VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
TIKIMYBIŲ TEORIJOS IR SKAIČIŲ TEORIJOS KATEDRA

Violeta Franckevič

Jungtinė universalumo teorema Rymano dzeta funkcijai ir Lercho dzeta funkcijai

Magistro baigiamasis darbas

Leidžiu ginti ______________________________

Darbo vadovas **akad. prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas**

Vilnius 2017

Turinys

Įvadas

Dzeta ir L funkcijų teorijoje svarbią vietą užima šių funkcijų universalumas. Negriežtai kalbant, dzeta funkcijų universalumo savybė reiškia, kad plati analizinių funkcijų klasė gali būti aproksimuojama norimu tikslumu šių funkcijų postūmiais. Universalumo savybę atrado S. M. Voroninas. Jis 1975 metais įrodė [11] Rymano dzeta funkcijos $\zeta(s), s = \sigma + it$, universalumą. Primename, kad funkcija $\zeta(s)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}$$

ir yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus paprastąjį polių taške $s = 1$ su reziduumu 1. Voronino įrodyta teorema skamba taip.

0.1 teorema. *Tarkime, kad* $0 < r < \frac{1}{4}$, *o funkcija* $f(s)$ *yra tolydi ir nevirstanti nuliumi skritulyje* $|s| \leqslant r$ *ir analizinė to skritulio viduje. Tuomet kiekvieną* $\varepsilon > 0$ *atitinka toks* $\tau = \tau(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, *su kuriuo yra teisinga nelygybė*

$$\max_{|s| \leqslant r} |\zeta(s + \frac{3}{4} + i\tau) - f(s)| < \varepsilon.$$

Ši teorema rodo, kad plati analizinių funkcijų klasė juostoje $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ yra aproksimuojama tolygiai spindulio r skrituliuose funkcijos $\zeta(s)$ postūmiu $\zeta(s + i\tau)$. Pavyzdžiui, galime $f(s)$ imti visur lygią nenulinei konstantai.

Voronino atradimas pasirodė gana įdomus, todėl juo susidomėjo daugelis skaičių teorijos specialiastų. Buvo pastebėta, kad analogišką universalumo savybę turi ir daugelis kitų klasikinių dzeta ir L funkcijų. Be to, Voronino teorema buvo sustiprinta dviem kryptimis. Pirma, skritulys, kuriame aproksimuojama analizinė funkcija, buvo pakeistas sudėtingesne aibe. Antra, pasirodo, kad funkcijos dzeta postūmių $\zeta(s + i\tau)$, kurie norimu tikslumu aproksimuoja duotą analizinę funkciją, yra be galo daug. Tokio Voronino teoremos varianto formulavimui yra reikalingi kai kurie žymenys.

Tegul $D = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$. Simboliu $\mathscr{K}$ žymėsime juostos D kompaktinių aibių, turinčių jungųjį papildinį, klasę, o $H_0(K)$, $K \in \mathscr{K}$, bus funkcijų, tolydžių ir nevirstančių nuliu aibėje K, ir analizinių aibės K viduje, klasė. Be to, $meas A$ tegul žymi mačios aibės $A \subset R$ Lebego matą. Tuomet yra teisingas toks tvirtinimas, kurio įrodymą galima rasti [5], [10] monografijuose.

0.2 teorema. *Tarkime, $K \in \mathscr{K}$, o $f(s) \in H_0(K)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

Teoremos nelygybė rodo, kad aibė postūmių $\zeta(s+i\tau)$, aproksimuojančių funkciją $f(s)$, yra begalinė, kadangi jos apatinis tankis yra griežtai teigiamas.

Jau minėjome, kad universalumo savybę turi ir kitos dzeta funkcijos. Viena iš jų yra Lercho dzeta funkcija. Tegul $0 < \alpha \leqslant 1$ ir $\lambda \in \mathbb{R}$ yra fiksuoti parametrai. Tuomet Lercho dzeta funkcija $L(\lambda, \alpha, s)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$L(\lambda, \alpha, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda m}}{(m+\alpha)^s}.$$

Kai $\lambda \in \mathbb{Z}$, tai funkcija $L(\lambda, \alpha, s)$ tampa Hurvico dzeta funkcija

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+\alpha)^s}, \quad \sigma > 1,$$

kuri yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus paprastąjį polių taške $s = 1$ su reziduumu 1. Kai $\lambda \notin \mathbb{Z}$, tai funkcija $L(\lambda, \alpha, s)$ yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, t.y. ji yra sveikoji funkcija. Priminsime funkcijos $L(\lambda, \alpha, s)$ universalumo teoremos formulavimą. Skaičius α yra vadinamas transcendenčiuoju, jei jis nėra jokio polinomo su racionaliaisiais koeficientais šaknis. Simboliu $H(K), K \in \mathscr{K}$, žymėsime funkcijų, tolydžių aibėje K ir analizinių jos viduje, klasę. Tada yra žinoma tokia teorema [7].

0.3 teorema. *Tarkime, kad α yra transcendentusis skaičius, $K \in \mathscr{K}$, o $f(s) \in H(K)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |L(\lambda, \alpha, s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

Matome, kad 3 teorema skiriasi nuo 2 teoremos, nes joje nereikalaujama, kad aproksimuojama funkcija nevirstų nuliu aibėje K. Yra pagrindo manyti, kad taip yra todėl, kad Rymano dzeta funkcija turi Oilerio sandaugą pagal pirminius skaičius

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \quad \sigma > 1,$$

o funkcija $L(\lambda, \alpha, s)$ su transcendenčiuoju α tokios išraiškos sandauga pagal pirminius skaičius neturi.

Magistro darbo tikslas yra išnagrinėti funkcijų $\zeta(s)$ ir $L(\lambda, \alpha, s)$ jungtinį universalumą. Kai α yra transcendentusis parametras, tokia jungtinė universalumo teorema buvo įrodyta [8] darbe. Dėl eksponentinės funkcijos $e^{2\pi i\lambda m}$ periodiškumo visada galime laikyti, kad $0 < \lambda \leqslant 1$.

0.4 teorema. *Tarkime, kad α yra transcendentusis parametras, o $\lambda \in (0;1]$. Tegul $K_1, K_2 \in \mathscr{K}$, o $f_1(s) \in H_0(K_1)$ ir $f_2(s) \in H(K_2)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}meas\{\tau\in[0,T]:\sup_{s\in K_1}|\zeta(s+i\tau)-f_1(s)|<\varepsilon\ ,$$
$$\sup_{s\in K_2}|L(\lambda,\alpha,s+i\tau)-f_2(s)|<\varepsilon\}>0.$$

Magistro darbe mes atsisakome parametro α transcendentiškumo, pakeisdami jį bendresne sąlyga. Tegul $\mathscr{P}$ yra visų pirminių skaičių aibė, $\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$ ir

$$L(\mathscr{P},\alpha)=\{(\log p:p\in\mathscr{P}),\log(m+\alpha):m\in\mathbb{N}_0\}.$$

Pagrindinis magistro darbo rezultatas yra ši teorema.

Teorema. *Tarkime, kad aibė $L(\mathscr{P},\alpha)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$. Tegul $K_1,K_2\in\mathscr{K}$, o $f_1(s)\in H_0(K_1)$ ir $f_2(s)\in H(K_2)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon>0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}meas\{\tau\in[0,T]:\sup_{s\in K_1}|\zeta(s+i\tau)-f_1(s)|<\varepsilon\ ,$$
$$\sup_{s\in K_2}|L(\lambda,\alpha,s+i\tau)-f_2(s)|<\varepsilon\}>0.$$

Pastebime, kad jei α yra transcendentusis, tai tuomet aibė $L(\mathscr{P},\alpha)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$. Tikrai, jeigu turime tiesinę kombinaciją

$$k_1\log p_1+...+k_r\log p_r+l_1\log(m_1+\alpha)+...+l_v\log(m_v+\alpha)=0$$

su sveikaisiais $k_1,...,k_r,l_1,...,l_v$, kurie ne visi yra lygūs nuliui ir pirminiais $p_1,...,p_r$ ir $m_1,...,m_v\in\mathbb{N}_0$, tai atmetę logaritmus, gauname, kad

$$p_1^{k_1} \cdot ... \cdot p_r^{k_r} \cdot (m_1 + \alpha)^{l_1} \cdot ... \cdot (m_v + \alpha)^{l_v} = 1.$$

Tačiau ši lygybė prieštarauja skaičiaus α transcendentumui, nes pasinaudoję Niutono binomu ir atlikę veiksmus, gauname polinomą su sveikaisiais koeficientais, kurio šaknis yra skaičius α.

