

VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
TIKIMYBIŲ TEORIJOS IR SKAIČIŲ TEORIJOS KATEDRA

LILIJA POŽARICKA
MATEMATIKO IR MATEMATIKOS TAIKYMŲ STUDIJŲ PROGRAMA

HURVICO DZETA FUNKCIJOS INTEGRALINĖS IŠRAIŠKOS

Bakalauro baigiamasis darbas

Leidžiu gintis _____
Darbo vadovas Prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas

Vilnius, 2017

Turiny

IVADAS.....	3
2.OILERIO GAMA FUNKCIJA.....	4
3. FUNKCIJOS $\zeta(s,\alpha)$ IŠRAIŠKA NETIESIOGINIU INTEGRALU.....	5
4.FUNKCIJOS $\zeta(s,\alpha)$ IŠRAIŠKA KONTŪRINIŲ INTEGRALU.....	9
SUMMARY.....	11
LITERATŪRA.....	12

Įvadas

Analizinėje skaičių teorijoje kompleksinis kintamasis paprastai yra žymimas $s = \sigma + it$, čia σ ir t yra realieji skaičiai, o i yra memamasis vienetas $\sqrt{-1}$.

Analizinėje skaičių teorijoje bene svarbiausią vaidmenį atlieka Rymano dzeta fukcija.

$\zeta(s)$, kuri srityje $\sigma > 1$ yra apibrežiama eilute

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}.$$

Ši eilutė tolygiai konverguoja uždaroje srityje $\sigma \geq 1 + \varepsilon$ su kiekvienu $\varepsilon > 0$, todėl iš Vejerštraso teoremos išplaukia, kad funkcija $\zeta(s)$ yra analizinė pusploštumoje $\sigma > 1$. Be to, yra gerai žinoma, kad fukcija $\zeta(s)$ yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę ploštumą, išskyrus tašką $s=1$, kuriame ši funkcija turi paprastąjį polių su reziduumu 1.

Funkcijos $\zeta(s)$ natūralus apibendrinimas yra Hurvico dzeta fukcija. Tegul α , $0 < \alpha \leq 1$, yra fiksuotas paramertras. Hurvico dzeta fukcija $\zeta(s, \alpha)$ srityje $\sigma > 1$ yra apibrežiama eilute

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m + \alpha)^s}.$$

Panašiai, kaip ir funkcijos $\zeta(s)$ atvėju, ši eilutė taip pat konverguoja tolygiai uždaroje srityje $\sigma \geq 1 + \varepsilon$ su kiekvienu $\varepsilon > 0$, todėl funkcija $\zeta(s, \alpha)$ yra analizinė pusploštumoje $\sigma > 1$. Šią fukciją, kaip ir funkciją $\zeta(s)$, galima analiziškai pratęsti į visą kompleksinę ploštumą, išskyrus paprastąjį polių taške $s=1$ su reziduumu 1 [1].

Iš funkcijų $\zeta(s)$ ir $\zeta(s, \alpha)$ apibrėžimų matome, kad yra teisinga lygybė

$$\zeta(s, 1) = \zeta(s).$$

Todėl iš tikrųjų funkcija $\zeta(s, \alpha)$ yra fukcijos $\zeta(s)$ apibendrinimas.

Matome, kad Hurvico dzeta funkcija yra apibrėžiama eilute. Bakalauro darbo tikslas yra pateikti fukcijos $\zeta(s, \alpha)$ integralines išraiškas. Pavyzdžiui, įrodysime, kad pusplokštumoje $\sigma \geq 1 + \varepsilon$, yra teisinga formulė

$$\zeta(s, \alpha) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} e^{-\alpha x}}{1 - e^{-x}} dx,$$

čia $\Gamma(s)$ yra Oilerio gama funkcija. Remsimės [3] monografijoje formuluojamais uždaviniais.

2. Oilerio gama funkcija

Kadangi funkcija $\Gamma(s)$ įeina į Hurvico dzeta funkcijos integralinę išraišką, tai šiame skyrelyje pateiksime jos apibrėžimą ir kai kurias savybes.

Funkcija $\Gamma(s)$ pusplotumėje $\sigma > 0$ yra apibrėžiama integralu

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx.$$

Šis integralas yra netiesioginis, jo ypatingieji taškai yra 0 ir ∞ . Kadangi funkcija e^{-x} labai greitai nyksta į 0, kai $x \rightarrow \infty$, tai integralas

$$\int_1^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$$

konverguoja tolygiai kiekvienoje baigtinėje kompleksinės plotumos dalyje, todėl apibrėžia funkciją, kuri yra analizinė visoje kompleksinėje plotumoje. Tačiau integralas

$$\int_0^1 e^{-x} x^{s-1} dx$$

konverguoja tolygiai tikrai pusplotumėje $\sigma \geq \varepsilon$ su kiekvienu $\varepsilon > 0$, todėl apibrėžia funkciją, analizinę tikrai pusplotumėje $\sigma > 0$.

