $a_m$ yra kompleksiniai skaičiai, o

$$A(u) = \sum_{m \leqslant u} a_m.$$

**3.2 lema.** *Tarkime, kad funkcija $g(t)$ turi tolydžią išvestinę intervale $[1,x]$. Tuomet*

$$\sum_{m \leqslant x} a_m g(m) = A(x)g(x) - \int\limits_1^x A(u)g'(u)du.$$

Lema yra vienas iš dalinio sumavimo formulių variantų, jos įrodymas yra duotas [7] knygelėje.

Tolesnėse lemose laikysime, kad $\frac{1}{2} < \sigma < \frac{3}{4}$.

**3.3 lema.** *Yra teisingas įvertis*

$$\sum_{m\leqslant x}\frac{\sigma^2_{1-2\sigma}(m)}{m^{2-2\sigma}}=O\left(x^{2\sigma-1}\right).$$

**Įrodymas.** Primename, kad aritmetinė funkcija $g(m), m\in\mathbb{N}$, yra vadinama multiplikativiąja, jeigu $g(mn)=g(m)g(n)$ ir $g(1)=1$ su visais tarpusavyje pirminiais $m,n\in\mathbb{N}$. Remsimės bendra teorema apie multiplikatyvosios funkcijos $g(m)$, kuriai eilutė

$$\sum_p\frac{|g(p)-1|\log p}{p}$$

čia sumuojama pagal pirminius skaičius, konverguoja, vidurkį

$$\sum_{m\leqslant x}g(m),\quad x\longrightarrow\infty. \tag{3.1}$$

Tokia teorema yra įrodyta [6] darbe, ji duoda asimptotinę formulę, kai $x\longrightarrow\infty$, (3.1) vidurkiui. Iš šios formulės išplaukia, kad

$$\sum_{m\leqslant x}g(m)=O(x),\quad x\longrightarrow\infty.$$

Mes patikrinsime, ar minėtą formulę galima pritaikyti sumai

$$\sum_{m\leqslant x}\sigma^2_{1-2\sigma}(m).$$

Taigi, mūsų atveju $g(m)=\sigma^2_{1-2\sigma}(m)$. Iš funkcijos $\sigma_{1-2\sigma}(m)$ apibrėžimo randame, kad

$$\sigma_{1-2\sigma}(p)=\sum_{d|p}d^{1-2\sigma}=p^{1-2\sigma}+1.$$

Todėl turime tikrinti eilutes

$$\begin{aligned}\sum_p\frac{\left|\sigma^2_{1-2\sigma}(p)-1\right|\log p}{p}&=\sum_p\frac{\left|\left(p^{1-2\sigma}+1\right)^2-1\right|\log p}{p}=\\&=\sum_p\frac{|2p^{1-2\sigma}+p^{2-4\sigma}|\log p}{p}=\sum_p\frac{2\log p}{p^{2\sigma}}+\sum_p\frac{\log p}{p^{4\sigma-1}}.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Mūsų atveju $\sigma>\frac{1}{2}$, todėl $1<2\sigma$ ir $1<4\sigma$. Vadinasi abi eilutės (3.2) lygybėje konverguoja. Todėl pritaikę [6] darbo teoremą, gauname, kad

$$\sum_{m\leqslant x}\sigma^2_{1-2\sigma}(m)=O(x).$$

Dabar taikome 3.2 lemą ir randame, kad

$$\begin{aligned}\sum_{m\leqslant x}\frac{\sigma^2_{1-2\sigma}(m)}{m^{2-2\sigma}}&=\frac{1}{x^{2-2\sigma}}\sum_{m\leqslant x}\sigma^2_{1-2\sigma}(m)-(2\sigma-2)\int\limits_1^x\sum_{m\leqslant u}\sigma^2_{1-2\sigma}(m)\frac{du}{u^{3-2\sigma}}=\\&=O\left(x^{2\sigma-1}\right)+O\left(\int\limits_1^x u^{2\sigma-2}du\right)=O\left(x^{2\sigma-1}\right)+O\left(x^{2\sigma-1}\right)=O\left(x^{2\sigma-1}\right).\end{aligned}$$

**3.4 lema.** *Yra teisingas įvertis*

$$\sum_{m\leqslant x}\frac{\sigma_{1-2\sigma}(m)}{m^{2-2\sigma}}=O\left(x^{2\sigma-1}\right).$$

**Įrodymas.** Kadangi

$$\sum_p\frac{|\sigma_{1-2\sigma}(p)-1|\log p}{p}=\sum_p\frac{|1+p^{1-2\sigma}-1|\log p}{p}=\sum_p\frac{\log p}{p^{2\sigma}}<\infty,$$

tai tolesnis lemos įrodymas yra analogiškas 3.3 lemos įrodymui.

