VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ IR SKAIČIAVIMO MATEMATIKOS KATEDRA

Baigiamasis magistro darbas

SCHRÖDINGER LYGTIES SPRENDINIO SPROGIMAS

(BLOW-UP OF SOLUTIONS FOR SCHRÖDINGER EQUATION)

Atliko 2 kurso, 1 grupės studentas:
Ramūnas Želvys

(parašas)

Darbo vadovas:
doc. Gintaras Puriuškis

(parašas)

Vilnius 2017

Turinys

1 Įvadas

Šiame darbe tiriama Schrödinger tipo lygtis, kuri remiantis [1] šaltiniu, užrašoma

$$iu_t + u_{xx} = -|u|^4 u, t \geqslant 0, x \in I, \tag{1}$$

lygtimi, su pradine sąlyga

$$u(0,x) = u_0(x), x \in I \tag{2}$$

ir periodine kraštine sąlyga

$$u(t,-2) = u(t,2), t \geqslant 0, \tag{3}$$
$$u_x(t,-2) = u_x(t,2), t \geqslant 0.$$

Čia $I = (-2,2)$, $i^2 = -1$, $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$.
(1) lygtis [3], [6], [9] šaltiniuose tiriama visoje erdvėje $\mathbb{R}$. Be to, lygtis (1) nagrinėjama kaip periodinė [1], [5] ir [7] ir šaltiniuose.

Darbe nagrinėsime (1)-(3) uždavinio sprendinio sprogimą. Pagrindinis šio darbo tikslas - įrodyti, kad (1)-(3) uždavinio sprendinys sprogsta, t.y.

$$\lim_{t \to T} \|u_x(t)\|_{L_2(I)} = +\infty.$$

Čia $0 < T < +\infty$, o $\|u_x(t)\|_{L_2(I)}$ yra norma Hilberto erdvėje $L_2(I)$

$$\|u_x(t)\|_{L_2(I)} = \sqrt{\int_{-2}^{2} |u_x(t,x)|^2 dx}.$$

Nagrinėjant (1) lygtį prireiks tam tikrų apibrėžimų. Apibrėžkime funkcijas $\phi(x)$ ir $\Phi(x)$

$$\phi(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < 1 \\ x - (x-1)^3, & 1 \leqslant x < 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ glodi, & 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \leqslant x < 2, \\ 0, & 2 \leqslant x. \end{cases}, \tag{4}$$

$$\Phi(x) = \int_0^x \phi(y) dy. \tag{5}$$

Čia sąvoka glodi reiškia, kad funkcija $\phi(x)$ yra tris kartus tolydžiai diferencijuojama, intervale $1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \leqslant x < 2$. Be to, $\phi(x)$ yra nelyginė funkcija ir $\phi^k(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$, kur $k = 0, 1, 2, 3$. Taip pat $\phi_x(x) \leqslant 0$, kai $1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \leqslant x$.
Apibrėžkime erdves

$$H^1(I) = \left\{ v : v, v' \in L^2(I) \right\}, \tag{6}$$

$$H^1_{prd}(I) = \left\{ v \in H^1(I) : v(-2) = v(2) \right\}. \tag{7}$$

Tiriant (1)-(3) uždavinį iš pradžių įrodysime, kad (1)-(3) uždavinio sprendinys tenkina tokias lemas

- $\|u(t)\|_{L_2(I)} = \|u_0(x)\|_{L_2(I)}$ - masės išsaugojimo dėsnis,
- $\|\rho u\|_{L^\infty(1<|x|<2)} \leqslant \sqrt{2}\|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(1<|x|<2)}[2\|\rho^2 u_x\|_{L^2(1<|x|<2)}+\sqrt{2}\|\rho^2 u\|_{L^2(1<|x|<2)}+\|u(\rho^2)'\|_{L^2(1<|x|<2)}]^{\frac{1}{2}}$,

  čia $\rho, \rho' \in L^\infty(I)$ - reali funkcija ir $\rho(-2) = \rho(2)$, $u = u(t,x) \in H^1_{prd}(I)$,
- $-Im\int_{-2}^2 \phi u(t)\overline{u}_x(t)dx + Im\int_{-2}^2 \phi u_0\overline{u}_{0x}dx =$
  $\int_0^t \left(2\int_{-2}^2 \phi_x|u_x(s)|^2dx - \frac{2}{3}\int_{-2}^2 \phi_x|u(s)|^6dx - \frac{1}{2}\int_{-2}^2 \phi_{xxx}|u(s)|^2dx\right)ds,$
  čia $u_{0x} = u_x(0,x)$, $\phi_{xxx} = \frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}$
- $-Im\int_{-2}^2 \phi u(t)\overline{u}_x(t)dx + Im\int_{-2}^2 \phi u_0\overline{u}_{0x}dx \leqslant [2E_0 + 24(1+M)^2\|u_0\|^6_{L^6(I)} + \frac{M}{2}\|u_0\|^2_{L^2(I)}]t,$

  čia $M = \max\limits_{j=1,2,3}\max\limits_{x\in I}\left\{\|\frac{\partial^j\phi}{\partial x^j}\|_{L^\infty(I)}\right\}$, $\|u(t)\|_{L^2(1<|x|<2)} \leqslant \frac{1}{2}, 0 \leqslant t < T$, $u(t)$ yra (1)-(3) uždavinio sprendinys erdvėje $C([0,T]; H^1_{prd}(I))$, $E_0 = E(u_0) = \|u_{0x}\|^2_{L^2(I)} - \frac{1}{3}\|u_0\|^6_{L^6(I)}$.

Įsitikinus, kad tenkinamos aukščiau nurodyti teiginiai, įrodysime teoremą apie (1)-(3) uždavinio sprendinio sprogimą:

Teorema 1 *Tegul $u_0 \in H^1(I)$, $u_0(-2) = u_0(2)$ ir $E_0 < 0$. Be to, tarkime kad*

$$\eta = -2E_0 - 24(1+M)^2\|u_0\|^6_{L^6(I)} - \frac{M}{2}\|u_0\|^2_{L^2(I)} > 0 \tag{8}$$

ir

$$\left(\int_I \Phi|u_0|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\eta}\|u_{0x}\|^2_{L^2(I)} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{4}, \tag{9}$$

Tada uždavinio (1)-(3) sprendinys erdvėje $H^1(\mathbb{R})$ sprogsta, kai t artėja prie baigtinio skaičiaus $T > 0$

$$\lim_{t\to T}\|u_x(t)\|_{L^2(I)} = \infty.$$

Šaltinyje [7] yra apskaičiuojama minimali galima konstanta M, kuri yra lygi 562,986. Imdami $M \approx 563$, (12) lygybę galime perrašyti taip

$$\eta = -2E_0 - 7634304\|u_0\|^6_{L^6(I)} - 281,5\|u_0\|^2_{L^2(I)} > 0$$

2 Įrodymai

2.1 Masės išsaugojimo dėsnis

Tegu $u = u(t, x)$ yra (1)-(3) uždavinio sprendinys. Tada yra teisinga lygybė

$$\|u(t)\|_{L^2(I)} = \|u_0(x)\|_{L^2(I)}. \tag{10}$$

Įrodymas.
Dauginame (1) lygtį iš $2\overline{u}$. Gauname

$$2i\overline{u}u_t + 2u_{xx}\overline{u} = -2|u|^4 u\overline{u}.$$

Šią lygybę pertvarkome pasinaudojus tokia lygybe $u\overline{u} = |u|^2$. Imdami menamą lygybės dalį, gauname

$$Im(2i\overline{u}u_t + 2u_{xx}\overline{u}) = Im(-2|u|^6).$$

Narys $-2|u|^6$ yra realus dydis. Pasinaudojant tuo ir remiantis menamosios dalies savybėmis, gausime