Priešingas tvirtinimas, kad iš aibės $L(\mathscr{P}, \alpha)$ tiesinio nepriklausomumo virš $\mathbb{Q}$ išplaukia, kad α yra transcendentusis skaičius, nėra žinomas. Deja, neturime ir pavyzdžio, kad su netranscendenčiuoju α aibė $L(\mathscr{P}, \alpha)$ būtų tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$.

Universalumo teoremos įrodymui naudosime tikimybinį metodą, kuris buvo pasiūlytas [5] monografijoje, todėl sekančiame skyrelyje pateiksime reikalingus rezultatus apie tikimybinių matų silpnąjį konvergavimą.

1 Silpnasis mato konvergavimas

Tarkime, kad $\mathbb{X}$ yra metrinė arba topologinė erdvė, simboliu $\mathscr{B}(\mathbb{X})$ žymėsime erdvės $\mathbb{X}$ Borelio σ kūną, t.y. mažiausią σ kūną, kuriam priklauso erdvės $\mathbb{X}$ atvirųjų aibių sistema. Tegul $C(\mathbb{X})$ yra erdvės $\mathbb{X}$ realių, tolydžių, aprėžtų funkcijų klasė.

Apibrėžimas. *Tegul $P_n, n \in \mathbb{N}$, ir P yra tikimybiniai matai, apibrėžti mačioje erdvėje $(\mathbb{X}, \mathscr{B}(\mathbb{X}))$. Sakome, kad P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P, jei su kiekviena funkcija $f \in C(\mathbb{X})$ yra teisinga lygybė*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{X}} f dP_n = \int_{\mathbb{X}} f dP.$$

Yra žinomi silpnojo tikimybinio mato apibrėžimo ekvivalentai įvairių aibių terminais. Universalumo teoremos įrodymui yra reikalingi tokie ekvivalentai, nusakomi atvirųjų ir tolydumo aibių terminais. Primename, kad aibė A yra mato P tolydumo aibė, jei jos krašto ∂A matas P yra lygus nuliui: $P(\partial A) = 0$.

1.1 lema. *Tegul $P_n, n \in \mathbb{N}$, ir P yra tikimybiniai matai $(\mathbb{X}, \mathscr{B}(\mathbb{X}))$. Tuomet P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P tada ir tik tada, kai galioja kuris nors iš tvirtinimų:*
1. su kiekviena atvirąja aibe $G \subset \mathbb{X}$ yra teisinga nelygybė

$$\liminf_{n\to\infty} P_n(G) \geqslant P(G)$$

2. su kiekviena mato P tolydumo aibe A teisinga nelygybė

$$\lim P_n(A) = P(A).$$

Lema yra 2.1 teoremos iš [2] dalis. Ten yra duotas ir jos įrodymas.

Magistro darbe bus naudojama ir atsitiktinio elemento sąvoka, todėl mes ją primename.

Apibrėžimas. *Atsitiktiniu* $\mathbb{X}$ *reikšmiu elementu, apibrėžtu tikimybinėje erdvėje* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, *vadiname funkciją* $X : \Omega \to \mathbb{X}$, *su kiekviena Borelio aibe* $B \in \mathscr{B}(\mathbb{X})$ *tenkinančią sąlygą*

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathscr{A}.$$

Apibrėžimas. $\mathbb{X}$ *reikšmio atsitiktinio elemento* X *pasiskirstymu vadiname tikimybinį matą*

$$P(A) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}, A \in \mathscr{B}(\mathbb{X}).$$

Apibrėžimas. *Sakome, kad atsitiktinis elementas* $X_n, n \to \infty$, *konverguoja į atsituktinį elementą* X *pagal pasiskirstymą, jei elemento* X_n *pasiskirstymas* $P_n, n \to \infty$, *silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento* X *pasiskirstymą* P. *Konvergavimas pagal pasiskirstymą žymimas simboliu* $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{D} X$. *Atsitiktinių elementų* X_n *apibrėžimo tikimybinės erdvės gali būti skirtingos, tačiau jie privalo įgyti reikšmes iš tos pačios erdvės.*

Mes remsimės tokiu tvirtinimu.

1.2 lema. *Tarkime, kad atsitiktiniai elementai* $Y_n, X_{1n}, X_{2n}, ...$ *turi tą pačią apibrėžimo sritį* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *ir įgyja reikšmes iš separabilios metrinės erdvės* $(\mathbb{X}, \rho)$. *Tegul su kiekvienu* $k \in \mathbb{N}$

$$X_{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{D} X_k \quad ir \quad X_k \xrightarrow[k\to\infty]{D} X_k.$$

Be to, tegul su kiekvienu $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : \rho(X_{k_n}(\omega), Y_n(\omega)) \geqslant \varepsilon)\} = 0.$$

Tuomet $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{D} X$.

Ḷema yra 4.1 teorema iš [2] monografijos.

Mums bus reikalinga silpnojo konvergavimo savybė, kai turime atvaizdį tarp dviejų metrinių erdvių.

Apibrėžimas. *Tegul* $(\mathbb{X}_1, \mathscr{B}(\mathbb{X}_1))$ *ir* $(\mathbb{X}_2, \mathscr{B}(\mathbb{X}_2))$ *yra dvi mačios erdvės. Atvaizdis* $u : \mathbb{X}_1 \to \mathbb{X}_2$ *yra vadinamas* $(\mathscr{B}(\mathbb{X}_1), \mathscr{B}(\mathbb{X}_2))$ *mačiu, jei kiekvienas aibės* $A_2 \in \mathscr{B}(\mathbb{X}_2)$ *pirmavaizdis* $u^{-1}A_2 \in \mathscr{B}(\mathbb{X}_1)$, *arba*

$$u^{-1}\mathscr{B}(\mathbb{X}_2) \subset \mathscr{B}(\mathbb{X}_1).$$

Tegul $u : \mathbb{X}_1 \to \mathbb{X}_2$ yra $(\mathscr{B}(\mathbb{X}_1), \mathscr{B}(\mathbb{X}_2))$ matus atvaizdis. Tuomet yra žinoma [2], kad tikimybinis matas P erdvėje $(\mathbb{X}_1, \mathscr{B}(\mathbb{X}_1))$ apibrėžia erdvėje $(\mathbb{X}_2, \mathscr{B}(\mathbb{X}_2))$ vienintelį tikimybinį matą Pu^{-1} formule

$$Pu^{-1}(A) = P(u^{-1}A), A \subset \mathscr{B}(\mathbb{X}_2).$$

Dažnai yra naudojamas toks tvirtinimas.

1.3 lema. *Tarkime, kad* $P_n, n \to \infty$, *silpnai konverguoja į matą* P, *o atvaizdis* $u : \mathbb{X}_1 \to \mathbb{X}_2$ *yra tolydus. Tuomet tikimybinis matas* $P_n u^{-1}, n \to \infty$, *silpnai konverguoja į matą* Pu^{-1}.

Lemos įrodymas yra duotas [2] monografijos 1 skyriaus 5 skyrelio pradžioje.

Įrodyti tikimybinių matų silpnąjį konvergavimą nėra paprasta. Šiam tikslui dažnai būna naudingos tikimybinių matų šeimos reliatyvaus kompaktiškumo ir suspaustumo savokos bei jas surišanti Prochorovo teorema.

Apibrėžimas. *Tarkime, kad* $\{P\}$ *yra tikimybinių matų šeima erdvėje* $(\mathbb{X}, \mathscr{B}(\mathbb{X}))$. *Sakome, kad ši šeima yra reliatyviai kompaktiška, jei iš kiekvienos tos šeimos sekos* $\{P_n\}$ *galima išskirti posekį* $\{P_{n_k}\}$, *silpnai konverguojantį į kurį nors tikimybinį matą erdvėje* $(\mathbb{X}, \mathscr{B}(\mathbb{X}))$.

Apibrėžimas. *Sakome, kad tikimybinių matų šeima* $\{P\}$ *yra suspausta (tiršta), jeigu kiekvieną* $\varepsilon > 0$ *atitinka tokia kompaktiška erdvės* $\mathbb{X}$ *aibė* $K = K(\varepsilon)$, *kad su visais matais* $P \in \{P\}$ *yra teisinga nelygybė*

$$P(K) > 1 - \varepsilon.$$

1.4 lema. *(Tiesioginė Prochorovo teorema). Tarkime, kad tikimybinių matų šeima $\{P\}$ yra suspausta. Tuomet ši šeima yra reliatyviai kompaktiška.*

Lema yra 6.1 teorema iš [2] monografijos. Mums bus reikalingas tikimybinių matų, apibrėžtų kompaktinėje grupėje G, silpnasis konvergavimas. Šiuo atveju, yra naudingas Furjė transformacijų aparatas, kurių apibrėžimui yra reikalinga grupės charakterio savoka. Tegul $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$ yra vienetinis apskritimas kompleksinėje plokštumoje. Grupės G charakteriu vadinama funkcija $\chi : G \to \gamma$, kuriai galioja multiplikatyvumo savybė, t.y. su visais $g_1, g_2 \in G$ yra teisinga lygybė

$$\chi(g_1.g_2) = \chi(g_1)\chi(g_2).$$

Visi grupės G charakteriai daugybos operacijos atžvilgiu sudaro grupę, kuri yra vadinama grupės G dualiąja grupe ir žymima $\mathscr{G}$.