**3.5 lema.** *Su kiekvienu $\varepsilon>0$ yra teisingas įvertis*

$$\sum_{\substack{m\leqslant x\\ m\neq n}}\sum_{n\leqslant x}\frac{\sigma_{1-2\sigma}(m)\sigma_{1-2\sigma}(n)}{(mn)^{\frac{5}{4}-\sigma}}\left|\sqrt{m}-\sqrt{n}\right|^{-1}=O(x^{2\sigma-1+\varepsilon}).$$

**Įrodymas.** Kairiąją lemos įverčio pusę užrašome pavidalu

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{m\leqslant x\\ m\neq n}}\sum_{n\leqslant x}\frac{\sigma_{1-2\sigma}(m)\sigma_{1-2\sigma}(n)}{(mn)^{\frac{5}{4}-\sigma}}\left|\sqrt{m}-\sqrt{n}\right|^{-1}=\\ =O\left(\sum_{n<m\leqslant x}\frac{\sigma_{1-2\sigma}(m)\sigma_{1-2\sigma}(n)}{(mn)^{\frac{5}{4}-\sigma}}\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)^{-1}\right)=O\left(\sum_{n\leqslant\frac{m}{2}}+\sum_{n>\frac{m}{2}}\right).\end{aligned}\tag{3.3}$$

Pasinaudoję 3.2 ir 3.4 lemomis, randame, kad

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant\frac{m}{2}}=\sum_{m\leqslant x}\frac{\sigma_{1-2\sigma}(m)}{m^{\frac{5}{4}-\sigma}}\sum_{n\leqslant\frac{m}{2}}\frac{\sigma_{1-2\sigma}(n)}{n^{\frac{5}{4}-\sigma}}\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)(m-n)^{-1}=\\ =\sum_{m\leqslant x}\frac{\sigma_{1-2\sigma}(m)}{m^{\frac{3}{4}-\sigma}}\sum_{n\leqslant\frac{m}{2}}\frac{\sigma_{1-2\sigma}(n)}{n^{\frac{5}{4}-\sigma}}(m-n)^{-1}=\sum_{m\leqslant x}\frac{\sigma_{1-2\sigma}(m)}{m^{\frac{3}{4}-\sigma}}\sum_{n\leqslant\frac{m}{2}}\frac{\sigma_{1-2\sigma}(n)}{n^{\frac{9}{4}-\sigma}}=\\ =\sum_{m\leqslant x}\frac{\sigma_{1-2\sigma}(m)}{m^{\frac{3}{4}-\sigma}}m^{\sigma-\frac{5}{4}}=\sum_{m\leqslant x}\frac{\sigma_{1-2\sigma}(m)}{m^{2-2\sigma}}=x^{2\sigma-1},\end{aligned}\tag{3.4}$$

nes, kai $n\leqslant\frac{m}{2}$, tai turime, kad $m-n\geqslant\frac{m}{2}$ todėl galioja įvertis $(m-n)^{-1}=O(m^{-1})$. Be to, su kiekvienu $\varepsilon>0$ galioja įvertis

$$\sum_{n>\frac{m}{2}}=O\left(\sum_{m\leqslant x}\frac{\sigma_{1-2\sigma}(m)}{m^{2-2\sigma}}\sum_{\frac{m}{2}<n<m}\frac{\sigma_{1-2\sigma}(n)}{m-n}\right)=O\left(x^{2\sigma-1+\varepsilon}\right).\tag{3.5}$$

Čia mes vėl panaudojame 3.4 lemos įvertį. Įverčiai (3.3), (3.4) ir (3.5) duoda lemos tvirtinimą.