$$Im(2i\overline{u}u_t) = -Im(2u_{xx}\overline{u}). \tag{11}$$

Imame dešinę lygybės pusę ir integruojame dalimis
$-\int_{-2}^{2} Im(2u_{xx}\overline{u})dx = 2Im(\int_{-2}^{2} -\overline{u}du_x) = 2Im(-\overline{u}u_x|_{-2}^{2} + \int_{-2}^{2} u_x\overline{u}_x dx).$
Pasinaudojus (3) sąlygomis ir tuo, kad $u_x\overline{u}_x = |u_x|^2$, gauname
$2Im(-\overline{u}u_x|_{-2}^{2} + \int_{-2}^{2} u_x\overline{u}_x dx) = 2Im(\int_{-2}^{2} |u_x|^2 dx) = 0.$
Kadangi funkcija $|u_x|^2$, esanti po integralo ženklu, yra reali, integralo menamoji dalis lygi nuliui.
Dabar nagrinėkime kairiąją (11) lygybės pusę. Pasinaudosime reiškinio realiosios ir menamosios dalių sąryšiu

$$Im(2i\overline{u}u_t) = Re(2\overline{u}u_t).$$

Remiantis [2], žinome, kad teisinga tokia lygybė

$$Re(\overline{u}u_t) = Re(u\overline{u}_t).$$

Ši lygybė galioja su bet kuria u išvestine. Vadinasi

$$Re(2\overline{u}u_t) = Re(\overline{u}u_t + u\overline{u}_t) = Re((\overline{u}u)'_t) = Re((|u|^2)'_t).$$

Prisiminkime, kad integruojant (11) lygybės dešinę pusę, gavome 0. Vadinasi, kairės pusės integralas taip pat lygus 0, t.y.

$$\int_{-2}^{2} Re((|u|^2)'_t)dx = \int_{-2}^{2} (|u|^2)'_t dx = 0.$$

Iš čia išplaukia, kad integruojama funkcija nepriklauso nuo kintamojo t, todėl lygybėp

$$\|u(t)\|_{L^2(I)} = \|u_0(x)\|_{L^2(I)}$$

yra teisinga.

$\square$

2.2 Normos įverčiai

Tegu $u = u(t,x) \in H^1_{prd}(I)$ ir $\rho \in L^\infty(I)$ - reali funkcija. Be to $\rho' \in L^\infty(I)$ ir $\rho(-2) = \rho(2)$. Tada teisinga nelygybė

$$\|\rho u\|_{L^\infty(1<|x|<2)} \leqslant \sqrt{2}\|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(1<|x|<2)}[2\|\rho^2 u_x\|_{L^2(1<|x|<2)} \tag{12}$$

$$+\sqrt{2}\|\rho^2 u\|_{L^2(1<|x|<2)} + \|u(\rho^2)'\|_{L^2(1<|x|<2)}]^{\frac{1}{2}}.$$

Įrodymas.
Funkciją $\rho(x)$ pratęsiame nuo I iki $\mathbb{R}$ kaip periodinę. Pirmiausia parodysime, kad funkcijai $v \in H^1(\mathbb{R})$ teisinga nelygybė

$$\|\rho v\|_{L^\infty(1<|x|)} \leqslant \|v\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(1<|x|)}[2\|\rho^2 v'\|_{L^2(1<|x|)} + \|v(\rho^2)'\|_{L^2(1<|x|)}]^{\frac{1}{2}}. \tag{13}$$

Kai $x > 1$, turime

$$|v|^2\rho^2 = -\int_x^\infty (|v|^2\rho^2)'dy = -\int_x^\infty (2|v||v|'\rho^2 + |v|^2(\rho^2)')dy.$$

Pasinaudodami integralų savybėmis, gauname

$$|v|^2\rho^2 \leqslant \int_x^\infty 2|v||v|'\rho^2 dy + \int_x^\infty |v|^2(\rho^2)'dy.$$

Kadangi $x > 1$, pakeisdami integralo apatinį rėžį į $x = 1$ jį padidiname. Tada gauname

$$|v|^2\rho^2 \leqslant \int_1^\infty 2|v||v|'\rho^2 dy + \int_1^\infty |v|^2(\rho^2)'dy.$$

Pasinaudodami integralų savybėmis, darkart padidiname dešinėje nelygybės pusėje esančius integralus. Gauname

$$|v|^2\rho^2 \leqslant 2\int_1^\infty |vv'\rho^2|dy + \int_1^\infty |v|^2|(\rho^2)'|dy. \tag{14}$$

Tokie pat žingsniai atliekami nagrinėjant funkcijas intervale $x < -1$. Pertvarkius, gaunama tokia nelygybė

$$|v|^2\rho^2 \leqslant 2\int_{-\infty}^{-1} |vv'\rho^2|dy + \int_{-\infty}^{-1} |v|^2|(\rho^2)'|dy. \tag{15}$$

Sudėkime gautas nelygybes. Tada gauname

$$|v|^2\rho^2 \leqslant 2\int_1^\infty |vv'\rho^2|dy + 2\int_{-\infty}^{-1} |vv'\rho^2|dy + \int_1^\infty |v|^2|(\rho^2)'|dy + \int_{-\infty}^{-1} |v|^2|(\rho^2)'|dy$$

$$= 2\int_{1<|x|} |vv'\rho^2|dy + \int_{1<|x|} |v|^2|(\rho^2)'|dy = 2\int_{1<|x|} |vv'\rho^2|dy + \int_{1<|x|} |v||v||(\rho^2)'|dy.$$

Kiekvienam integralui dešinėje nelygybės pusėje pritaikome Hölder nelygybę, kai $p = q = 2$, ir gauname

$$|v|^2\rho^2 \leqslant 2\|v\|_{L^2(1<|x|)}\|v'\rho^2\|_{L^2(1<|x|)} + \|v\|_{L^2(1<|x|)}\|v(\rho^2)'\|_{L^2(1<|x|)}.$$

Pertvarkome šią nelygybę, ištraukiame kvadratinę šaknį ir kairei nelygybės pusei pritaikome normą erdvėje $L^\infty(1 < |x|)$

$$\|v\rho\|_{L^\infty(1<|x|)} \leqslant \|v\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(1<|x|)}[2\|v'\rho^2\|_{L^2(1<|x|)} + \|v(\rho^2)'\|_{L^2(1<|x|)}]^{\frac{1}{2}}.$$

Taigi gavome (13) nelygybę. Apibrėžkime funkciją, kuria naudosimės užbaigti (12) nelygybės įrodymui

$$\Psi(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 2 \\ 3 - |x|, & 2 < |x| < 3, \\ 0, & 3 < |x|. \end{cases}$$

Galime laikyti, kad $u \in H^1_{prd}$ yra periodinė funkcija erdvėje $H^1_{loc}(\mathbb{R})$ su periodu 4. Toliau iš (13) gausime (12), su pakeitimu $v = \Psi u$. Tęsdami toliau, gauname

$$\|\Psi u\rho\|_{L^\infty(1<|x|)} \leqslant \|\Psi u\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(1<|x|)}[2\|(\Psi u)'\rho^2\|_{L^2(1<|x|)} + \|\Psi u(\rho^2)'\|_{L^2(1<|x|)}]^{\frac{1}{2}}.$$

Pertvarkius šią nelygybę ir apskaičiavus išvestinę, gauname

$$\|\Psi u\rho\|_{L^\infty(1<|x|)} \leqslant \|\Psi u\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(1<|x|)}[2\|(\Psi' u + \Psi u')\rho^2\|_{L^2(1<|x|)} + \|\Psi u(\rho^2)'\|_{L^2(1<|x|)}]^{\frac{1}{2}}. \tag{16}$$

Pažymėkime:

$A := \|\Psi u\|_{L^2(1<|x|)}$,

$B := \|(\Psi' u + \Psi u')\rho^2\|_{L^2(1<|x|)}$,

$C := \|\Psi u(\rho^2)'\|_{L^2(1<|x|)}$.