Apibrėžimas. *Tegul P yra tikimybinis matas erdvėje $(G, \mathscr{B}(G))$. Tuomet šiuo mato Furjė transformacija $F(\chi), \chi \in \mathscr{G}$, yra apibrėžiama integralu*

$$F(\chi) = \int_G \chi(g) dP.$$

Teisingas toks tvirtinimas.

1.5 lema. *Tarkime, kad $P_n, n \in \mathbb{N}$, yra tikimybinis matas mačioje erdvėje $(G, \mathscr{B}(G))$, o $F_n(\chi)$ yra šio mato Furjė transformacija. Tegul $F_n(\chi), n \to \infty$, su visais charakteriais χ konverguoja į kurią nors tolydžią funkciją $F(\chi)$. Tuomet erdvėje $(G, \mathscr{B}(G))$ egzistuoja toks tikimybinis matas P, į kurį, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja matas P_n, o $F(\chi)$ yra mato P Furjė transformacija.*

Lema yra 1.4.2 teorema iš [4] monografijos.

2 Ribinės teoremos

Šiame skyrelyje įrodysime jungtinę ribinę teoremą Rymano ir Lercho dzeta funkcijoms analizinių funkcijų erdvėje, kuri yra pagrindinis ingredientas universalumo teoremos įrodyme. Ribinės teoremos formulavimui yra reikalingi kai kurie apibrėžimai ir žymenys.

Kaip ir daugumoje darbų universalumo tematika, simboliu γ žymime vienetinį apskritimą kompleksinėje plokštumoje, t.y. $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$. Apibrėžiame dvi aibes

$$\hat{\Omega} = \prod_p \gamma_p \quad ir \quad \Omega = \prod_{m=0}^{\infty} \gamma_m,$$

čia $\gamma_p = \gamma$ su visais $p \in \mathscr{P}$ ir $\gamma_m = \gamma$ su visais $m \in \mathbb{N}_0$. Sandaugos reiškia aibių Dekarto sandaugas. Taigi, aibę $\hat{\Omega}$ sudaro visos funkcijos, atvaizduojančios visų pirminių skaičių aibę $\mathscr{P}$ vienetiniame apskritime, aibę Ω sudaro visos funkcijos, atvaizduojančios aibę $\mathbb{N}_0$ vienetiniame apskritime. Tose aibėse galima apibrėžti sandaugos topologiją [9], ir šios aibės tampa topologinėmis erdvėmis. Jeigu dar jose apibrėšime pataškinės daugybos operaciją, tai gausime, kad torai $\hat{\Omega}$ ir Ω yra topologinės grupės. Kadangi apskritimas yra kompaktinė aibė, tai pagal Tichonovo teoremą [9], $\hat{\Omega}$ ir Ω yra kompaktinės topologinės grupės. Todėl mačiose erdvėse $(\hat{\Omega}, \mathscr{B}(\hat{\Omega}))$ ir $(\Omega, \mathscr{B}(\Omega))$ galima apibrėžti atitinkamai tikimybinius Haro matus $\hat{m}_H$ ir m_H. Gauname dvi tikimybines erdves $(\hat{\Omega}, \mathscr{B}(\hat{\Omega}), \hat{m}_H)$ ir $(\Omega, \mathscr{B}(\Omega), m_H)$. Primename, kad bet kuris Haro matas m erdvėje $(\tilde{\Omega}, \mathscr{B}(\tilde{\Omega}))$ pasižymi invariantiškumo savybe, t.y. $m(A) = m(\tilde{\omega}A) = (mA\tilde{\omega})$ su kiekviena aibe $A \in \mathscr{B}(\tilde{\Omega})$ ir bet kuriuo elementu $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$.

Apibrėžiame dar vieną aibę

$$\underline{\Omega} = \tilde{\Omega} \times \Omega.$$

Vėl pagal Tichonovo teoremą turime, kad $\underline{\Omega}$ yra kompaktinė topologinė grupė todėl, panašiai kaip ir anksčiau gauname dar vieną tikimybinę erdvę $(\underline{\Omega}, \mathscr{B}(\underline{\Omega}), \underline{m}_H)$, čia $\underline{m}_H$ yra tikimybinis Haro matas. Pastebime, kad matas $\underline{m}_H$ yra matų $\hat{m}_H$ ir m_H sandauga, t.y.

$$\underline{m}_H(A_1 \times A_2) = \hat{m}_H(A_1) \cdot m_H(A_2), \quad A_1 \in \mathscr{B}(\tilde{\Omega}),\ A_2 \in \mathscr{B}(\Omega).$$

Tegul $\hat{\omega}(p)$ yra elemento $\hat{\omega} \in \hat{\Omega}$ projekcija į apskritimą $\gamma_p, p \in \mathscr{P}$, o $\omega(m)$ yra elemento $\omega \in \Omega$ projekcija į apskritimą $\gamma_m,\ m \in \mathbb{N}_0$. Be to, tegul $\underline{\omega} = (\hat{\omega}, \omega)$.

Tegul $H(D),\ D = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$, yra analizinių juostoje D funkcijų erdvė su tolygaus konvergavimo kompaktinėse aibėse topologija. Šioje topologijoje seka $\{f_n(s)\} \subset H(D)$ konverguoja į funkciją $f(s) \in H(D)$ tada ir tik tada, kai su kiekviena kompaktine aibe $K \subset D$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{s\in K} |f_n(s) - f(s)| = 0.$$

Tikimybinėje erdvėje $(\underline{\Omega}, \mathscr{B}(\underline{\Omega}), \underline{m}_H)$ apibrėžiame $H^2(D) = H(D) \times H(D)$ reikšmį atsitiktinį elementą $\zeta(s, \alpha, \lambda, \underline{\omega})$ formule

$$\underline{\zeta}(s, \alpha, \lambda, \underline{\omega}) = (\zeta(s, \hat{\omega}),\ L(\lambda, \alpha, s, \omega)),$$

čia

$$\zeta(s, \hat{\omega}) = \prod_p \Big(1 - \frac{\hat{\omega}(p)}{p^s}\Big)^{-1}$$

ir

$$L(\lambda, \alpha, s, \omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\lambda m}\omega(m)}{(m+\alpha)^s}.$$

Pastebime, kad tiek sandauga, tiek ir eilutė beveik su visais $\hat{\omega}$ ir ω konverguoja tolygiai juostos D kompaktinėse aibėse [5], [7]. Tegul $P_{\underline{\zeta}}$ yra tikimybinis matas erdvėje $(H(D), \mathscr{B}(H(D)))$, apibrėžtas formule

$$P_{\underline{\zeta}}(A) = \underline{m}_H(\underline{\omega} \ \in \ \underline{\Omega} : \ \underline{\zeta}(s, \alpha, \lambda, \underline{\omega}) \ \in A).$$

Šio skyrelio pagrindinis rezultatas yra ribinė teorema matui

$$P_T(A) =^{def} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : \underline{\zeta}(s+i\tau,\alpha,\lambda) \in A\},\ A \in \mathscr{B}(H^2(D)).$$

2.1 teorema. *Tarkime, kad aibė $L(\alpha,\mathscr{P})$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$. Tuomet P_T, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą $P_{\underline{\zeta}}$.*

Teoremos įrodymą padalysime į keletą lemų. Tegul

$$Q_T(A) = \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : \Big((p^{-i\tau} : p \in \mathscr{P}), ((m+\alpha)^{-i\tau} : m \in \mathbb{N}_0)\Big) \in A\},\ A \in \mathscr{B}(\underline{\Omega}).$$

2.2 lema. *Tarkime, kad aibė $L(\alpha,\mathscr{P})$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$. Tuomet Q_T, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į Haro matą $\underline{m}_H$.*

Įrodymas. Taikome Furjė transformacijų metodą. Yra žinoma [8], kad mato Q_T Furjė transformacija $\mathscr{G}(\underline{k},\underline{l}), \underline{k} = (k_p : p \in \mathscr{P}),\ \underline{l} = (l_m : m \in \mathbb{N}_0)$, turi pavidalą

$$\mathscr{G}_T(\underline{k},\underline{l}) = \int_\Omega \prod_{p\in\mathscr{P}} \hat{\omega}^{k_p}(p) \prod_{m\in\mathbb{N}_0} \omega^{l_m}(m) 2Q_T,$$

čia tik baigtinis skaičius sveikųjų skaičių k_p ir l_m yra nelygūs nuliui. Iš čia ir Q_T pavidalo randame, kad

$$\begin{gathered}\mathscr{G}_T(\underline{k},\underline{l}) = \frac{1}{T}\int_0^T \prod_{p\in\mathscr{P}} p^{-i\tau k_p} \prod_{m\in\mathbb{N}_0} (m+\alpha)^{-i\tau l_m} d\tau = \\ \frac{1}{T}\int_0^T exp\{-i\tau\Big(\sum_{p\in\mathscr{P}} k_p \log p + \sum_{m\in\mathbb{N}_0} l_m \log(m+\alpha)\Big)\} d\tau,\end{gathered} \tag{2.1}$$

čia abi sumos yra baigtinės, nes tik baigtinis kiekis skaičių k_p ir l_m yra nenuliai.