**3.6 lema.** *Yra teisingas įvertis*

$$\sum_{\substack{m\leqslant x\\ m\neq n}}\sum_{n\leqslant x}\frac{\sigma_{1-2\sigma}(m)\sigma_{1-2\sigma}(n)}{(mn)^{1-\sigma}}\left|\log\frac{m}{n}\right|^{-1}=x^{2\sigma}\log x.$$

**Įrodymas.** Monografijoje [5] yra gautas įvertis

$$\sum_{m\leqslant x}\left|\log\frac{m}{n}\right|^{-1}=O(x+n\log x).$$

Todėl, remiantis 3.3 lema, kairiajai lemos įverčio pusei galioja įvertis

$$\sum_{\substack{m\leqslant x\\ m\neq n}}\sum_{n\leqslant x}\left(\frac{\sigma^2_{1-2\sigma}(m)}{m^{2-2\sigma}}+\frac{\sigma^2_{1-2\sigma}(n)}{n^{2-2\sigma}}\right)\left|\log\frac{m}{n}\right|^{-1}=\sum_{\substack{m\leqslant x\\ m\neq n}}\sum_{n\leqslant x}\left(\frac{\sigma^2_{1-2\sigma}(m)}{m^{2-2\sigma}}\right)\left|\log\frac{m}{n}\right|^{-1}=$$

$$=\sum_{m\leqslant x}\left(\frac{\sigma^2_{1-2\sigma}(m)}{m^{2-2\sigma}}\right)\sum_{n\leqslant x}\left|\log\frac{m}{n}\right|^{-1}=x^{2\sigma}+\sum_{m\leqslant x}\left(\frac{\sigma^2_{1-2\sigma}(m)}{m^{1-2\sigma}}\right)\log x=x^{2\sigma}\log x.$$

# 4 skyrius

# Vidurkių teoremos įrodymas

Šiamia skyrelyje įrodysime pagrindinę magistro darbo teoremą. Primename, kad

$$E_\sigma(T,1) = I_\sigma(T,1) - \zeta(2\sigma)T - (2\pi)^{2\sigma-1}T^{2-2\sigma}\frac{\zeta(2-2\sigma)}{2-2\sigma}.$$

Tuomet yra teisingas tvirtinimas.

**4.1 teorema.** *Tarkime, kad $\sigma$, $\frac{1}{2} < \sigma < \frac{3}{4}$, yra fiksuotas. Tuomet yra teisinga formulė*

$$\int\limits_2^T E_\sigma^2(t,1)dt = \frac{2}{5-4\sigma}(2\pi)^{2\sigma-\frac{3}{2}}T^{\frac{5}{2}-2\sigma}\sum_{m=1}^\infty \frac{\sigma_{1-2\sigma}^2(m)}{m^{\frac{5}{2}-2\sigma}} + O\left(T^{\frac{7}{4}-\sigma}\log T\right).$$

**Įrodymas.** Remdamiesi 2.1 lema, turime, jog

$$\int\limits_T^{2T} E_\sigma^2(t,1)dt = \int\limits_T^{2T} \Sigma_{1,\sigma}^2(t)dt + 2\int\limits_T^{2T} \Sigma_{1,\sigma}(t)(\Sigma_{2,\sigma}(t)+R(t))dt + \int\limits_T^{2T}(\Sigma_{2,\sigma}(t)+R(t))^2dt. \quad (4.1)$$

Pažymime

$$g_1(t,m) = \left(\operatorname{arsinh}\sqrt{\frac{\pi m}{2t}}\right)^{-1},$$

$$g_2(t,m) = \left(\frac{1}{4}+\frac{t}{2\pi m}\right)^{-\frac{1}{4}}$$

ir

$$f(t,m) = 2t\operatorname{arsinh}\left(\sqrt{\frac{\pi m}{2t}}\right) + \sqrt{t^2m^2+2\pi mt} - \frac{\pi}{4}.$$

Dabar sumą $\Sigma_{1,\sigma}$ galime užrašyti pavidalu

$$\Sigma_{1,\sigma}(t) = 2^{\sigma-1}\left(\frac{t}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}-\sigma}\sum_{m\leqslant T}\frac{(-1)^m\sigma_{1-2\sigma}(m)}{m^{1-\sigma}}g_1(t,m)g_2(t,m)\cos(f(t,m)).$$