Nagrinėkime narį A

$\|\Psi u\|_{L^2(1<|x|)} = (\int_{1<|x|} |\Psi u|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \leqslant (\int_{1<|x|} |\Psi|^2|u|^2 dx)^{\frac{1}{2}} = (\int_{1<|x|<2} |\Psi|^2|u|^2 dx + \int_{2<|x|<3} |\Psi|^2|u|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$.

Kadangi $\Psi(x) = 1$, kai $|x| < 2$, ir $\Psi'(x) \leqslant 1$, kai $2 < |x| < 3$, galime įvertinti dešinėje nelygybės pusėje esančius integralus. Taip pat, pertvarkydami nelygybę, pasinaudojame funkcijos $u = u(t, x)$ periodiškumu. Tada gauname

$\|\Psi u\|_{L^2(1<|x|)} \leqslant (\int_{1<|x|<2} |u|^2 dx + \int_{2<|x|<3} |u|^2 dx)^{\frac{1}{2}} = (2\int_{1<|x|<2} |u|^2 dx)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\|u\|_{L^2(1<|x|<2)}$.

Toliau nagrinėkime narį B. Remiantis Minkowski nelygybe, gauname

$\|(\Psi' u + \Psi u')\rho^2\|_{L^2(1<|x|)} \leqslant \|\Psi' u\rho^2\|_{L^2(1<|x|)} + \|\Psi u'\rho^2\|_{L^2(1<|x|)}$.

Pažymėkime:

$E := \|\Psi' u\rho^2\|_{L^2(1<|x|)}$,

$F := \|\Psi u'\rho^2\|_{L^2(1<|x|)}$.

Nagrinėkime narį E

$\|\Psi' u\rho^2\|_{L^2(1<|x|)} = (\int_{1<|x|} |\Psi' u\rho^2|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \leqslant (\int_{1<|x|} |\Psi'|^2 |u\rho^2|^2 dx)^{\frac{1}{2}}.$

Apskaičiuokime funkcijos $\Psi(x)$ išvestinę. Dešinėje pusėje esantį integralą vėl galime užrašyti kaip dviejų integralų sumą. Remdamiesi tuo, apskaičiuota $\Psi(x)$ išvestine ir funkcijos $u = u(t, x)$ periodiškumu gauname

$\|\Psi' u\rho^2\|_{L^2(1<|x|)} \leqslant (\int_{1<|x|<2} 0|u\rho^2|^2 dx + \int_{2<|x|<3} 1|u\rho^2|^2 dx)^{\frac{1}{2}} = \|u\rho^2\|_{L^2(2<|x|<3)} = \|u\rho^2\|_{L^2(1<|x|<2)}.$

Dabar nagrinėkime narį F. Turime

$\|\Psi u'\rho^2\|_{L^2(1<|x|)} = (\int_{1<|x|} |\Psi u'\rho^2|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \leqslant (\int_{1<|x|} |\Psi|^2 |u'\rho^2|^2 dx)^{\frac{1}{2}}.$

Analogiškai kaip ir nario A nagrinėjime, perrašome integralą per integralų, skirtinguose intervaluose, sumą ir kiekviename jų įvertiname funkciją Ψ. Gauname

$\|\Psi u'\rho^2\|_{L^2(1<|x|)} \leqslant (\int_{1<|x|<2} |u'\rho^2|^2 dx + \int_{2<|x|<3} |u'\rho^2|^2 dx)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}(\int_{1<|x|<2} |u'\rho^2|^2 dx)^{\frac{1}{2}} =$
$= \sqrt{2}\|u'\rho^2\|_{L^2(1<|x|<2)}.$

Galiausiai, išnagrinėkime narį C. Turime

$\|\Psi u(\rho^2)'\|_{L^2(1<|x|)} = (\int_{1<|x|} |\Psi u(\rho^2)'|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \leqslant (\int_{1<|x|} |\Psi|^2 |u(\rho^2)'|^2 dx)^{\frac{1}{2}}.$

Galime remtis narių A ir F nagrinėjimais. Tada gauname

$\|\Psi u(\rho^2)'\|_{L^2(1<|x|)} \leqslant (\int_{1<|x|<2} |u(\rho^2)'|^2 dx + \int_{2<|x|<3} |u(\rho^2)'|^2 dx)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}(\int_{1<|x|<2} |u(\rho^2)'|^2 dx)^{\frac{1}{2}} =$
$= \sqrt{2}\|u(\rho^2)'\|_{L^2(1<|x|<2)}.$

Naudodamiesi narių A, B, E, F ir C suprastintomis išraiškomis, pertvarkome (16) nelygybę. Turime

$\|u\rho\|_{L^\infty(1<|x|<2)} \leqslant (\sqrt{2}\|u\|)^{\frac{1}{2}}_{L^2(1<|x|)}[2(\sqrt{2}\|u'\rho^2\|_{L^2(1<|x|<2)} + \|u\rho^2\|_{L^2(1<|x|<2)}) + \sqrt{2}\|u(\rho^2)'\|_{L^2(1<|x|<2)}]^{\frac{1}{2}} =$
$= \sqrt[4]{2}\sqrt[4]{2}\|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(1<|x|)}[2\|u'\rho^2\|_{L^2(1<|x|<2)} + \sqrt{2}\|u\rho^2\|_{L^2(1<|x|<2)} + \|u(\rho^2)'\|_{L^2(1<|x|<2)}]^{\frac{1}{2}} =$
$= \sqrt{2}\|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(1<|x|)}[2\|u'\rho^2\|_{L^2(1<|x|<2)} + \sqrt{2}\|u\rho^2\|_{L^2(1<|x|<2)} + \|u(\rho^2)'\|_{L^2(1<|x|<2)}]^{\frac{1}{2}}.$

Taigi gavome (12) nelygybę, kurią ir reikėjo įrodyti.

$\square$

2.3 Tapatybės

Tegul $0 < T \leqslant \infty$ ir $u(t)$ yra uždavinio (1)-(3) sprendinys erdvėje $C([0,T]; H^1_{prd})$. Tegul $\phi(x)$ ir $\Phi(x)$ atitinkamai apibrėžtos (4) ir (5). Tada turime

$$-Im\int_{-2}^{2}\phi u(t)\overline{u}_x(t)dx + Im\int_{-2}^{2}\phi u_0\overline{u}_{0x}dx \tag{17}$$

$$= \int_0^t \left(2\int_{-2}^{2}\phi_x|u_x(s)|^2dx - \frac{2}{3}\int_{-2}^{2}\phi_x|u(s)|^6dx - \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\phi_{xxx}|u(s)|^2dx\right)ds,$$

$$\int_{-2}^{2}\Phi|u(t)|^2dx = \int_{-2}^{2}\Phi|u_0|^2dx - 2\int_0^t\left(Im\int_{-2}^{2}\phi u(s)\overline{u}_x(s)dx\right)ds. \tag{18}$$

Įrodymas.
Tarkime, kad $u = u(t,x)$ yra uždavinio (1)-(3) sprendinys erdvėje $C([0,T]; H^1_{prd})$. Pirmiausia įrodysime (17). Dauginame (1) lygtį iš $\phi\overline{u}_x$ ir imame realią dalį

$$Re(iu_t\phi\overline{u}_x + u_{xx}\phi\overline{u}_x) = Re(-|u|^4u\phi\overline{u}_x).$$

Pertvarkome lygybę ir gauname

$$Re(iu_t\phi\overline{u}_x) + Re(u_{xx}\phi\overline{u}_x) = -Re(|u|^4u\phi\overline{u}_x). \tag{19}$$

Pažymėkime visus tris narius

$A_1 = Re(iu_t\phi\overline{u}_x)$,
$B_1 = Re(u_{xx}\phi\overline{u}_x)$,
$C_1 = -Re(|u|^4u\phi\overline{u}_x)$.