Sujungę išnagrinėtų 2 integralų savybes, gauname, kad funkcija $\Gamma(s)$ yra analizinė pusplotumėje $\sigma > 0$.

Taigi turime, kad funkcija $\Gamma(s)$ yra apibrėžiama integralu tikrai pusplotumėje $\sigma > 0$. Panaudojus konturinę integravimą, yra įrodoma [1], kad funkcija $\Gamma(s)$ yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plotumą, išskyrus paprastuosius polius taškuose $s = -m$, $m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Be to,

$$\text{Res}_{s=-m} \Gamma(s) = \frac{(-1)^m}{m!}.$$

Mums bus reikalinga papildymo formulė funkcijai $\Gamma(s)$

2.1 lema. Tarkime, kad s nėra sveikasis skaičius. Tuomet

$$\Gamma(s) \cdot \Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}.$$

Lemos įrodymas yra duotas [2] knygoje.

3. Funkcijos $\zeta(s, \alpha)$ išraiška netiesioginiu integralu

Šiame skirelyje įrodysime tokį tvirtinimą:

3.1 teorema. Tarkime, kad $\sigma \geq 1 + \delta$, $\delta > 0$. Tuomet

$$\zeta(s, \alpha) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} e^{-\alpha x}}{1 - e^{-x}} dx.$$

Įrodymas. Integrale

$$I = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-(m+\alpha)x} dx$$

darome pakeitimą $(m + \alpha)x = y$. Iš čia turime, kad $x = \frac{y}{m+\alpha}$. Todėl $dx = \frac{dy}{m+\alpha}$. Aišku, kad y rėžiai yra tokie pat kaip ir x , tai yra, y kinta nuo 0 iki $+\infty$. Įrašę šiuos pakeitimus į integralą I , randame, kad

$$I = \frac{1}{(m + \alpha)^s} \int_0^{\infty} y^{s-1} e^{-y} dy.$$

Prisiminę funkciją $\Gamma(s)$ apibrėžimo srityje $\sigma > 0$, matome, kad

$$I = \frac{\Gamma(s)}{(m + \alpha)^s}.$$

Gautą lygybę

$$\frac{\Gamma(s)}{(m + \alpha)^s} = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-(m+\alpha)x} dx$$

sumuojame pagal m nuo 0 iki n . Gauname, kad

$$\Gamma(s) = \sum_{m=0}^n \frac{1}{(m + \alpha)^s} = \sum_{m=0}^n \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-(m+\alpha)x} dx.$$

Kadangi pusplotštumėje $\sigma > 1$

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m + \alpha)^s} ,$$

tai perėję prie ribos, kai $n \rightarrow \infty$, randame, kad

$$\Gamma(s)\zeta(s, \alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^n \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-(m+\alpha)x} dx \quad (3.1)$$

Kadangi prieš integralą yra baigtinė suma, tai ją galima įkelti po integralo ženklu. Taigi, turime, kad

$$\sum_{m=0}^n \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-(m+\alpha)x} dx = \int_0^{\infty} x^{s-1} \left(\sum_{m=0}^n e^{-(m+\alpha)x} \right) dx. \quad (3.2)$$

Pritaikę geometrinės progresijos narių sumos formulę

$$s_n = b_1 + b_1 q + \dots + b_1 q^n = \frac{b_1(1-q^{n+1})}{1-q} ,$$

čia b_1 yra pirmasis geometrinės progresijos narys, o q yra jos vardiklis, randame, kad

$$\sum_{m=0}^n e^{-(m+\alpha)x} = \frac{e^{-\alpha x} - e^{-(n+1+\alpha)x}}{1 - e^{-x}} ,$$

nes mūsų atveju $b_1 = e^{-\alpha x}$, o $q = e^{-x}$. Iš čia, bei (3.1) ir (3.2) lygybių gauname, kad

$$\begin{aligned} \Gamma(s)\zeta(s, \alpha) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\infty} x^{s-1} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-(n+1+\alpha)x}}{1 - e^{-x}} dx \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} e^{-\alpha x}}{1 - e^{-x}} dx - \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} e^{-(n+1+\alpha)x}}{1 - e^{-x}} dx \right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Gerai žinome, kad eksponentinei funkcijai teisingas skaidinys