Keliame abi šios lygybės puses kvadratu ir taikome kosinusų sandaugos formulę. Tai duoda

$$\begin{aligned}
\Sigma_{1,\sigma}^2(t) = 2^{2\sigma-2}\left(\frac{t}{\pi}\right)^{1-2\sigma} \sum_{m\leqslant T}\sum_{n\leqslant T} \frac{(-1)^{m+n}\sigma_{1-2\sigma}(m)\sigma_{1-2\sigma}(n)}{(mn)^{1-\sigma}}\times \\
\times g_1(t,m)g_1(t,n)g_2(t,m)g_2(t,n)\cos(f(t,m))\cos(f(t,n)) = \\
= 2^{2\sigma-3}\left(\frac{t}{\pi}\right)^{1-2\sigma} \sum_{m\leqslant T}\sum_{n\leqslant T} \frac{(-1)^{m+n}\sigma_{1-2\sigma}(m)\sigma_{1-2\sigma}(n)}{(mn)^{1-\sigma}}\times \\
\times g_1(t,m)g_1(t,n)g_2(t,m)g_2(t,n)\times \\
\times(\cos(f(t,m)+(f(t,n))+\cos(f(t,m)-(f(t,n))).
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Skaičiuojant kartotinę sumą (4.2) formulėje pirma išskirsime diagonalinius narius. Tegul $S_{1,\sigma}(t)$ yra sumos $\Sigma_{1,\sigma}^2(t)$ dalis formulėje (4.2), kai $m=n$. Kadangi $\Re e^{ia} = \cos a, \quad a \in \mathbb{R}$, tai

$$\begin{aligned}
\int_T^{2T} S_{1,\sigma}(t)dt = 2^{2\sigma-3}\pi^{2\sigma-1}\Re \sum_{m\leqslant T}\frac{\sigma_{1-2\sigma}^2(m)}{m^{2-2\sigma}}\int_T^{2T} t^{1-2\sigma}e^{2if(t,m)}g_1^2(t,m)g_2^2(t,m)dt+ \\
+2^{2\sigma-3}\pi^{2\sigma-1}\sum_{m\leqslant T}\frac{\sigma_{1-2\sigma}^2(m)}{m^{2-2\sigma}}\int_T^{2T} t^{1-2\sigma}g_1^2(t,m)g_2^2(t,m)dt.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Toliau naudosimės žinomais įverčiais iš [5], kai $t \in [T, 2T]$;

$$g_1(t,m) = O\left(\sqrt{\frac{T}{m}}\right), \tag{4.4}$$

$$g_2(t,m) = O\left(\left(\frac{m}{T}\right)^{\frac{1}{4}}\right) \tag{4.5}$$

ir

$$f'(t,m) = O\left(\sqrt{\frac{m}{T}}\right). \tag{4.6}$$

Iš įverčių (4.4), (4.5), (4.6) ir lemų 3.1, 3.3 ir 3.4 išplaukia, kad

$$\begin{aligned}
2^{2\sigma-3}\pi^{2\sigma-1}\Re \sum_{m\leqslant T}\frac{\sigma_{1-2\sigma}^2(m)}{m^{2-2\sigma}}\int_T^{2T} t^{1-2\sigma}e^{2if(t,m)}g_1^2(t,m)g_2^2(t,m)dt = \\
= O\left(T^{2-2\sigma}\sum_{m\leqslant T}\frac{\sigma_{1-2\sigma}^2(m)}{m^{3-2\sigma}}\right) = O(T^{2-2\sigma}).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Antrojo nario įvertinimui (4.3) lygybės dešinėje pusėje yra reikalingi tikslesni funkcijų $g_1(t,m)$ ir $g_2(t,m)$ įverčiai. Kai $t \in [T, 2T]$, naudosime žinomus įverčius

$$g_1^2(t,m) = \frac{2t}{\pi m} + O(1)$$

ir

$$g_2^2(t,m) = \left(\frac{2\pi m}{t}\right)^{\frac{1}{2}} + O\left(\left(\frac{m}{t}\right)^{\frac{3}{2}}\right).$$