Pirmiausia imame narį A_1. Pasinaudosime reiškinio realiosios ir menamosios dalių sąryšiu

$$Re(iu_t\phi\overline{u}_x) = -Im(u_t\phi\overline{u}_x).$$

Integruokime dešinėje lygybės pusėje esantį narį intervale $(-2,2)$. Be to, pasinaudosime tuo, kad menamosios dalies integralas yra lygus integralo menamai daliai. Gauname

$$-\int_{-2}^{2}Im(u_t\phi\overline{u}_x)dx = -Im\left(\int_{-2}^{2}u_t\phi\overline{u}_xdx\right).$$

Toliau, pasinaudosime tokia lygybe

$$-Im\left(\int_{-2}^{2}u_t\phi\overline{u}_xdx\right) = -\frac{d}{dt}Im\left(\int_{-2}^{2}u\phi\overline{u}_xdx\right) + Im\left(\int_{-2}^{2}u\phi\overline{u}_{xt}dx\right).$$

Ši lygybė yra teisinga, nes integralas ir funkcija $\phi(x)$ nepriklauso nuo t. Pažymėkime kairėje lygybės pusėje esantį integralą

$$I = -Im\left(\int_{-2}^{2} u_t\phi\overline{u}_x dx\right).$$

Toliau dalimis integruojame antrą narį esantį dešinėje lygybės pusėje. Gauname

$$Im\left(\int_{-2}^{2} u\phi\overline{u}_{xt}dx\right) = Im\left((u\phi\overline{u}_t)\mid_{-2}^{2} - \int_{-2}^{2}(u\phi)'_x\overline{u}_t dx\right).$$

Kadangi funkcija $u = u(t,x)$ yra periodinė, pirmasis narys yra lygus 0. Apskaičiavę išvestinę ir pasinaudoję menamos dalies savybėmis, gauname

$$Im\left(\int_{-2}^{2} u\phi\overline{u}_{xt}dx\right) = -Im\left(\int_{-2}^{2} u_x\phi\overline{u}_t dx\right) - Im\left(\int_{-2}^{2} u\phi_x\overline{u}_t dx\right).$$

Taigi, gavome, kad teisinga tokia lygybė

$$I = -\frac{d}{dt}Im\left(\int_{-2}^{2} u\phi\overline{u}_x dx\right) - Im\left(\int_{-2}^{2} u_x\phi\overline{u}_t dx\right) - Im\left(\int_{-2}^{2} u\phi_x\overline{u}_t dx\right).$$

Įrodysime pagalbinę lygybę $Im(u_x\overline{u}_t) = -Im(\overline{u}_x u_t)$. Ši lygybė galioja su bet kuria u išvestine.

Sakykime, kad $u = v + iw$. Tada

$Im(u_x\overline{u}_t) = Im((v_x + iw_x)(v_t - iw_t)) = Im(v_xv_t + iv_tw_x - iv_xw_t + w_xw_t) = v_tw_x - v_xw_t.$
$Im(\overline{u}_x u_t) = Im((v_x - iw_x)(v_t + iw_t)) = Im(v_xv_t - iv_tw_x + iv_xw_t + w_xw_t) = -(v_tw_x - v_xw_t),$

Pasinaudoję šia lygybe, gauname

$$-Im\left(\int_{-2}^{2} u_x\phi\overline{u}_t dx\right) = Im\left(\int_{-2}^{2} \overline{u}_x\phi u_t dx\right) = -I.$$

Pertvarkę šią nelygybę ir sugrupavę narius, gauname

$$I = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}Im\left(\int_{-2}^{2} u\phi\overline{u}_x dx\right) - \frac{1}{2}Im\left(\int_{-2}^{2} u\phi_x\overline{u}_t dx\right) = A_1.$$

Toliau nagrinėkime narį B_1. Šį narį integruojame intervale $(-2, 2)$. Taip pat pasinaudokime tuo, kad integralas nuo realios dalies yra lygus realiai integralo daliai, ir integruokime dalimis

$$\int_{-2}^{2} Re(u_{xx}\phi\overline{u}_x)dx = -Re\left((u_x\phi\overline{u}_x)\mid_{-2}^{2} - \int_{-2}^{2} u_x(\phi\overline{u}_x)'_x dx\right).$$

Pirmasis narys bus lygus 0 dėl funkcijos $u = u(t,x)$ periodiškumo. Apskaičiavę išvestinę ir pasinaudoję Re savybėmis, gauname

$$\int_{-2}^{2} Re(u_{xx}\phi\overline{u}_x)dx = -Re\left(\int_{-2}^{2} u_x\phi_x\overline{u}_x dx\right) - Re\left(\int_{-2}^{2} u_x\phi\overline{u}_{xx}dx\right)$$

Remdamiesi bakalauriniame darbe [2] įrodyta lygybe, žinome, kad $Re(u_x\overline{u}_{xx}) = Re(\overline{u}_x u_{xx})$. Tada

$$Re\left(\int_{-2}^{2} u_x\phi\overline{u}_{xx}dx\right) = Re\left(\int_{-2}^{2} \overline{u}_x\phi u_{xx}dx\right).$$

Taip pat, žinome, kad $z\overline{z} = |z|^2$, kur z - kompleksinė funkcija. Tokiu atveju, pointegralinė funkcija $|u_x|^2\phi_x$ yra reali, nes $\phi = \phi(x)$ yra reali funkcija. Taigi gavome, kad

$$B_1 = -\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} |u_x|^2\phi_x dx.$$

Galiausiai, išnagrinėkime narį C_1. Integruojame jį intervale $(-2, 2)$. Žinome, kad integralas nuo realios dalies yra lygus realiai integralo daliai. Gautą reiškinį integruokime dalimis

$$-\int_{-2}^{2} Re(|u|^4 u\phi\overline{u}_x)dx = -Re\left((|u|^4 u\phi\overline{u})\,|_{-2}^{2} - \int_{-2}^{2}(|u|^4 u\phi)'_x\overline{u}dx\right).$$

Pažymėkime kairėje lygybės pusėje esantį reiškinį $I := -\int_{-2}^{2} Re(|u|^4 u\phi\overline{u}_x)dx$. Pirmasis dešinėje pusėje esantys narys bus lygus 0 dėl funkcijos $u = u(t, x)$ periodiškumo. Toliau, apskaičiuokime išvestinę ir suprastinkime reiškinį. Gauname

$I = Re\left(\int_{-2}^{2}((3u^2u_x\overline{u}^2 + 2u^3\overline{u}\overline{u}_x)\phi + (u^3\overline{u}^2\phi_x))\overline{u}dx\right) =$

$= Re\left(\int_{-2}^{2}((3u^2u_x\overline{u}^2\overline{u} + 2uu^2\overline{u}^2\overline{u}_x)\overline{u}\phi + (u^3\overline{u}^3\phi_x))dx\right) = Re\left(\int_{-2}^{2}(3|u|^4\overline{u}u_x + 2|u|^4 u\overline{u}_x)\phi dx\right) +$
$\int_{-2}^{2}|u|^6\phi_x dx.$

Remdamiesi bakalauriniame darbe [2] įrodyta lygybe, žinome, kad $Re(u\overline{u}_x) = Re(\overline{u}u_x)$. Tada turime

$I = 5Re\left(\int_{-2}^{2}|u|^4 u\phi\overline{u}_x dx\right) + \int_{-2}^{2}|u|^6\phi_x dx.$

Pastebėkime, kad pirmasis dešinėje lygybės pusėje esantys narys yra lygus $-5I$. Taigi gauname

$$I = \frac{1}{6}\int_{-2}^{2}|u|^6\phi_x dx = C_1.$$

Įsistačius pertvarkytas A_1,B_1 ir C_1 išraiškas į (19) ir padauginus abi lygybės puses iš 2, gauname

$$-\frac{d}{dt}Im\left(\int_{-2}^{2}u\phi\overline{u}_x dx\right) - Im\left(\int_{-2}^{2}u\phi_x\overline{u}_t dx\right) = \int_{-2}^{2}|u_x|^2\phi_x dx + \frac{1}{3}\int_{-2}^{2}|u|^6\phi_x dx. \tag{20}$$

Dabar nagrinėkime jungtinę (1) išraišką. Ji atrodys taip

$$\overline{iu_t + u_{xx}} = \overline{-|u|^4 u}.$$

Atlikę tam tikrus pertvarkymus, gausime

$$-i\overline{u}_t + \overline{u}_{xx} = -|u|^4\overline{u}.$$

Abi lygybės puses dauginame iš $\phi_x u$ ir imame realią dalį. Gauname

$$-Re(i\overline{u}_t\phi_x u) + Re(\overline{u}_{xx}\phi_x u) = -Re(|u|^4\overline{u}\phi_x u).$$

Pažymėkime visus tris narius

$A_2 = -Re(i\overline{u}_t\phi_x u)$,
$B_2 = Re(\overline{u}_{xx}\phi_x u)$,
$C_2 = -Re(|u|^4\overline{u}\phi_x u)$.