Aišku, kad

$$\mathscr{G}_T(\underline{0},\underline{0}) = \frac{1}{T}\int_0^T d\tau = 1. \tag{2.2}$$

Dabar tegul $(\underline{k}, \underline{l}) \neq (\underline{0}, \underline{0})$. Tuomet pastebime, kad

$$\sum_{p \in \mathscr{P}} k_p \log p + \sum_{m \in \mathbb{N}_0} l_m \log(m + \alpha) \neq 0,$$

nes aibė $L(\alpha, \mathscr{P})$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$. Todėl šiuo atveju iš (2.1) randame, jog

$$\mathscr{G}_T(\underline{k}, \underline{l}) = \frac{exp\{-iT\Big(\sum_{p \in \mathscr{P}} k_p \log p + \sum_{m \in \mathbb{N}_0} l_m \log(m+)\Big)\} - 1}{-iT\Big(\sum_{p \in \mathscr{P}} k_p \log p + \sum_{m \in \mathbb{N}_0} l_m \log(m + \alpha)\Big)}. \tag{2.3}$$

Taigi, kai $(\underline{k}, \underline{l} \neq (\underline{0}, \underline{0})$, tai

$$\lim_{T \to \infty} \mathscr{G}_T(\underline{k}, \underline{l}) = 0, \tag{2.4}$$

nes (2.3) formulės dešiniosios pusės modulis neviršija 2, o vardiklis neaprežtai auga, kai $T \to \infty$. Iš (2.2) ir (2.4) gauname, kad

$$\lim_{T \to \infty} \mathscr{G}_T(\underline{k}, \underline{l}) = \begin{cases} 1, \ kai \ (\underline{k}, \underline{l}) = (\underline{0}, \underline{0}), \\ 0, \ kai \ (\underline{k}, \underline{l}) \neq (\underline{0}, \underline{0}). \end{cases}$$

Yra žinoma [8], kad dešinioji šios lygybės pusė yra Haro mato $\underline{m}_H$ Furjė transformaija. Todėl lemos tvirtinimas išplaukia iš 1.5 lemos.

Funkcijos $\hat{\omega}(p)$ yra apibrėžtos aibėje $\mathscr{P}$. Jas pratęsiame į visą aibę $\mathbb{N}$ naudodamiesi formule

$$\hat{\omega}(m) = \prod_{\substack{p^l | m \\ p^{l+1} \nmid m}} \hat{\omega}^l(p), m \in \mathbb{N}.$$

Tuomet yra įrodoma, kad su beveik visais $\hat{\omega}$

$$\zeta(s,\hat{\omega}) = \prod_p (1-\frac{\hat{\omega}(p)}{p^s})^{-1} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\hat{\omega}(m)}{m^s}.$$

Tegul $\theta > \frac{1}{2}$ yra fiksuotas skaičius, $n \in \mathbb{N}$. Apibrėžiame funkcijas

$$\nu_n(m) = exp\{-\Big(\frac{m}{n}\Big)^{\theta}\},\ m \in \mathbb{N},$$

ir

$$\nu_n(m,\alpha) = exp\{-\Big(\frac{m+\alpha}{n+\alpha}\Big)^{\theta}\},\ m \in \mathbb{N}_0.$$

Be to, tegul

$$\zeta_n(s) = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\nu_n(m)}{m^s} \quad ir \quad L_n(\lambda,\alpha,s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\lambda m}\nu_n(m,\alpha)}{(m+\alpha)^s}.$$

Tuomet yra žinoma [5], [7], kad pastarosios eilutės konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$. Toks pat tvirtinimas, aišku, galioja ir eilutėms

$$\zeta_n(s,\hat{\omega}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\hat{\omega}(m)\nu_n(m)}{m^s} \quad ir \quad L_n(\lambda,\alpha,\omega,s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\lambda m}\omega(m)\nu_n(m,\alpha)}{(m+\alpha)^s},$$

nes $|\hat{\omega}(m)| = |\omega(m)| = 1$. Tegul, trumpumo dėlei,

$$\underline{\zeta}_n(s,\alpha) = \Big(\zeta_n(s), L_n(\lambda,\alpha,s)\Big)$$

ir

$$\underline{\zeta}_n(s,\alpha,\underline{\omega}) = \Big(\zeta_n(s,\hat{\omega}), L_n(\lambda,\alpha,\omega,s)\Big).$$

Aibėms $A \in \mathscr{B}\Big(H^2(D)\Big)$, apibrėžiame

$$P_{T,n}(A) = \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : \underline{\zeta}_n(s+i\tau,\alpha) \in A\}$$

ir

$$\hat{P}_{T,n}(A) = \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : \underline{\zeta}_n(s+i\tau, \alpha, \underline{\omega}_0) \in A\},$$

čia $\underline{\omega}_0 \in \underline{\Omega}$ yra fiksuotas elementas.

2.3 lema. *Tarkime, kad aibė $L(\alpha, \mathscr{P})$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$. Tuomet erdvėje $(H^2(D), \mathscr{B}(H^2(D)))$ egzistuoja toks tikimybinis matas P_n, į kurį, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja $P_{T,n}$ ir $\hat{P}_{T,n}$.*

Įrodymas. Nagrinėjame funkciją $u_n : \underline{\Omega} \to H^2(D)$, apibrėžtą formule

$$u_n(\underline{\omega}) = \underline{\zeta}_n(s, \alpha, \underline{\omega}).$$

Kadangi eilutės, apibrėžiančios funkcijas $\zeta_n(s, \hat{\omega})$ ir $L_n(\lambda, \alpha, s, \omega)$ konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$, tai yra žinoma [8], kad funkcija u_n yra tolydi. Be to,

$$u_n\Big((p^{-i\tau} : p \in \mathscr{P}), ((m+\alpha)^{-i\tau} : m \in \mathbb{N}_0)\Big) = \underline{\zeta}(s+i\tau, \alpha).$$

Todėl

$$\begin{aligned} P_{T,n}(A) &= \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : u_n\Big((p^{-i\tau} : p \in \mathscr{P}), ((m+\alpha)^{-i\tau} : m \in \mathbb{N}_0)\Big) \in A\} \\ &= \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : \Big((p^{-i\tau} : p \in \mathscr{P}), ((m+\alpha)^{-i\tau} : m \in \mathbb{N}_0)\Big) \in u_n^{-1}A\} \\ &= Q_T(u_n^{-1}A) \end{aligned}$$

su bet kuria aibe $A \in \mathscr{B}(H^2(D))$. Taigi, turime, kad $P_{T,n} = Q_T u_n^{-1}$. Iš čia, funkcijos u_n tolydumo bei (1.3) ir (2.2) lemų gauname, jog $P_{T,n}$, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą $\underline{m}_H u_n^{-1}$.

Analogiškai samprotaujame ir mato $\hat{P}_{T,n}$ atveju. Imame funkciją $\hat{u_n} : \underline{\Omega} \to H^2(D)$, apibrėžtą formule

$$\hat{u}_n(\underline{\omega} = \underline{\zeta}_n(s, \alpha, \underline{\omega\omega}_0).$$

Tuomet panašiu būdu, kaip ir mato $P_{T,n}$ atveju, gauname, kad $\hat{P}_{T,n}$, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą $\underline{m}_H \hat{u}_n^{-1}$. Tegul $u : \underline{\Omega} \to \underline{\Omega}$ yra duota formule $u(\underline{\omega}) = \underline{\omega\omega}_0$. Tuomet matome, kad $\hat{u}_n(\underline{\omega}) = u_n(u(\underline{\omega}))$. Dabar pasinaudojame Haro mato $\underline{m}_H$ invariantiškumu. Turime, kad $\underline{m}_H\hat{u}_n^{-1} = \underline{m}_H(u_n u)^{-1} = (\underline{m}_H u^{-1})u_n^{-1} = \underline{m}_H u_n^{-1}$, nes dėl mato invariantiškumo $\underline{m}_H u^{-1} = \underline{m}_H$. Taigi, gauname, kad $P_{T,n}$, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į tą patį matą $P_n = m_H u_n^{-1}$.