Todėl intervale $t \in [T, 2T]$ turime įvertį

$$t^{1-2\sigma} g_1(t,m) g_2(t,m) = 2^{\frac{2}{3}} t^{\frac{3}{2}-2\sigma} (\pi m)^{\frac{1}{2}} + O\left(t^{\frac{1}{2}-2\sigma}\sqrt{m}\right).$$

Iš čia, dar kartą panaudoję 3.3 ir 3.4 lemas, randame, kad

$$\begin{aligned}
&2^{2\sigma-3}\pi^{2\sigma-1} \sum_{m \leqslant T} \frac{\sigma_{1-2\sigma}^2(m)}{m^{2-2\sigma}} \int_T^{2T} t^{1-2\sigma} g_1^2(t,m) g_2^2(t,m) dt = \\
&= 2^{2\sigma-\frac{3}{2}} \pi^{2\sigma-\frac{3}{2}} \sum_{m \leqslant T} \frac{\sigma_{1-2\sigma}^2(m)}{m^{\frac{5}{2}-2\sigma}} \int_T^{2T} t^{\frac{3}{2}-2\sigma} dt + O\left(\sum_{m \leqslant T} \frac{\sigma_{1-2\sigma}^2(m)}{m^{\frac{3}{2}-2\sigma}} \int_T^{2T} t^{\frac{1}{2}-2\sigma} dt\right) = \\
&= (2\pi)^{2\sigma-\frac{3}{2}} \left(\frac{5}{2} - 2\sigma\right)^{-1} \sum_{m \leqslant T} \frac{\sigma_{1-2\sigma}^2(m)}{m^{\frac{5}{2}-2\sigma}} ((2T)^{\frac{5}{2}-2\sigma} - T^{\frac{5}{2}-2\sigma}) + \\
&+ O\left(T^{\frac{3}{2}-2\sigma} \sum_{m \leqslant T} \frac{\sigma_{1-2\sigma}^2(m)}{m^{\frac{3}{2}-2\sigma}}\right) = \\
&= (2\pi)^{2\sigma-\frac{3}{2}} \frac{2}{5-4\sigma} T^{\frac{5}{2}-2\sigma} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma_{1-2\sigma}^2(m)}{m^{\frac{5}{2}-2\sigma}} + O(T).
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Dabar tegul $S_{2,\sigma}(t)$ yra sumos $\Sigma_{1,\sigma}^2(t)$ dalis (4.2) formulėje su $m \neq n$. Šiuo atveju naudosimės [5] darbo įverčiais

$$|f'(t,m) \pm f'(t,n)| \geqslant c_1 \sqrt{\frac{1}{T}} \left|\sqrt{m} \pm \sqrt{n}\right|$$

arba

$$|f'(t,m) \pm f'(t,n)| \geqslant c_2 \left|\log \frac{m}{n}\right|,$$

kurie galioja su teigiamomis konstantomis $c_1$ ir $c_2$, kai $t \in [T, 2T]$. Šie įverčiai kartu su (4.4) ir (4.5) įverčiais bei 3.1, 3.3, 3.4 ir 3.5 lemomis duoda įvertį

$$\begin{aligned}
\int_T^{2T} S_{2,\sigma}(t) dt = O(T^{2-2\sigma} &\sum_{m \leqslant T} \sum_{\substack{n \leqslant T \\ m \neq n}} \frac{\sigma_{1-2\sigma}(m)\sigma_{1-2\sigma}(n)}{(mn)^{\frac{5}{4}-\sigma}} \left|\sqrt{m} - \sqrt{n}\right|^{-1} + \\
&+ T^{\frac{5}{4}-2\sigma} \sum_{m \leqslant T} \sum_{\substack{n \leqslant T \\ m \neq n}} \frac{\sigma_{1-2\sigma}(m)\sigma_{1-2\sigma}(n)}{(mn)^{1-\sigma}}) = O\left(T^{1+\varepsilon}\right).
\end{aligned}$$

Iš čia, (4.3), (4.7) ir (4.8) galutinai gauname, kad

$$\int_T^{2T} \Sigma_{1,\sigma}^2(t) dt = (2\pi)^{2\sigma-\frac{3}{2}} \frac{2}{5-4\sigma} T^{\frac{5}{2}-2\sigma} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma_{1-2\sigma}^2(m)}{m^{\frac{5}{2}-2\sigma}} + O\left(T^{1+\varepsilon}\right). \tag{4.9}$$