Nagrinėkime narį A_2. Pasinaudosime reiškinio realiosios ir menamosios dalių sąryšiu

$$-Re(i\overline{u}_t\phi_x u) = Im(\overline{u}_t\phi_x u).$$

Integruokime dešinėje lygybės pusėje esantį narį intervale $(-2, 2)$. Be to, pasinaudosime tuo, kad menamosios dalies integralas yra lygus integralo menamai daliai. Gauname

$$\int_{-2}^{2} Im(\overline{u}_t\phi_x u)dx) = Im\left(\int_{-2}^{2} \overline{u}_t\phi_x u dx\right) = A_2.$$

Toliau nagrinėkime narį B_2. Šį narį integruojame intervale $(-2, 2)$. Taip pat pasinaudokime tuo, kad integralas nuo realios dalies yra lygus realiai integralo daliai, ir integruokime dalimis

$\int_{-2}^{2} Re(\overline{u}_{xx}\phi_x u)dx = Re\left(\int_{-2}^{2} \overline{u}_{xx}\phi_x u dx\right) = Re\left((\overline{u}_x\phi_x u)\mid_{-2}^{2} - \int_{-2}^{2} \overline{u}_x(\phi_x u)'_x dx\right)$.

Pirmasis dešinėje pusėje esantis narys bus lygus 0 dėl funkcijos $u = u(t, x)$ periodiškumo. Apskaičiavę išvestinę ir pasinaudoję realios dalies savybėmis, gauname

$\int_{-2}^{2} Re(\overline{u}_{xx}\phi_x u)dx = -Re\left(\int_{-2}^{2} \overline{u}_x\phi_{xx} u dx\right) - Re\left(\int_{-2}^{2} \overline{u}_x\phi_x u_x dx\right) = -Re\left(\int_{-2}^{2} \overline{u}_x\phi_{xx} u dx\right) - \int_{-2}^{2} |u_x|^2\phi_x dx$.

Toliau dalimis integruokime pirmąjį dešinėje lygybės pusėje esantį narį. Gauname

$-Re\left(\int_{-2}^{2} \overline{u}_x\phi_{xx} u dx\right) = -Re\left((\overline{u}\phi_{xx} u)\mid_{-2}^{2} - \int_{-2}^{2} \overline{u}(\phi_{xx} u)'_x dx\right)$.

Pažymėkime kairėje lygybės pusėje esantį narį $I := -Re\left(\int_{-2}^{2} \overline{u}_x\phi_{xx} u dx\right)$. Vėl turime, kad pirmasis dešinėje pusėje esantis narys lygus 0 dėl funkcijos $u = u(t, x)$ periodiškumo. Pasinaudodami realios dalies savybėmis ir apskaičiavę išvestinę, gauname

$I = Re\left(\int_{-2}^{2} \overline{u}\phi_{xxx} u dx\right) + Re\left(\int_{-2}^{2} \overline{u}\phi_{xx} u_x dx\right) = \int_{-2}^{2} |u|^2\phi_{xxx} dx + Re\left(\int_{-2}^{2} \overline{u}\phi_{xx} u_x dx\right)$.

Vėl pasinaudosime bakalauriniame darbe [2] įrodyta lygybe. Turėsime $Re(u\overline{u}_x) = Re(\overline{u}u_x)$. Tokiu atveju $Re\left(\int_{-2}^{2} \overline{u}\phi_{xx} u_x dx\right) = Re\left(\int_{-2}^{2} \overline{u}_x\phi_{xx} u dx\right)$ ir gauname

$I = \int_{-2}^{2} |u|^2\phi_{xxx} dx + Re\left(\int_{-2}^{2} \overline{u}_x\phi_{xx} u dx\right)$.

Nesunku pastebėti, kad dešinėje lygybės pusėje esantis antrasis narys yra lygus $-I$. Pertvarkę lygybę, gauname

$$I = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} |u|^2\phi_{xxx}dx.$$

Taigi gavome tokią lygybę

$$B_2 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} |u|^2\phi_{xxx}dx - \int_{-2}^{2} |u_x|^2\phi_x dx.$$

Galiausiai, išnagrinėkime narį C_2. Integruokime šį narį intervale $(-2, 2)$. Taip pat, pasinaudokime realios dalies savybėmis savybėmis ir pertvarkykime reiškinį. Gausime

$$C_2 = -Re\left(\int_{-2}^{2} |u|^4\overline{u}\phi_x u dx\right) = -Re\left(\int_{-2}^{2} |u|^6\phi_x dx\right) = -\int_{-2}^{2} |u|^6\phi_x dx.$$

Įsistačius pertvarkytas A_2,B_2 ir C_2 išraiškas į (21), gauname

$$Im\left(\int_{-2}^{2} \overline{u}_t\phi_x u dx\right) = \int_{-2}^{2} |u_x|^2\phi_x dx - \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} |u|^2\phi_{xxx}dx - \int_{-2}^{2} |u|^6\phi_x dx \qquad (21)$$

Dabar įsistatome (21) išraišką į (20). Gauname
$-\frac{d}{dt}Im\left(\int_{-2}^{2} u\phi\overline{u}_x dx\right) - \int_{-2}^{2} |u_x|^2\phi_x dx + \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} |u|^2\phi_{xxx}dx + \int_{-2}^{2} |u|^6\phi_x dx = \int_{-2}^{2} |u_x|^2\phi_x dx + \frac{1}{3}\int_{-2}^{2} |u|^6\phi_x dx.$
Visus narius išskyrus pirmąjį perkeliame į dešinę lygybės pusę ir abi puses integruojame intervale $(0, t)$. Gauname
$-\int_0^t \frac{d}{ds}Im\left(\int_{-2}^{2} u\phi\overline{u}_x dx\right) ds = 2\int_0^t \left(\int_{-2}^{2} |u_x|^2\phi_x dx - \frac{2}{3}\int_{-2}^{2} |u|^6\phi_x dx - \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} |u|^2\phi_{xxx}dx\right) ds.$
Apskaičiavus kairėje pusėje esantį integralą, gauname

$$-Im\left(\int_{-2}^{2} u\phi\overline{u}_x dx\right) + Im\left(\int_{-2}^{2} u_0\phi\overline{u}_{0x} dx\right) =$$

$$= 2\int_0^t \left(\int_{-2}^{2} |u_x|^2\phi_x dx - \frac{2}{3}\int_{-2}^{2} |u|^6\phi_x dx - \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} |u|^2\phi_{xxx}dx\right) ds.$$

Taigi įrodėme (17) lygybę. Dabar įrodysime (18) lygybę. Imame jungtinę (1) lygties išraišką, dauginame iš Φu ir imame menamą dalį. Gauname

$$-Im(i\overline{u}_t\Phi u) + Im(\overline{u}_{xx}\Phi u) = -Im(|u|^4\overline{u}\Phi u).$$

Šiek tiek pertvarkę lygybę, gauname

$$-Im(i\overline{u}_t\Phi u) + Im(\overline{u}_{xx}\Phi u) = -Im(|u|^6\Phi).$$

Kadangi funkcija $\Phi = \Phi(x)$ yra reali funkcija, dešinėje lygybės pusėje esantis narys yra lygus 0. Toliau nagrinėjame tokią lygybę

$$Im(\overline{u}_{xx}\Phi u) = Im(i\overline{u}_t\Phi u). \tag{22}$$

Pažymėkime abu lygybės narius

$A_3 = Im(\overline{u}_{xx}\Phi u)$,
$B_3 = Im(i\overline{u}_t\Phi u)$.