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Todėl, kai $x > 0$, yra teisinga nelygybė

$$e^x \geq 1 + x.$$

(3.4)

Remdamiesi šia nelygybe, įvertinsime antrąjį integralą (3.3) formuleje. Turime, kad

$$\left| \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} e^{-(n+1+\alpha)x}}{1 - e^{-x}} dx \right| \leq \int_0^{\infty} \left| \frac{x^{s-1} e^{-(n+1+\alpha)x}}{1 - e^{-x}} \right| dx = \int_0^{\infty} \frac{x^{\sigma-1} e^{-(n+1+\alpha)x}}{1 - e^{-x}} dx,$$

(3.5)

nes

$$|x^{s-1}| = x^{\operatorname{Re}(s-1)} = x^{\sigma-1}.$$

Iš (3.4) nelygybės išplaukia, kad $e^{-x} \leq \frac{1}{x+1}$, todėl

$$1 - e^{-x} \geq 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}.$$

Vadinasi,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x^{\sigma-1} e^{-(1+\alpha+n)x}}{1 - e^{-x}} dx &\leq \int_0^{\infty} x^{\sigma-2} (x+1) e^{-(1+\alpha+n)x} dx \leq \int_0^{\infty} x^{\sigma-2} e^x e^{-(1+\alpha+n)x} dx = \\ &= \int_0^{\infty} x^{\sigma-2} e^{-(\alpha+n)x} dx. \end{aligned}$$

(3.6)

Vėl atliekame pakeitimą $(n + \alpha)x = y$ ir gauname, kad

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-2} e^{-(\alpha+n)x} dx = \frac{1}{(n + \alpha)^{\sigma-1}} \int_0^{\infty} y^{\sigma-2} e^{-y} dy = \Gamma(\sigma - 1) \frac{1}{(n + \alpha)^{\sigma-1}}$$

(3.7)

Kadangi $\sigma \geq 1 + \delta$, tai

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma(\sigma - 1) \frac{1}{(n + \alpha)^{\sigma-1}} = 0.$$

Iš čia ir (3.5), (3.6), (3.7) randame, kad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} e^{-(n+1+\alpha)x}}{1 - e^{-x}} dx = 0$$

(3.8)

(3.3) lygybėje pirmas integralas nepriklauso nuo n , todėl iš (3.8) galutinai gauname, kad

$$\Gamma(s)\zeta(s, \alpha) = \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} e^{-\alpha x}}{1 - e^{-x}} dx.$$

Vadinasi, srityje $\sigma \geq 1 + \delta$, $\delta > 0$, yra teisinga formulė

$$\zeta(s, \alpha) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} e^{-\alpha x}}{1 - e^{-x}} dx.$$

Teorema įrodyta.

4. Funkcijos $\zeta(s, \alpha)$ išraiška kontūriniu integralu

Šiame skyrelyje pateiksime Hurvico dzeta funkcijos išraišką, naudojančią Henkelio tipo kontūrą.

Tarkime, kad C yra kontūras, kuris prasideda realiosios ašies taške α , apeina vieną kartą koordinatinių pradžių teigiama kryptimi (prieš laikrodžio rodyklę) ir vėl grįžta į tašką α . Toks kontūras vadinasi Hankelio tipo kontūru. Dažniausiai yra naudojamas kontūras, kai $a \rightarrow \infty$. Šį kontūrą žymėsime raide L .

4.1 teorema. Su visais $s \in \mathbb{C}$ yra teisinga formulė

$$\zeta(s, \alpha) = -\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_L \frac{(-z)^{s-1} e^{-\alpha z}}{1 - e^{-z}} dz.$$

Laikome, kad kontūrai L nepriklauso taškai $\pm 2\pi i m$, $m \in \mathbb{N}$.

Irodymas. Funkcija $(-z)^{s-1}$ yra daugiareikšmė,

$$(-z)^{s-1} = e^{(s-1) \log(-z)}.$$

Šią funkciją galime padaryti vienareikšmę, jeigu laikysime, kad $\log(-z)$ yra realus, kai z įgyja neigiamas reikšmes t.y., kai $-\pi \leq \arg(-z) \leq \pi$, arba $|\arg(-z)| \leq \pi$.