Dabar įvertinsime integralą

$$\int_T^{2T} \Sigma_{2,\sigma}^2(t) dt.$$

Iš funkcijos $\Sigma_{2,\sigma}(t)$ apibrėžimo išplaukia, kad

$$\begin{aligned}\Sigma_{2,\sigma}^2(t) = 4\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{1-2\sigma} \sum_{m\leqslant N_1}\sum_{n\leqslant N_1} \frac{\sigma_{1-2\sigma}(m)\sigma_{1-2\sigma}(n)}{(mn)^{1-\sigma}}\times \\ \times\left(\log\left(\frac{t}{2\pi m}\right)\right)^{-1}\left(\log\left(\frac{t}{2\pi n}\right)\right)^{-1}\cos(g(t,m))\cos(g(t,n)) = \\ = 2\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{1-2\sigma} \sum_{m\leqslant N_1}\sum_{n\leqslant N_1} \frac{\sigma_{1-2\sigma}(m)\sigma_{1-2\sigma}(n)}{(mn)^{1-\sigma}}\left(\log\left(\frac{t}{2\pi m}\right)\right)^{-1}\left(\log\left(\frac{t}{2\pi n}\right)\right)^{-1}\times \\ \times(\cos(g(t,m)+g(t,n))+\cos(g(t,m)-g(t,n))).\end{aligned} \tag{4.10}$$

Čia panaudoti žymenys

$$g(t,m) = t\log\left(\frac{t}{2\pi m}\right)+\frac{\pi}{4}-t$$

ir

$$N_1 = N_1(t,T) = \frac{t}{2\pi}+\frac{T}{2}-\left(\frac{Tt}{2\pi}+\left(\frac{T}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Be to, mes pasinaudojome dviejų kosinusų sandaugos formule $[\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+$ $+\cos(\alpha+\beta))]$. Iš $N_1$ apibrėžimo matome, kad

$$N_1 \leqslant \frac{t^2}{4\pi^2 T}.$$

Todėl, kai $m \leqslant N_1$, visiems $t \in [T, 2T]$ yra teisinga nelygybė

$$\frac{t}{2\pi m} \geqslant \pi > 3.$$

Iš čia gauname įvertį

$$\left(\log\frac{t}{2\pi m}\right)^{-1} = O(1). \tag{4.11}$$

Iš funkcijos $g(t,m)$ apibrėžimo randame, kad

$$|(g(t,m)\pm g(t,n))'| = \left|\log\left(\frac{t}{2\pi m}\right)\pm\log\left(\frac{t}{2\pi n}\right)\right| \geqslant c_3\left|\log\frac{m}{n}\right| \tag{4.12}$$

su kuria nors teigiama konstanta $c_3$.

Tegul $Z_{1,\sigma}(t)$ yra sumos $\Sigma_{2,\sigma}^2(t)$ dalis (4.10) formulės dešinėje pusėje su $m \neq n$. Be to, tegul $T_1 \geqslant T$ yra toks skaičius, kad su visais $t \geqslant T_1$ yra teisinga nelygybė

$$N_1(t,T) \geqslant \max(m,n).$$

Tuomet iš 3.1 ir 3.5 lemų ir (4.10), (4.11), (4.12) įverčių, po elementarių pertvarkymų, gauname įvertį