Nagrinėkime narį A_3. Šį narį integruojame intervale $(-2, 2)$. Taip pat pasinaudokime tuo, kad integralas nuo menamos dalies yra lygus menamai integralo daliai, ir integruokime dalimis
$\int_{-2}^{2} Im(\overline{u}_{xx}\Phi u)dx = Im\left(\int_{-2}^{2} \overline{u}_{xx}\Phi u dx\right) = Im\left((\overline{u}_x\Phi u)\mid_{-2}^{2} - \int_{-2}^{2} \overline{u}_x(\Phi u)'_x dx\right)$.
Pirmasis narys lygus 0 dėl funkcijos $u = u(t, x)$ periodiškumo. Pasinaudodami menamos dalies savybėmis ir apskaičiavę išvestinę, gauname
$A_3 = -Im\left(\int_{-2}^{2} \overline{u}_x\Phi_x u dx\right) - Im\left(\int_{-2}^{2} |u_x|^2\Phi dx\right) = -Im\left(\int_{-2}^{2} \overline{u}_x\phi u dx\right)$.
Toliau nagrinėkime narį B_3. Kadangi, funkcija $\Phi = \Phi(x)$, pastebėkime, kad teisinga tokia lygybė

$$Im(i\overline{u}_t\Phi u) = \frac{d}{dt}(Im(i\overline{u}\Phi u)) - Im(i\overline{u}\Phi u_t).$$

Įrodysime pagalbinę lygybę $Im(i\overline{u}_t u) = Im(i\overline{u}u_t)$. Ši lygybė galioja su bet kuria u išvestine. Sakykime, kad $u = v + iw$. Tada

$Im(i\overline{u}_t u) = Im(i(v_t - iw_t)(v + iw)) = Im(i(v_t v + iv_t w - iw_t v + w_t w)) = v_t v + w_t w.$
$Im(iu_t\overline{u}) = Im(i(v_t + iw_t)(v - iw)) = Im(i(v_t v - iv_t w + iw_t v + w_t w)) = v_t v + w_t w.$

Pasinaudoję šia lygybe, gauname

$$Im(i\overline{u}_t\Phi u) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(Im(i\overline{u}\Phi u))) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(Im(i|u|^2\Phi)).$$

Kadangi sandauga $|u|^2\Phi$ yra reali funkcija, gauname

$$Im(i\overline{u}_t\Phi u) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|u|^2\Phi).$$

Įsistatykime pertvarkytas A_3 ir B_3 išraiškas į (22) lygtį. Kadangi nagrinėdami narį A_3, jį integravome intervale $(-2, 2)$, tai B_3 taip pat integruojame tame pačiame intervale. Gauname tokią lygybę

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_{-2}^{2} |u|^2\Phi dx\right) = -Im\left(\int_{-2}^{2} \overline{u}_x\phi u dx\right).$$

Padauginame abi lygybės puses iš 2 integruojame intervale $(0, t)$. Tada gauname

$$\int_0^t \frac{d}{ds}\left(\int_{-2}^{2} |u(s)|^2\Phi dx\right) ds = -2\int_0^t \left(Im\left(\int_{-2}^{2} \overline{u}_x(s)\phi u(s) dx\right)\right) ds.$$

Kairė lygybės pusė lengvai suintegruojama. Galiausiai, gauname tokią lygybę

$$\int_{-2}^{2} |u(t)|^2 \Phi dx - \int_{-2}^{2} |u_0|^2 \Phi dx = -2 \int_0^t \left(Im \left(\int_{-2}^{2} \overline{u}_x(s) \phi u(s) dx \right) \right) ds.$$

Perkėlus kairėje lygybės pusėje esantį antrąjį narį į dešinę lygybės pusę, matome, kad gavome (18) lygybę.

$\square$

2.4 Integralų įvertinimas

Funkcijos $\phi(x)$ ir $\Phi(x)$ atitinkamai apibrėžtos (4) ir (5). Tegul $0 < T \leqslant \infty$ ir $u(t)$ yra uždavinio (1)-(3) sprendinys erdvėje $C([0,T]; H^1_{prd})$. Jeigu $u(t)$ tenkina

$$\|u(t)\|_{L^2(1<|x|<2)} \leqslant \frac{1}{2}, 0 \leqslant t < T, \tag{23}$$

tada turime

$$-Im \int_{-2}^{2} \phi u(t)\overline{u}_x(t)dx + Im \int_{-2}^{2} \phi u_0 \overline{u}_{0x} dx, \tag{24}$$
$$\leqslant [2E_0 + 24(1+M)^2 \|u_0\|^6_{L^6(I)} + \frac{M}{2}\|u_0\|^2_{L^2(I)}]t$$
$$0 \leqslant t < T.$$

Įrodymas.
Iš energetinės lygybės turime

$$\|u_x(t)\|^2_{L^2(|x|<1)} = E_0 - \|u_x(t)\|^2_{L^2(1<|x|<2)} + \frac{1}{3}\|u(t)\|^6_{L^6(I)}.$$

Naudodamiesi šia lygybe ir (5) bei (17), gauname
$-Im \int_{-2}^{2} \phi u(t)\overline{u}_x(t)dx + Im \int_{-2}^{2} \phi u_0 \overline{u}_{0x} dx =$
$= \int_0^t \left(2\int_{-2}^{2} \phi_x |u_x(s)|^2 dx - \frac{2}{3}\int_{-2}^{2} \phi_x |u(s)|^6 dx - \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \phi_{xxx}|u(s)|^2 dx\right) ds =$
$= \int_0^t (2\int_{1<|x|<2} \phi_x |u_x(s)|^2 dx + 2\int_{|x|<1} |u_x(s)|^2 dx - \frac{2}{3}\int_{|x|<1} |u(s)|^6 dx - \frac{2}{3}\int_{1<|x|<2} \phi_x |u(s)|^6 dx -$
$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \phi_{xxx}|u(s)|^2 dx)ds = \int_0^t (2\int_{1<|x|<2} \phi_x |u_x(s)|^2 dx + 2E_0 - 2\int_{1<|x|<2} |u_x(s)|^2 dx + \frac{2}{3}\int_{-2}^{2} |u(s)|^6 dx -$
$-\frac{2}{3}\int_{|x|<1} |u(s)|^6 dx - \frac{2}{3}\int_{1<|x|<2} \phi_x |u(s)|^6 dx - \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \phi_{xxx}|u(s)|^2 dx)ds =$
$= \int_0^t (2E_0 - 2\int_{1<|x|<2}(1-\phi_x)|u_x(s)|^2 dx + \frac{2}{3}\int_{1<|x|<2}(1-\phi_x)|u(s)|^6 dx - \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \phi_{xxx}|u(s)|^2 dx)ds.$

Taigi gavome tokią lygybę

$$-Im \int_{-2}^{2} \phi u(t)\overline{u}_x(t)dx + Im \int_{-2}^{2} \phi u_0 \overline{u}_{0x} dx =$$

$$\int_0^t (2E_0 - 2\int_{1<|x|<2}(1-\phi_x)|u_x(s)|^2 dx + \frac{2}{3}\int_{1<|x|<2}(1-\phi_x)|u(s)|^6 dx - \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \phi_{xxx}|u(s)|^2 dx)ds. \tag{25}$$

Naudojantis 2.2 lema, su $\rho(x) = (1-\phi_x)^{\frac{1}{4}}$, ir Hölder nelygybe, gauname
$\int_{1<|x|<2}(1-\phi_x)|u|^6dx = \int_{1<|x|<2}\rho^4|u|^4|u|^2dx \leqslant \|u\|^2_{L^2(1<|x|<2)}\|\rho u\|^4_{L^\infty(1<|x|<2)} \leqslant$
$4\|u\|^4_{L^2(1<|x|<2)}(2\|\rho^2 u_x\|_{L^2(1<|x|<2)} + \sqrt{2}\|\rho^2 u\|_{L^2(1<|x|<2)} + \|u(\rho^2)'\|_{L^2(1<|x|<2)})^2$.
Dabar pakelsime kvadratu skliausteliuose esantį reiškinį. Pažymėkime narius
$a = 2\|\rho^2 u_x\|_{L^2(1<|x|<2)}$,
$b = \sqrt{2}\|\rho^2 u\|_{L^2(1<|x|<2)}$,
$c = \|u(\rho^2)'\|_{L^2(1<|x|<2)}$.
Keldami kvadratu ir naudodamiesi $a^2+b^2 \geqslant 2ab$ nelygybe, gauname
$(a+b+c)^2 = a^2+2a(b+c)+(b+c)^2 \leqslant 2a^2+2(b+c)^2 = 2a^2+2b^2+2c^2+4bc \leqslant 2a^2+4b^2+4c^2$.