Kitas 2.1 teoremos įrodymo etapas yra perėjimas nuo $\underline{\zeta}_n(s,\alpha)$ prie $\underline{\zeta}(s,\alpha)$. Tam yra reikalingas tvirtinimas apie vidurkinį funkcijos $\underline{\zeta}(s,\alpha)$ aproksimavimą funkcija $\underline{\zeta}_n(s,\alpha)$.

Tegul ρ yra metrika erdvėje $H(D)$. Tuomet metriką $\underline{\rho}$ erdvėje $H^2(D)$ apibrėžiame taip:

$$\underline{\rho}(\underline{g}_1, \underline{g}_2) = \max\Big(\rho(g_{11}, g_{21}), \rho(g_{12}, g_{22})\Big), \quad \underline{g}_1 = (g_{11}, g_{12}), \ \underline{g}_2 = (g_{21}, g_{22}) \in H^2(D).$$

2.4 lema. *Yra teisinga lygybė*

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \underline{\rho}\Big(\underline{\zeta}(s+i\tau,\alpha), \underline{\zeta}_n(s+i\tau,\alpha)\Big)d\tau = 0.$$

Įrodymas. Yra žinoma [5], kad

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \rho\Big(\zeta(s+i\tau), \zeta_n(s+i\tau)\Big)d\tau = 0. \tag{2.5}$$

ir [7] kad

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \rho\Big(L(\lambda,\alpha,s+i\tau), L_n(\lambda,\alpha,s+i\tau)\Big)d\tau = 0 \tag{2.6}$$

nepriklausomai nuo parametro α aritmetinės prigimties. Iš šių 2 lygybių ir metrikos ρ apibrėžimo gauname lemos tvirtinimą.

2.5 lema. *Su beveik visais $\underline{\omega}$ mato $\underline{m}_H$ atžvilgiu yra teisinga lygybė*

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \rho\Big(\underline{\zeta}(s+i\tau,\alpha,\underline{\omega}), \zeta_n(s+i\tau,\alpha,\underline{\omega})\Big)d\tau = 0$$

Įrodymas. Tvirtinimas išplaukia iš lygybių, analogiškų 2.5 ir 2.6 lygybėms [5], [7], kurios yra teisingos su beveik visais $\hat{\omega}$ ir ω.

Pastebime, kad 2.4 ir 2.5 lemos yra atskiri atvejai analogiškų tvirtinimų iš [8].

2.6 lema. *Tarkime, kad aibė $L(\mathscr{P}, \alpha)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$. Tuomet erdvėje $\Big(H^2(D), \mathscr{B}(H^2(D))\Big)$ egzistuoja toks tikimybinis matas P, į kurį, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja P_T ir*

$$\hat{P}_T(A) = \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0, T] : \underline{\zeta}(s + i\tau, \alpha, \lambda, \underline{\omega}) \in A\}, \quad A \in \mathscr{B}(H^2(D)).$$

Įrodymas. Įrodymo schema tokia pati, kaip ir [8] darbe, parametras α įeina tik tiek, kad naudojama 2.3 lema. Todėl mes įrodymą trumpinsime.

Tegul ξ yra atsitiktinis dydis, apibrėžtas kurioje nors tikimybinėje erdvėje su matu η ir tolygiai pasiskirstęs intervale $[0, 1]$. Kitaip tariant, jo pasiskirstymo funkcija $F(x)$ yra

$$F(x) = \begin{cases} 0, & kai \quad x \leqslant 0, \\ x, & kai \quad 0 < x \leqslant 0, \\ 1, & kai \quad x > 1. \end{cases}$$

Apibrėžiame $H^2(D)$ reikšmį atsitiktinį elementą

$$X_{T,n}(s) = \underline{\zeta}(s + i\xi T, \alpha).$$

Tuomet iš 2.3 lemos turime, kad

$$X_{T,n} \xrightarrow[T \to \infty]{\mathscr{D}} X_n, \tag{2.7}$$

čia $X_n(s)$ yra $H^2(D)$ reikšmis atsitiktinis elementas, turintis pasiskirstymą P_n, o P_n yra ribinis matas 2.3 lemoje. Sekančiame žingsnyje standartiškai yra įrodoma, kad matų šeima $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ yra suspausta, todėl pagal Prochorovo teoremą (1.4 lema) ji yra relityviai kompaktiška. Vadinasi, iš kiekvienos tos šeimos sekos galime išskirti posekį $\{P_{n/r}\}$, kai

$r \to \infty$, silpnai konverguojantį į kurį nors tikimybinį matą P erdvėje $\Big(H^2(D), (H^2(D))\Big)$. Taigi,

$$X_{n_r} \xrightarrow[r\to\infty]{\mathscr{D}} P. \tag{2.8}$$

Apibrėžiame dar vieną $H^2(D)$ reikšmį atsitiktinį elementą

$$X_T(s) = \underline{\zeta}(s + i\xi T, \alpha).$$

Remdamiesi 2.4 lema ir Čebyševo tipo nelygybe, gauname, kad su kiekvienu $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \eta(\underline{\rho}(X_T, X_{T,n}) \geqslant \varepsilon) \\ = &\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : \underline{\rho}\Big(\underline{\zeta}(s+i\tau,\alpha), \underline{\zeta}_n(s+i\tau,\alpha)\Big) \geqslant \varepsilon\} \\ \leqslant &\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T\varepsilon} \int_0^T \underline{\rho}\Big(\underline{\zeta}(s+i\tau,\alpha), \underline{\zeta}_n(s+i\tau,\alpha)\Big) d\tau = 0. \end{aligned}$$

Ši lygybė, (2.7) ir (2.8) kartu su 1.2 lema leidžia tvirtinti, kad

$$X_T \xrightarrow[T\to\infty]{\mathscr{D}} P, \tag{2.9}$$

kitaip tariant, P_T, kai $T \to \infty$ silpnai konverguoja į matą P. Be to, (2.9) sąryšis rodo, kad matas P nepriklauso nuo posekio $\{P_{n_r}\}$ parinkimo. Taigi, turime, kad

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{D}} P. \tag{2.10}$$

Lieka parodyti, kad ir $\hat{P}_T$, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į P. Šiam tikslui apibrėžiame $H^2(D)$ reikšmius atsitiktinius elementus

$$\hat{X}_{T,n}(s) = \underline{\zeta}_n(s + i\xi T, \alpha, \underline{\omega})$$

ir

$$\hat{X}_{T,n}(s) = \underline{\zeta}(s + i\xi T, \alpha, \underline{\omega}).$$

Tuomet pakartoję ankstesnius samprotavimus šiems atsitiktiniams elementams, pasinaudoję 2.3 lema bei (2.10) sąryšiu, gauname, jog $\hat{P}_T$, kai $T \to \infty$, taip pat silpnai konverguoja į matą P.

Kad pilnai įrodytumėme 2.1 teoremą, dar reikia identifikuoti matą P. Šiam tikslui dar bus reikalinga viena lema, kurios įrodymui yra naudojamas aibės $L(\alpha, \mathscr{P})$ tiesinis nepriklausomumas virš $\mathbb{Q}$.

Tegul, trumpumo dėlei,

$$a_\tau = \Big((p^{-i\tau} : p \in \mathscr{P}), ((m+\alpha)^{-i\tau} : m \in \mathbb{N})\Big).$$

Apibrėžiame toro $\underline{\Omega}$ transformacijų šeimą $\{\varphi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$, čia

$$\varphi_\tau(\underline{\omega}) = a_\tau \underline{\omega}.$$

Jei operaciją apibrėšime formule

$$\varphi_{\tau_1}\varphi_{\tau_2} = \varphi_{\tau_1+\tau_2}, \quad \tau_1,\ \tau_2 \in \mathbb{R},$$

tai nesunku patikrinti, kad transformacijų šeima $\{\varphi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ yra grupė. Aišku, kad transformacijos φ yra tolydžios, todėl mačios. Be to, dėl Haro mato m_H invariantiškumo jos išlaiko matą (postūmis toro $\underline{\Omega}$ elementu a_τ). Taigi, tikimybinėje erdvėje $(\underline{\Omega}, \mathscr{B}(\underline{\Omega}), \underline{m_H})$ turime mačių, matą išlaikančių transformacijų grupę $\{\varphi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$.