$$
\begin{aligned}
\int\limits_T^{2T} Z_{1,\sigma}(t)dt = 2(2\pi)^{2\sigma-1} \int\limits_T^{2T} \sum_{m\leqslant N_1(t,T)} \sum_{n\leqslant N_1(t,T)} \frac{\sigma_{1-2\sigma}(m)\sigma_{1-2\sigma}(n)}{(mn)^{1-2\sigma}}\times \\
\times t^{1-2\sigma}\left(\log\left(\frac{t}{2\pi m}\right)\right)^{-1}\left(\log\left(\frac{t}{2\pi n}\right)\right)^{-1}\times \\
\times(\cos(g(t,m)+g(t,n))+\cos(g(t,m)-g(t,n)))dt = \\
= 2(2\pi)^{2\sigma-1} \sum_{m\leqslant N_1(2T,T)} \sum_{n\leqslant N_1(2T,T)} \frac{\sigma_{1-2\sigma}(m)\sigma_{1-2\sigma}(n)}{(mn)^{1-2\sigma}}\times \\
\times \int\limits_T^{2T} t^{1-2\sigma}\left(\log\left(\frac{t}{2\pi m}\right)\right)^{-1}\left(\log\left(\frac{t}{2\pi n}\right)\right)^{-1}\times \\
\times(\cos(g(t,m)+g(t,n))+\cos(g(t,m)-g(t,n)))dt = \\
= O\left(T^{1-2\sigma}\sum_{\substack{m\leqslant T \\ m\neq n}}\sum_{n\leqslant T}\frac{\sigma_{1-2\sigma}(m)\sigma_{1-2\sigma}(n)}{(mn)^{1-2\sigma}}\left|\log\frac{m}{n}\right|^{-1}\right) = O\left(T\log T\right).
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

Tegul $Z_{2,\sigma}(t)$ yra sumos $\Sigma^2_{2,\sigma}(t)$ dalis su $m=n$. Tuomet iš 3.3 lemos gauname, jog

$$
\int\limits_T^{2T} Z_{2,\sigma}(t)dt = O\left(T^{1-2\sigma}\sum_{m\leqslant T}\frac{\sigma^2_{1-2\sigma}(m)}{m^{2-2\sigma}}\right) = O(T).
$$

Iš čia ir (4.3) ir (4.10) randame, kad

$$
\int\limits_T^{2T} \Sigma^2_{2,\sigma}(t)dt = O(T\log T). \tag{4.14}
$$

Kadangi yra teisingas įvertis

$$
R(t) = O(\log t),
$$

tai aišku, jog ir

$$
\int\limits_T^{2T} R^2(t)dt = O\left(T\log^2 T\right).
$$

Iš čia ir (4.14) turime įvertį

$$
\int\limits_T^{2T} \left(\Sigma_{2,\sigma}(t)+R(t)\right)^2 dt = O\left(\int\limits_T^{2T}\Sigma^2_{2,\sigma}(t)dt + \int\limits_T^{2T} R^2(t)dt\right) = O\left(T\log^2 T\right). \tag{4.15}
$$

Pasinaudoję klasikine Koši nelygybe bei (4.9) ir (4.15) įverčiais, gauname, kad

$$
\begin{aligned}
\int\limits_T^{2T}\Sigma_{1,\sigma}(t)(\Sigma_{2,\sigma}(t)+R(t))dt \leqslant \left(\int\limits_T^{2T}\Sigma^2_{1,\sigma}(t)dt\right)^{\frac12}\left(\int\limits_T^{2T}\left(\Sigma_{2,\sigma}(t)+R(t)\right)^2dt\right)^{\frac12} = \\
= O\left(T^{\frac74-\sigma}\log T\right).
\end{aligned}
$$

Iš čia, (4.1), (4.9) ir (4.15) galutinai randame, kad

$$\int\limits_T^{2T} E_\sigma^2(t,1)dt = (2\pi)^{2\sigma-\frac{3}{2}} \frac{2}{5-4\sigma} T^{\frac{5}{2}-2\sigma} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma_{1-2\sigma}^2(m)}{m^{\frac{5}{2}-2\sigma}} + \\ +O\left(T\log^2 T\right) + O\left(T^{\frac{7}{4}-\sigma}\log T\right). \tag{4.16}$$

Lieka pereiti nuo integravimo intervale $[T, 2T]$ prie integravimo intervale$[0, T]$. Šiam tikslui naudojame standartinį metodą: (4.16) formulėje vietoje $T$ imame $\frac{T}{2}, \frac{T}{2^2}, ....$, ir gautus rezultatus sumuojame. Pasinaudoję integralo adityvumu, kairėje pusėje gauname

$$\left(\int\limits_{\frac{T}{2}}^{T} + \int\limits_{\frac{T}{2^2}}^{\frac{T}{2}} + ....\right) E_\sigma^2(t,1)dt = \int\limits_2^T E_\sigma^2(t,1)dt,$$

o dešinėje pusėje tiksliai gausime narį

$$\frac{2}{5-4\sigma}(2\pi)^{2\sigma-\frac{3}{2}} T^{\frac{5}{2}-2\sigma} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma_{1-2\sigma}^2(m)}{m^{\frac{5}{2}-2\sigma}} + R_T$$

su įverčiu

$$R_T = O\left(T^{\frac{7}{4}-\sigma}\log T\right).$$

Teorema įrodyta.