Dabar įsistatome pertvarkytą išraišką į aukščiau esančią nelygybę. Gauname
$\int_{1<|x|<2}(1-\phi_x)|u|^6dx \leqslant 4\|u\|^4_{L^2(1<|x|<2)}(8\|\rho^2 u_x\|^2_{L^2(1<|x|<2)}+8\|\rho^2 u\|^2_{L^2(1<|x|<2)}+4\|u(\rho^2)'\|^2_{L^2(1<|x|<2)}) =$
$32\|u\|^4_{L^2(1<|x|<2)}\|\rho^2 u_x\|^2_{L^2(1<|x|<2)}+32\|u\|^4_{L^2(1<|x|<2)}\|\rho^2 u\|^2_{L^2(1<|x|<2)}+16\|u\|^4_{L^2(1<|x|<2)}\|u(\rho^2)'\|^2_{L^2(1<|x|<2)}$.

Pritaikę Hölder nelygybę paskutiniam nariui ir įvertinę $(\rho^2)'$ normą, gauname

$$\int_{1<|x|<2}(1-\phi_x)|u|^6dx \leqslant 32\|u\|^4_{L^2(1<|x|<2)}\|\rho^2 u_x\|^2_{L^2(1<|x|<2)}+ \tag{26}$$

$$32\|u\|^4_{L^2(1<|x|<2)}\|\rho^2 u\|^2_{L^2(1<|x|<2)} + 16\|u\|^6_{L^2(1<|x|<2)}\|(\rho^2)'\|^2_{L^\infty(1<|x|<2)}.$$

Remdamiesi ρ apibrėžimu ir (4), įvertinsime $|(\rho^2)'|$. Gauname
$|(\rho^2)'| = |((1-\phi_x)^{\frac{1}{2}})'_x| = |\frac{1}{2}(1-\phi_x)^{-\frac{1}{2}}(-\phi_{xx})| = |\frac{1}{2}(3(x-1)^2)^{-\frac{1}{2}}6(x-1)| =$
$|\sqrt{3}((x-1)^2)^{-\frac{1}{2}}(x-1)| \leqslant \sqrt{3}|x-1|^{-1}|x-1| = \sqrt{3}$.
Gavome $|(\rho^2)'|$ įvertį intervale $1 < |x| < 1+\frac{1}{\sqrt{3}}$. Tęsiame toliau ir įvertiname $|(\rho^2)'|$ intervale $1+\frac{1}{\sqrt{3}} < |x| < 2$. Gauname
$|(\rho^2)'| = |((1-\phi_x)^{\frac{1}{2}})'_x| = |\frac{1}{2}(1-\phi_x)^{-\frac{1}{2}}(\phi_{xx})| \leqslant \frac{1}{2}\|\phi_{xx}\|_{L^\infty(1+\frac{1}{\sqrt{3}}<|x|<2)} \leqslant \frac{1}{2}M$.
Iš šių dviejų įverčių imame maksimumą ir gauname

$$\|(\rho^2)'\|_{L^\infty(1<|x|<2)} \leqslant \frac{M}{2}. \tag{27}$$

Pasinaudodami šia nelygybe, pertvarkome (26). Gauname
$\int_{1<|x|<2}(1-\phi_x)|u|^6dx \leqslant 32\|u\|^4_{L^2(1<|x|<2)}\|\rho^2 u_x\|^2_{L^2(1<|x|<2)} + 32(1+M)\|u\|^6_{L^2(1<|x|<2)}$
$+ 4M^2\|u\|^6_{L^2(1<|x|<2)}$.
Žinant, kad $\rho^4 = 1-\phi_x$, gauname
$-Im\int_{-2}^{2}\phi u(t)\overline{u}_x(t)dx + Im\int_{-2}^{2}\phi u_0\overline{u}_{0x}dx \leqslant$
$\int_0^t(2E_0 - 2\int_{1<|x|<2}(1-\phi_x)|u_x(s)|^2dx + \frac{2}{3}(32\|u(s)\|^4_{L^2(1<|x|<2)}\|\rho^2 u_x(s)\|^2_{L^2(1<|x|<2)} +$
$32(1+M)\|u(s)\|^6_{L^2(1<|x|<2)} + 4M^2\|u(s)\|^6_{L^2(1<|x|<2)}) - \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\phi_{xxx}|u(s)|^2dx)ds \leqslant$

$\int_0^t (2E_0 - 2(1-\frac{32}{3}\|u(s)\|^4_{L^2(1<|x|<2)})\int_{1<|x|<2}(1-\phi_x)|u_x(s)|^2dx + \frac{64}{3}(1+M)\|u(s)\|^6_{L^2(1<|x|<2)} + \frac{8}{3}M^2\|u(s)\|^6_{L^2(1<|x|<2)} + \frac{M}{2}\int_{-2}^2 |u(s)|^2dx)ds \leqslant$
$\int_0^t (2E_0 - 2(1-\frac{32}{3}\|u(s)\|^4_{L^2(1<|x|<2)})\int_{1<|x|<2}(1-\phi_x)|u_x(s)|^2dx + \frac{64}{3}(1+M^2)\|u(s)\|^6_{L^2(1<|x|<2)} + \frac{8}{3}(1+M^2)\|u(s)\|^6_{L^2(1<|x|<2)} + \frac{M}{2}\int_{-2}^2 |u(s)|^2dx)ds \leqslant$
$\int_0^t (2E_0 - 2(1-\frac{32}{3}\|u(s)\|^4_{L^2(1<|x|<2)})\int_{1<|x|<2}(1-\phi_x)|u_x(s)|^2dx + 24(1+M^2)\|u(s)\|^6_{L^2(1<|x|<2)} + \frac{M}{2}\int_{-2}^2 |u(s)|^2dx)ds.$
Remiantis $\|u(t)\|_{L^2(I)} = \|u_0\|_{L^2(I)}$ lygybe ir (23), gauname (24).

$\square$

2.5 Sprogimo įrodymas

Dabar įrodysime teoremą apie sprendinio sprogimą **Teorema 1**.