Prisimename, kad aibė $A \in \mathscr{B}(\underline{\Omega})$ yra vadinama invariantiška grupės $\{\varphi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ atžvilgiu, jei su kiekvienu $\tau \in \mathbb{R}$ aibės A ir $A_\tau = \varphi_\tau(A)$ gali skirtis ne daugiau, negu aibe, kurios Haro matas $\underline{m}_H$ yra lygus 0. Yra žinoma, kad visos invariantinės aibės sudaro σ kūną. Grupė $\{\varphi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ yra vadinama ergodine, jei jos invariantinių aibių σ kūnas yra sudarytas tik iš aibių, kurių Haro matas $\underline{m}_H$ yra lygus 1 arba 0.

2.7 lema. *Tarkime, kad aibė $L(\mathscr{P}, \alpha)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš Q. Tuomet transformacijų grupė $\{\varphi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ yra ergodinė.*

Įrodymas. Jau įrodinėdami 2.2 lemą naudojomės tuo (Furjė transformacijos apibrėžimu), kad grupės $\underline{\Omega}$ elementai χ turi pavidalą

$$\chi(\underline{\omega}) = \prod_p \hat{\omega}^{k_p}(p) \prod_{m=0}^{\infty} \omega^{l_m}(m), \tag{2.11}$$

čia tik baigtinis skaičius sveikųjų skaičių k_p ir l_m yra nelygūs nuliui.

Tarkime, kad χ yra netrivialusis charakteris, t.y. $\chi \neq \chi_0 \quad (\chi_0(\underline{\omega}) \equiv 1)$. Aišku, kad $a_\tau \in \underline{\Omega}$. Todėl iš (2.11) randame, kad

$$\chi(a_\tau) = \prod_p p^{-i\tau k_p} \prod_{m=0}^{\infty} (m+\alpha)^{-i\tau l_m} = \exp\{-i\tau\Big(\sum_p k_p \log p + \sum_{m=0}^{\infty} l_m \log(m+\alpha)\Big). \quad (2.12)$$

Primename, kad čia tik baigtinis skaičius sveikų skaičių k_p ir l_m yra nenuliai. Kadangi aibė $L(\mathscr{P}, \alpha)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$, tai

$$\sum_p k_p \log p + \sum_{m=0}^{\infty} l_m \log(m+\alpha) = 0$$

tada ir tik tada, kai visi k_p ir l_m yra lygūs nuliui. Kadangi $\chi \neq \chi_0$, tai ne visi k_p ir l_m yra nuliai. Vadinasi,

$$\sum_p k_p \log p + \sum_{m=0}^{\infty} l_m \log(m+\alpha) \neq 0.$$

Todėl iš čia ir (2.12) lygybės išplaukia, kad egzistuoja toks $\tau_0 \neq 0$, su kuriuo

$$\chi(a_{\tau_0}) \neq 1. \quad (2.13)$$

Tegul dabar $A \in \mathscr{B}(\Omega)$ yra bet kuri aibė invariantiška grupė $\{\phi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ atžvilgiu. Turime parodyti, kad $\underline{m}_H(A) = 0$ arba $\underline{m}_H(A) = 1$. Imame aibės A indikatorių

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & jei \;\; \omega \in A, \\ 0, & jei \;\; \omega \notin A. \end{cases}$$

Iš aibės A invariantiškumo turime, kad

$$I_A(a_\tau \underline{\omega}) = I_A(\omega)$$

su kiekvienu fiksuotu $\tau \in \mathbb{R}$ ir beveik visais $\underline{\omega} \in \underline{\Omega}$ mato $\underline{m}_H$ atžvilgiu. Be to, Haro matas $\underline{m}_H$ yra invariantiškas postūmio taškais iš $\underline{\Omega}$ atžvilgiu. Todėl funkcijos I_A Furjė transformacija $\hat{I}_A$ yra

$$\begin{aligned}\hat{I}_A(\chi) &= \int_{\underline{\Omega}} \chi(\underline{\omega}) I_A(\underline{\omega}) m_H(d\underline{\omega}) \\ &= \int_{\underline{\Omega}} \chi(a_{\tau_0}\underline{\omega}) I_A(a_{\tau_0}\underline{\omega}) \underline{m}_H(d\underline{\omega}) \\ &= \chi(a_{\tau_0}) \int_{\underline{\Omega}} \chi(\underline{\omega}) I_A(\underline{\omega}) \underline{m}_H(d\underline{\omega}) = \chi(a_{\tau_0}) \hat{I}_A(\chi).\end{aligned}$$

Todėl

$$\hat{I}_A(\chi)(1 - \chi(a_{\tau_0})) = 0,$$

ir iš (2.13) gauname, kad

$$\hat{I}_A(\chi) = 0$$

su kiekvienu grupės $\underline{\Omega}$ netrivialiuoju charakteriu χ.

Dabar tegul χ_0 yra trivialusis grupės $\underline{\Omega}$ charakteris, t.y. $\chi_0(\underline{\omega}) = 1$ su visais $\underline{\omega} \in \underline{\Omega}$. Tegul $\hat{I}_A(\chi_0) = c$. Kadangi charakteriams galioja ortogonalumo savybė

$$\int_{\underline{\Omega}} \chi(\underline{\omega}) \underline{m}_H(d\underline{\omega}) = \begin{cases} 1, & jei \quad \chi = \chi_0, \\ 0, & jei \quad \chi \neq \chi_0, \end{cases}$$

tai iš lygybių $\hat{I}_A(\chi_0) = 0$ ir $\hat{I}_A(\chi) = c$ randame, kad su kiekvienu grupės $\underline{\Omega}$ charakteriu χ yra teisinga lygybė

$$\hat{I}_A(\chi) = c \int_{\underline{\Omega}} \chi(\underline{\omega}) \underline{m}_H(d\underline{\omega}) = c\hat{1}(\chi) = \hat{c}(\chi), \tag{2.14}$$

čia $\hat{1}(\chi)$ yra funkcijos $f(\underline{\omega}) = 1$ Furjė transformacija, o $\hat{c}(\chi)$ yra funkcijos $f(\underline{\omega}) = c$ Furjė transformacija.

Yra gerai žinoma, kad funkcija $I_A(\chi)$ yra vienareikšmiškai apibrėžiama jos Furjė transformacija. Todėl iš (2.14) turime, kad $I_A(\underline{\omega}) = c$ su beveik visais $\underline{\omega} \in \underline{\Omega}$. Kadangi $I_A(\underline{\omega})$ yra aibės A indikatorius, tai turi būti $c = 0$ arba $c = 1$. Taigi, su beveik visais $\underline{\omega} \in \underline{\Omega}$ yra teisingos lygybės $I_A(\underline{\omega}) = 0$ arba $I_A(\underline{\omega}) = 1$. Vadinasi, $\underline{m}_H(A) = 0$ arba $\underline{m}_H(A) = 1$. Kadangi

A buvo bet kuri invariantiška aibė, tai turime, jog transformacijų grupė $\{\varphi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ yra ergodinė.

2.1 teoremos įrodymui dar yra reikalinga Birkhofo-Chinčino teorema. Šios teoremos formulavimui yra reikalingi kai kurie apibrėžimai, kuriuos mes primename prieš teoremos formulavimą.

Tegul $X(\omega, t),\ t \in T$, yra atsitiktinis procesas, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\tilde{\Omega}, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, o $t_1, ..., t_n \in T$ yra bet kurios reikšmės. Tuomet atsitiktinių dydžių $X(\omega, t_1), ..., X(\omega, t_n)$ pasiskirstymų šeima

$$\mathbb{P}\Big(X(\omega, t_1), ..., X(\omega, t_n)\Big), \quad n \in \mathbb{N},$$

yra vadinama proceso baigtiniamačių pasiskirstymų šeima.

Tegul Y yra visų realiųjų baigtinių funkcijų $y(t),\ t \in T$, erdvė. Yra žinoma, kad atsitiktinio proceso baigtiniamačiai pasiskirstymai apibrėžia tikimybinį matą Q erdvėje $(Y, \mathscr{B}(Y))$. Tada tikimybinėje erdvėje $(Y, \mathscr{B}(Y), Q)$ galime apibrėžti postūmį g_k, kuris kiekvieną funkciją $y(t) \in Y$ atvaizduoja į $y(t + u)$. Žinoma, jog visi postūmiai $g_u,\ u \in \mathbb{R}$, sudaro grupę.

Atsitiktinis procesas $\chi(\omega, t)$ yra vadinamas griežtai stacionariuoju procesu, jei jo visi baigtiniamačiai pasiskirstymai yra invariantiški postūmio atžvilgiu.