# The mean value of the remainder term of the second moment of the Riemann zeta-function

Mindaugas Svitojus

(Summary)

Let $s = \sigma + it$ be a complex variable. The Riemann zeta-function $\zeta(s)$ in the half-plane $\sigma > 1$ is defined by the Dirichlet series

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}.$$

Moreover, $\zeta(s)$ has a meromorphic continuation to the whole complex plane, except for the unique simple pole at the point $s = 1$ with residue 1.

The value distribution of the function $\zeta(s)$ is very complicated. Therefore, often in place of concrete values of $\zeta(s)$, the moments (mean values)

$$\int_2^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt, \quad k \geqslant 0, \quad \sigma \geqslant \frac{1}{2},$$

are investigated. The majority of results on the moments of $\zeta(s)$ are obtained for $\sigma = \frac{1}{2}$. In the master work, we consider the mean square

$$\int_2^T |\zeta(\sigma + it)|^2 dt$$

more precisely, the remainder term of this mean square for $\frac{1}{2} < \sigma < \frac{3}{4}$. Denote

$$E_\sigma(T, 1) = \int_2^T |\zeta(\sigma + it)|^2 dt - T\zeta(2\sigma) - (2\pi)^{2\sigma - 1} \frac{\zeta(2 - 2\sigma)}{2 - 2\sigma} T^{2 - 2\sigma}.$$

and let $\sigma_a(m)$ be the generalized divisor function

$$\sigma_a(m) = \sum_{d|m} d^a, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Then the main result of the master work is the following formula

$$\int_2^T E_\sigma^2(t, 1) dt = \frac{2}{5 - 4\sigma} (2\pi)^{2\sigma - \frac{3}{2}} T^{\frac{5}{2} - 2\sigma} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma_{1-2\sigma}^2(m)}{m^{\frac{5}{2} - 2\sigma}} + O\left(T^{\frac{7}{4} - \sigma} \log T\right).$$

# Literatūra


[1] F. V. ATKINSON, *The mean value of the Riemann zeta-function,* Acta Math., **81** (1949), p. 353-376.

[2] J. HADAMARD, *Sur les zeros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann,* Comptes Rendus Acad. Sci., Paris **122** (1896), 1470-1473.

[3] G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD, *Contributions to the theory of the Riemann zeta-function and the distribution of primes,* Acta Math., **41** (1918), p. 119-196.

[4] A. E. INGHAM, *Mean - Value theorems in the theory of the Riemann zeta-function,* Poc. London Math. Soc., **27** (2)(1926), p. 273-300.

[5] A. IVIČ, *The Riemann Zeta-Function. The Theory of the Riemann Zeta-Function with Aplications,* New York, Wiley, 1985.

[6] J. KUBILIUS, *The method of generating Dirichlet series in the theory of distribution of arithmetic functions I,* Liet., Matem. Rink., **11** (1971), p. 125-134 (rusų k.).

[7] A. LAURINČIKAS, *Rymano dzeta funkcijos teorijos pagrindai,* Vilniaus Universiteto leidykla, Vilnius, 1990.

[8] K. MATSUMOTO, *The mean square of the Riemann zeta-function in the critical strip,* Japan, J. Math., **15** (1) (1989), p. 1-13.

[9] B. RIEMANN, *Über die Anzakl der Priauzaklen unterhable ciner gegebener Grösse,* Monatsber. Press. Akad. Wiss. Berlin (1859), p. 671-680.

[10] C. J. DE LA VALLÉE-POUSSIN, *Reckerckes analytiques sur la theorie des nombres premiers,* I-III, Ann. Soc. Sci. Bruxelles **20** (1896), p. 183-256, 281-362, 363-397.

[11] N. Walt, *A note on the mean square of* $|\zeta(\frac{1}{2}+it)|$, J. London Math. Soc. (2), **82** (2010), p. 279-294.