Įrodymas.
Tegul $u(t)$ yra uždavinio (1)-(3) sprendinys. Pirmiausia parodysime, kad jeigu u_0 tenkina (8) ir (9) lygybes, tada $u(t)$ tenkina (23) visiems $t \geqslant 0$. Kadangi $\eta > 0$ ir $1 \leqslant 2\Phi(x)$, kai $1 < |x| < 2$, tai iš (9) turime
$\frac{1}{4} \geqslant \left(\int_I \Phi|u_0|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{\eta}\|u_{0x}\|^2_{L^2(I)} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant \left(\frac{1}{2}\int_{(1<|x|<2)} |u_0|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{\eta}\|u_{0x}\|^2_{L^2(I)} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant$
$\left(\frac{1}{2}\int_{(1<|x|<2)} |u_0|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\|u_0\|_{L^2(1<|x|<2)}$.
Taigi gavome

$$\|u_0\|_{L^2(1<|x|<2)} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}. \tag{28}$$

Apibrėžkime dydį T_0

$$T_0 = sup\left\{t > 0; \|u(s)\|_{L^2(1<|x|<2)} \leqslant \frac{1}{2}, 0 \leqslant s < t\right\}. \tag{29}$$

Remiantis (28) ir $u(t)$ tolydumu erdvėje $L^2(I)$, galime pasakyti, kad $T_0 > 0$. Jeigu $T_0 = \infty$, tada teorema teisinga. Tarkime, kad $T_0 < \infty$. Pasinaudojant $u(t)$ tolydumu erdvėje $L^2(I)$, turime

$$\|u(T_0)\|_{L^2(1<|x|<2)} = \frac{1}{2}. \tag{30}$$

Be to, $u(t)$ tenkina 2.4 Lemos sąlygas intervale $[0, T_0)$. Tada iš (24), (8) ir 2.4 Lemos, kai $0 \leqslant t < T_0$, gauname
$\int_{-2}^2 \Phi|u(t)|^2 dx = \int_{-2}^2 \Phi|u_0|^2 dx - 2\int_0^t \left(Im \int_{-2}^2 \phi u(s)\overline{u}_x(s) dx\right) ds \leqslant$
$\int_{-2}^2 \Phi|u_0|^2 dx - 2\int_0^t \left(Im \int_{-2}^2 \phi u_0\overline{u}_{0x} dx + \eta t\right) ds = \int_{-2}^2 \Phi|u_0|^2 dx - 2t Im \int_{-2}^2 \phi u_0\overline{u}_{0x} dx - \eta t^2$.
Taigi gavome, kad teisinga tokia nelygybė

$$\int_{-2}^2 \Phi|u(t)|^2 dx \leqslant \int_{-2}^2 \Phi|u_0|^2 dx - 2t Im \int_{-2}^2 \phi u_0\overline{u}_{0x} dx - \eta t^2 \tag{31}$$

Pertvarkome paskutinį reiškinį ir gauname
$\int_{-2}^2 \Phi|u(t)|^2 dx \leqslant \int_{-2}^2 \Phi|u_0|^2 dx - 2t Im \int_{-2}^2 \phi u_0\overline{u}_{0x} dx - \eta t^2 = \int_{-2}^2 \Phi|u_0|^2 dx - \eta(t + \frac{1}{\eta} Im \int_{-2}^2 \phi u_0\overline{u}_{0x} dx)^2 + \frac{1}{\eta}(Im \int_{-2}^2 \phi u_0\overline{u}_{0x} dx)^2$.
Kadangi iš (8) žinome, kad $\eta > 0$, tai teisinga tokia nelygybė
$\int_{-2}^2 \Phi|u(t)|^2 dx \leqslant \int_{-2}^2 \Phi|u_0|^2 dx + \frac{1}{\eta}(Im \int_{-2}^2 \phi u_0\overline{u}_{0x} dx)^2$.
Toliau, pasinaudodami integralų savybėmis, gauname
$\int_{-2}^2 \Phi|u(t)|^2 dx \leqslant \int_{-2}^2 \Phi|u_0|^2 dx + \frac{1}{\eta}(Im \int_{-2}^2 |\phi u_0||\overline{u}_{0x}| dx)^2 \leqslant \int_{-2}^2 \Phi|u_0|^2 dx + \frac{1}{\eta}\|\phi u_0\|^2_{L^2(I)}\|u_{0x}\|^2_{L^2(I)}$.

Tęsdami toliau ir pasinaudodami tuo, kad $\phi^2 \leqslant 2\Phi$, gauname
$\int_{-2}^{2} \Phi |u(t)|^2 dx \leqslant \int_{-2}^{2} \Phi |u_0|^2 dx + \frac{2}{\eta} \int_{-2}^{2} \Phi |u_0|^2 dx \|u_{0x}\|^2_{L^2(I)} = (\frac{2}{\eta} \|u_{0x}\|^2_{L^2(I)} + 1) \int_{-2}^{2} \Phi |u_0|^2 dx.$
Kadangi $1 \leqslant 2\Phi$, kai $1 < |x| < 2$, tai iš (9) ir paskutinės nelygybės gauname
$\|u(t)\|_{L^2(1<|x|<2)} \leqslant (2 \int_{1<|x|<2} \Phi |u(t)|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{2}\frac{1}{4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$
Pasinaudodami $u(t)$ tolydumu erdvėje $L^2(I)$, gauname nelygybę

$$\|u(T_0)\|_{L^2(1<|x|<2)} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

kuri prieštarauja (30). Todėl jeigu u_0 tenkina (8) ir (9) sąlygas, tada $u(t)$ tenkina (23), visiems $t \geqslant 0$.

Kadangi visi 2.4 Lemos teiginiai yra teisingi su $T = \infty$, tada $u(t)$ tenkina (31) su $T_0 = \infty$, o $t \geqslant 0$. Bet (31) teigia, kad $\int_{-2}^{2} \Phi |u(t)|^2 dx$ tampa neigiamu baigtiniame laike. Tai yra prieštara, nes $\Phi(x) > 0$, išskyrus, kai $x = 0$. Galiausiai gavome, kad jeigu u_0 tenkina (8) ir (9), tada $u(t)$ sprogsta baigtiniame laike.

$\square$

3 Summary

BLOW-UP OF SOLUTIONS FOR SCHRÖDINGER EQUATION

In this study, we will analyze Schrödinger equation (1)

$$iu_t + u_{xx} = -|u|^4 u, t \geqslant 0, x \in I,$$

with primary condition (2)

$$u(0, x) = \phi(x)$$

and periodic boundary conditions (3)

$$u(t, -2) = u(t, 2), t \geqslant 0,$$

$$u_x(t, -2) = u_x(t, 2), t \geqslant 0.$$

The solution to the (1)-(3) problem belongs to the class of functions $H^1_{prd}(I)$ in which function and its first derivative values on interval $I = (-2, 2)$ edges are equal (see (6) and (7)).

At first, we will check four properties(look at 1) of solution to (1)-(3) problem.

Then we will prove **Theorem 1**(1) using article [1].

4 Literatūros ir šaltinių sąrašas

Literatūra

[1] T. Ogawa, Y. Tsutsumi, *Blow-up of solutions for the nonlinear Schrödinger equation with quartic potential and periodic boundary condition*, in: Functional-analytic methods for partial differential equations (Tokyo, 1989), Lecture Notes in Math., 1450, Springer, Berlin, 1990, 236-251.

[2] R. Želvys, *Schrödinger'io lygties sprendinio savybės*, Bakalauro baigiamasis darbas, 2015.

[3] R.T. Glassey, *On the blowing up of solutions to Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations*, J. Math. Phys. **18** (1977),1794-1797.

[4] M. Burak Erdoğan, V. Zharnitsky, *Quasi-linear dynamics in nonlinear Schrödinger equation with periodic boundary conditions*, Comm. Math. Phys. **281** (2008), 655-673.

[5] Z. Liang, *Quasi-periodic solutions for 1D Schrödinger equation with the nonlinearity* $|u|^{2p}u$, J. Differential Equations **244** (2008), 2185-2225.

[6] T. Ogawa, Y. Tsutsumi, *Blow-up of* H^1 *solution for the nonlinear Schrödinger equation*, J. Differential Equations **92** (1991), 317-330.

[7] A. Dubickas, G. Puriuškis, *On the minimum of certain functional related to Schrödinger equation*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations **8** (2013), 1-21.

[8] V. Iljinas, E. Pozniakas, *Matematinės analizės pagrindai*, 1-2 dalys, "Mokslas", Vilnius (1981).

[9] A. Domarkas, *On the blow-up of solutions of a system of nonlinear Schrödinger equations*, Lith. Math. J. **35** (1995), 2 dalis, 144-150.