Yra žinoma, kad jei atsitiktinis procesas $\chi(\omega, t)$ yra griežtai stacionarus, tada jo postūmis g_u išlaiko matą, t.y. kiekvienai aibei $A \in \mathscr{B}(Y)$ ir visiems $u \in \mathbb{R}$ galioja lygybė $Q(A) = Q(A_u)$ su $A_u = g_u(A)$.

Aibė $A \in \mathscr{B}(Y)$ yra vadinama proceso $X(\omega, t)$ invariantine aibe, jei su kiekvienu u aibės A ir A_u gali daugiausiai skirtis viena nuo kitos aibe, kurios Q matas yra lygus 0. Visos invariantiškos aibės sudaro σ kūną.

Griežtai stacionarus procesas $X(\omega, t)$ yra vadinamas ergodiniu, jei jo invariantinių aibių σ kūnas yra sudarytas iš aibių, kurių matas Q yra 0 arba 1.

Ergodiniams procesams yra teisinga klasikinė Birkhofo-Chinčino teorema.

2.8 lema. *Tarkime, kad procesas $X(\omega, t)$ yra ergodinis, $\mathbb{E}|X(\omega, t)| < \infty$ (EX) yra X vidurkis) ir jo trajektorijos beveik tikrai yra integruojamos Rymano prasme kiekviename baigtiniame intervale. Tuomet beveik tikrai*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(\omega, t)dt = \mathbb{E}X(\omega, 0).$$

Teoremos įrodymą ir kitus paminėtus tvirtinimus galima rasti [3] monografijoje.

2.1 teoremos įrodymas. Remiantis 2.6 lema, pakanka įrodyti, kad matas P toje lemoje sutampa su $P_{\underline{\zeta}}$. Tarkime, kad η yra atsitiktinis dydis, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\underline{\Omega}, \mathscr{B}(\underline{\Omega}), m_{\underline{H}})$ formule

$$\eta(\underline{\omega}) = \begin{cases} 1, \ kai \ \underline{\zeta}(s, \alpha, \lambda, \underline{\omega}) \in A, \\ 0, \ kai \ \underline{\zeta}(s, \alpha, \lambda, \underline{\omega}) \notin A, \end{cases}$$

čia A bet kuri fiksuota mato P tolydumo aibė. Iš 2.6 ir 1.1 lemų turime, kad

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0, T] : \underline{\zeta}(s + i\tau, \alpha, \lambda, \underline{\omega}) \in A\} = P(A). \tag{2.15}$$

Iš grupės $\{\varphi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ ergodiškumo (2.7 lema) išplaukia atsitiktinio proceso $\eta(\varphi_\tau(\underline{\omega}))$ ergodiškumas, todėl pritaikę Birkhofo-Chinčino teoremą (2.8 lema) gauname, kad

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \eta(\varphi_\tau(\underline{\omega}))d\tau = \mathbb{E}\eta, \tag{2.16}$$

čia, kaip įprasta, $\mathbb{E}\eta$ ra atsitiktinio dydžio η vidurkis. Iš atsitiktinio dydžio η apibrėžimo išplaukia, kad

$$\mathbb{E}\eta = \int_{\underline{\Omega}} \eta d\underline{m}_H = \underline{m}_H(\omega \in \underline{\Omega} : \underline{\zeta}(s, \alpha, \lambda, \underline{\omega}) \in A) = P_{\underline{\zeta}}(A). \tag{2.17}$$

Be to, iš atsitiktinio dydžio η ir transformacijos φ_τ apibrėžimo turime, kad

$$\frac{1}{T}\int_0^T \eta(\varphi_\tau(\underline{\omega}))d\tau = \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : \underline{\zeta}(s+i\tau,\alpha,\lambda,\underline{\omega}) \in A\}.$$

Todėl iš (2.16) ir (2.17) lygybių gauname, kad

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : \underline{\zeta}(s+i\tau,\alpha,\lambda,\underline{\omega}) \in A\} = P_{\underline{\zeta}}(A).$$

Ši lygybė kartu su (2.15) rodo, kad $P(A) = P_{\underline{\zeta}}(A)$. Kadangi A buvo bet kuri fiksuota mato P tolydumo aibė, tai lygybė $P(A) = P_{\underline{\zeta}}(A)$ galioja visoms mato P tolydumo aibėms A. Yra žinoma [2], kad mato tolydumo aibė s sudaro apibrėžiančią klasę. Todėl $P(A) = P_{\underline{\zeta}}(A)$ su kiekviena aibe $A \in \mathscr{B}(H^2(D))$, tai yra $P = P_{\underline{\zeta}}$. Teorema įrodyta.

3 Mato $P_{\underline{\zeta}}$ atrama

Universalumo teoremos įrodymui dar yra reikalingas mato $P_{\underline{\zeta}}$ atramos išreikštinis pavidalas. Primename, kad mato $P_{\underline{\zeta}}$ atrama yra tokia minimali aibė $S_{P_{\underline{\zeta}}} \subset H^2(D)$, kad $P_{\underline{\zeta}}(S_{P_{\underline{\zeta}}}) = 1$. Aibė $S_{P_{\underline{\zeta}}}$ yra sudaryta iš visų tokių elementų $x \in H^2(D)$, kurių kiekvienai atvirai aplinkai G galioja nelygybė $P_{\underline{\zeta}}(G) > 0$.

Apibrėžiame aibę

$$S = \{g \in H(D) : g(s) \neq 0 \ \ arba \ \ g(s) \equiv 0\}.$$

Šiame skyrelyje įrodysime tokį tvirtinimą.

3.1 teorema. *Tarkime, kad $L(\mathscr{P}, \alpha)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$. Tuomet mato $P_{\underline{\zeta}}$ atrama yra aibė $\hat{S} = S \times H(D)$.*

Įrodymas. Yra žinoma [5], kad analizinių funkcijų erdvė $H(D)$ yra separabili. Todėl turime [2]

$$\mathscr{B}(H^2(D)) = \mathscr{B}(H(D) \times H(D)) = \mathscr{B}(H(D)) \times \mathscr{B}(H(D)).$$

Todėl pakanka matą $P_{\underline{\zeta}}$ nagrinėti aibėse, turinčiose pavidalą $B = A \times A_1, \quad A_1, \ A_2 \in \mathscr{B}(H(D))$. Kadangi Haro matas $\underline{m}_H$ yra Haro matų $\hat{m}_H$ ir m_H sandauga, tai iš mato P apibrėžimo turime, kad

$$P_{\underline{\zeta}}(B) = \underline{m}_H(A \times A_1) = \hat{m}_H(A) m_H(A_1). \tag{3.1}$$

Yra žinoma [5], kad atsitiktinio elemento $\zeta(s, \hat{\omega})$ atrama (šio elemento pasiskirstymo atrama) yra aibė S. Be to, pakartoję 11 teoremos iš [6] įrodymą su $r = 1$ gauname, kad atsitiktinio elemento $L(\lambda, \alpha, s, \omega)$ atrama yra visa erdvė $H(D)$. Atsitiktinių elementų $\zeta(s, \hat{\omega})$ ir $L(\lambda, \alpha, s, \omega)$ pasiskirstymai yra atitinkamai tikimybiniai matai

$$P_\zeta(A) = \hat{m}_H(\hat{\omega} \in \hat{\Omega} : \zeta(s, \hat{\omega}) \in A), \quad A \in \mathscr{B}(H(D)),$$

ir

$$P_L(A_1) = m_H(\omega \in \Omega : L(\lambda, \alpha, s, \omega) \in A_1), \quad A_1 \in \mathscr{B}(H(D)).$$

Todėl iš (3.1) lygybės turime, kad

$$P_{\underline{\zeta}}(B) = P_\zeta(A) P_L(A_1).$$

Kadangi $P_\zeta(S) = 1$ ir $P_L(H(D)) = 1$, tai aišku, kad iš čia $P_{\underline{\zeta}}(\hat{S}) = 1$. Be to, jei $A \in \mathscr{B}(H(D))$ ir $A \neq S$, arba $A_1 \in \mathscr{B}(H(D))$ ir $A_1 \neq H(D)$, tai tada iš aibių S ir $H(D)$ minimalumo atitinkamai matams P_ζ ir P_L turėtume, kad $P_\zeta(A) < 1$ arba $P_L(A_1) < 1$. Tuomet gautume, kad ir $P_{\underline{\zeta}}(B) < 1$. Taigi, $\hat{S}$ yra minimali aibė, su kuria $P_{\underline{\zeta}}(\hat{S}) = 1$. Teorema įrodyta.

4 Universalumo teoremos įrodymas

Šiame skyrelyje įrodysime pagrindinį magistro darbo rezultatą apie funkcijų $\zeta(s)$ ir $L(\lambda, \alpha, s)$ jungtinį universalumą. Formuluojame jau įvade paminėtą teoremą.

4.1 teorema. *Tarkime, kad aibė $L(\mathscr{P}, \alpha)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$. Tegul $K_1, K_2 \in \mathscr{K}$, o $f_1(s) \in H_0(K_1)$ ir $f_2(s) \in H(K_2)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$ yra teisinga nelgybė*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0, T] : \sup_{s\in K_1} |\zeta(s + i\tau) - f_1(s)\big| < \varepsilon,$$
$$\sup_{s\in K_2} |L(\lambda, \alpha, s + i\tau) - f_2(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

Teoremos įrodymas remiasi 2.1, 3.1 teoremomis ir Mergeliano teorema apie analizinių funkcijų aproksimavimą polinomais. Patogumo dėlei, ją formuluojame atskira lema.

4.2 lema. *Tarkime, kad $K \subset \mathbb{C}$ yra kompaktine aibė, turinti jungųjį papildinį, o funkcija $f(s)$ yra tolydi aibėje K ir analizinė aibės K viduje. Tuomet kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks polinomas p(s), kad*

$$\sup_{s\in K} |f(s) - p(s)| < \varepsilon.$$

Lemos įrodymą galima rasti [12] monografijoje.

4.1 teoremos įrodymas. Įrodymo kelias yra standartinis. Kadangi $f_1(s) \neq 0$ aibėje K_1, tai nesunku matyti, kad egzistuoja toks polinomas $p_1(s)$, kad

$$\sup_{s\in K_1} |f_1(s) - e^{p_1(s)}| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.1}$$

Analogiškai, egzistuoja toks polinomas $p_2(s)$, kad

$$\sup_{s\in K_2}|f_2(s)-p_2(s)|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.2}$$

Apibrėžiame aibę

$$G=\{(g_1,g_2)\in H^2(D):\sup_{s\in K_1}|g_1(s)-e^{p_1(s)}|<\frac{\varepsilon}{2},$$
$$\sup_{s\in K_2}|g_2(s)-p_2(s)|<\frac{\varepsilon}{2}\}.$$

Tuomet G yra atviroji aibė. Be to, pagal 3.1 teoremą $(e^{p_1(s)},p_2(s))$ yra mato $P_{\underline{\zeta}}$ atramos elementas. Taigi, G yra atramos elemento atviroji aplinka. Todėl iš atramos savybių turime, kad $P_{\underline{\zeta}}(G)>0$. Iš čia ir 2.1 teoremos gauname, kad

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}meas\{\tau\in[0,T]:\underline{\zeta}(s+i\tau,\alpha,\lambda)\in G\}\geqslant P_{\underline{\zeta}}(G)>0.$$

Prisiminę aibės G apibrėžimą, iš čia turime nelygybę

$$\begin{aligned}\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}meas\{\tau\in[0,T]:\sup_{s\in K_1}|\zeta(s+i\tau)-e^{p_1(s)}|<\frac{\varepsilon}{2},\\ \sup_{s\in K_2}|L(\lambda,\alpha,s+i\tau)-p_2(s)|<\frac{\varepsilon}{2}\}>0.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Lieka $e^{p_1(s)}$ pakeisti funkcija $f_1(s)$, o polinomą $p_2(s)$ - funkcija $f_2(s)$. Tegul τ tenkina nelygybes

$$\sup_{s\in K_1}|\zeta(s+i\tau)-e^{p_1(s)}|<\frac{\varepsilon}{2}\quad ir\quad \sup_{s\in K_2}|L(\lambda,\alpha,s+i\tau)-p_2(s)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Tuomet iš (4.1) ir (4.2) gauname, kad tokiems τ

$$\sup_{s\in K_1}|\zeta(s+i\tau)-f_1(s)|\leqslant\sup_{s\in K_1}|\zeta(s+i\tau)-f_1(s)|+$$
$$\sup_{s\in K_1}|f_1(s)-e^{p_1(s)}|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

ir

$$\sup_{s\in K_2}|L(\lambda,\alpha,s+i\tau)-f_2(s)|\leqslant\sup_{s\in K_2}|L(\lambda,\alpha,s+i\tau)-p_2(s)|+$$
$$\sup_{s\in K_2}|f_2(s)-p_2(s)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Taigi, turime, kad

$$\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K_1} |\zeta(s+i\tau) - e^{p_1(s)}| < \frac{\varepsilon}{2}, \sup_{s\in K_2} |L(\lambda,\alpha,s+i\tau) - p_2(s)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\subset \{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K_1} |\zeta(s+i\tau) - f_1(s)| < \varepsilon,$$

$$\sup_{s\in K_2} |L(\lambda,\alpha,s+i\tau) - f_2(s)| < \varepsilon\}.$$

Todėl iš Lebego mato monotoniškumo ir (4.3) išplaukia nelygybė

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K_1} |\zeta(s+i\tau) - f_1(s)| < \varepsilon,$$

$$\sup_{s\in K_2} |L(\lambda,\alpha,s+i\tau) - f_2(s)| < \varepsilon\}$$

$$\geqslant \liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K_1} |\zeta(s+i\tau) - e^{p_1(s)}| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sup_{s\in K_2} |L(\lambda,\alpha,s+i\tau) - p_2(s)| < \frac{\varepsilon}{2}\} > 0.$$

Teorema įrodyta.

A joint universality theorem for the Riemann zeta-function and Lerch zeta-function

Violeta Franckevič

(Summary)

Let $s = \sigma + it$ be a complex variable. The Riemann zeta-function $\zeta(s)$ and Lerch zeta-function $L(\lambda, \alpha, s)$ with parameters $\lambda \in \mathbb{R}$ and $0 < \alpha \leqslant 1$ are defined, for $\sigma > 1$, by the series

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} \quad \textit{and} \quad L(\lambda, \alpha, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda m}}{(m+\alpha)^s},$$

and by analytic continuation elsewhere.

In the master work, we consider the simultaneous approximation of a pair of analytic functions by a pair of shifts $(\zeta(s+i\tau), L(\lambda, \alpha, s+i\tau)), \tau \in \mathbb{R}$. Let $D = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$. Denote by $\mathscr{K}$ the class of compact subset of the strip D with connected complements. Moreover, let $H(K), K \in \mathscr{K}$, be the class of continuous functions on K which are analytic in the interior of K, and $H_0(K), K \in \mathscr{K}$, be the subclass of $H(K)$ of non-vanishing on K functions. Denote by $measA$ the Lebesgue measure of a measurable set $A \subset \mathbb{R}$. Then the main result of the master work is the following theorem.

Theorem. *Suppose that the set*

$$\{(\log p : p \in \mathscr{P}), (\log(m+\alpha) : m \in \mathbb{N}_0)\}$$

is linearly independent over the field of rational numbers. Let $K_1, K_2 \in \mathscr{K}$, *and* $f_1(s) \in H_0(K_1), f_2(s) \in H(K_2)$. *Then, for every* $\varepsilon > 0$,

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\} \tau \in [0,T] : \sup_{s\in K_1} |\zeta(s+i\tau) - f_1(s)| < \varepsilon,$$

$$\sup_{s\in K_2} |L(\lambda, \alpha, s+i\tau) - f_2(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

Literatūra

[1] B. Bagchi, The statistical behaviour and universality properties of the Riemann zeta-function and other allied Dirichlet series, Ph. D. Thesis, Indian Statistical Institute, Calcutta, 1981.

[2] P. Billingsley Convergence of Probability Measures, Wiley, New York, 1968.

[3] H. Cramér, M. R. Leadbetter, Stationary and Related Stochastic Processes, Wiley, New York, 1967.

[4] H. Heyer, Probability Measures on Locally Compact Groups, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1977.

[5] A. Laurinčikas, Limit Theorems for the Riemann Zeta-function, Kluwer, Dordrecht, Boston, London, 1996.

[6] A. Laurinčikas, The joint universality of Hurwitz zeta-functions, Šiauliai Math. Seminar. nr.3(11)(2008), 169-187.

[7] A. Laurinčikas, R. Garunkštis, The Lerch zeta-function, Kluwer, Dordrecht, Boston, London, 2002.

[8] A. Laurinčikas , R. Macaitienė, Joint universality of the Riemann zeta-function and Lerch zeta-functions. Nonlinear Anal. Modell. Control. 18(2013), 314-326.

[9] V. Paulauskas, A. Račkauskas, Funkcinė analizė. I knyga. Erdvės, UAB "Vaistų žinios", Vilnius, 2007.

[10] J. Steuding, Value-Distribution of L-Functions, Lecture Notes Math. 1877, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2007.

[11] S. M. Voronin, Theorem on the "universality" of the Riemann zeta function, Izv. AN SSSR, Ser. Matem., 39(1975), 475-486 (rusų kalba).

[12] J. L. Walsh, Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. vol. 20, 1960.