Nagrinėjame integralą

$$\int_L \frac{(-z)^{s-1} e^{-\alpha z}}{1 - e^{-z}} dz.$$

Laikoma, kad $|\arg(-z)| \leq \pi$ ir kad $\sigma \geq 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Tuomet šį integralą užrašysime kitokiu pavidalu deformuodami integravimo kontūrą. Bendru atveju interguojama funkcija nėra analizinė kontūro L viduje. Todėl laikysime, kad kontūras L apeina koordinatinių pradžių apskritimu su spinduliu δ . Ant šio apskritimo turime, kad $z = \delta e^{i\theta}$, be to, kontūro pradžioje turime, kad $\arg(-z) = -\pi$, todėl $(-z)^{s-1} = e^{-\pi i(s-1)} z^{s-1}$, o kontūro gale $\arg(-z) = \pi$, todėl $(-z)^{s-1} = e^{i\pi(s-1)} z^{s-1}$. Tuomet galime parašyti, kad

$$\begin{aligned} & \int_L \frac{(-z)^{s-1} e^{-\alpha z}}{1 - e^{-z}} dz = \\ &= \int_{-\infty}^{\delta} \frac{(-z)^{s-1} e^{-\alpha z}}{1 - e^{-z}} dz + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(\delta e^{i\theta})^{s-1} e^{\alpha(\delta e^{i\theta})}}{1 - e^{\delta e^{i\theta}}} e^{i\theta} i\delta d\theta + \int_{\delta}^{\infty} \frac{e^{\pi i(s-1)} z^{s-1} e^{\alpha z}}{1 - e^{-z}} dz. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Kadangi

$$\begin{aligned} e^{-\pi i(s-1)} - e^{\pi i(s-1)} &= \cos \pi(s-1) - i \sin \pi(s-1) - \cos \pi(s-1) - i \sin \pi(s-1) = \\ &= -2i \sin \pi(s-1) = -2i \sin(\pi s - \pi) = 2i \sin(\pi - \pi s) = 2i \sin \pi s \end{aligned}$$

todėl iš (4.1) randame, kad

$$\int_L \frac{(-z)^{s-1} e^{-\alpha z}}{1 - e^{-z}} dz = -2i \sin \pi s \int_{\delta}^{\infty} \frac{z^{s-1} e^{-\alpha z}}{1 - e^{-z}} dz + i \delta^s \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta(s-1)} e^{\alpha \delta e^{i\theta}}}{1 - e^{\delta e^{i\theta}}} e^{i\theta} d\theta$$

Pastaroji lygybė yra teisinga su visais $\delta > 0$, todėl galime imti $\delta \rightarrow +0$. Tai duoda sąryšį

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta(s-1)} e^{\alpha \delta e^{i\theta}}}{1 - e^{\delta e^{i\theta}}} e^{i\theta} d\theta \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta s}}{1} d\theta,$$

ir $\delta^s \rightarrow 0$, nes $\sigma > 1$. Vadinasi, galutinai gauname, kad

$$\int_L \frac{(-z)^{s-1} e^{-\alpha z}}{1 - e^{-z}} dz = -2i \sin \pi s \int_0^{\infty} \frac{z^{s-1} e^{-z}}{1 - e^{-z}} dz.$$

Iš čia ir 3.1 teoremos randame, kad

$$\zeta(s, \alpha) = \frac{1}{-2\pi i \Gamma(s)} \int_L \frac{(-z)^{s-1} e^{-\alpha z}}{1 - e^{-z}} dz.$$

Teorema įrodyta.

Integral representations of the Hurwitz zeta-function

(Summary)

Let $s = \sigma + it$ be a complex variable, and α , $0 < \alpha < 1$, be a fixed parameter. The Hurwitz zeta-function $\zeta(s, \alpha)$ is defined, for $\sigma > 1$, by the Dirichlet series

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m + \alpha^s}.$$

Moreover, $\zeta(s, \alpha)$ is analytically continued to the whole complex plane, except for a simple pole at the point $s = 1$ with residue 1.

In the bachelor work, we consider two integral representations for the function $\zeta(s, \alpha)$. The first of them involves the improper integral. Suppose that $\delta > 0$ and $\Gamma(s)$ denotes the Euler gamma-function. Then we obtain that, for $\sigma \geq 1 + \delta$, the formula

$$\zeta(s, \alpha) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} e^{-\alpha x}}{1 - e^{-x}} dx$$

is valid.

The second representation of the function $\zeta(s, \alpha)$ uses a contour integral. Suppose that the contour L starts at $+\infty$, rounds one time the point $z = 0$ in positive direction, and returns to $+\infty$. Then we prove that, for all $s \in \mathbb{C}$,

$$\zeta(s, \alpha) = -\frac{\delta(1-s)}{2} \int_L \frac{(-z)^{s-1} e^{-\alpha z}}{1 - e^{-z}} dz.$$

We require that the points $z = \pm 2\pi im$, $m \in \mathbb{N}$ do not belong to the contour L .

Literatūra

- [1] A. Laurinčikas, *Rymano dzeta funkcijos teorijos pagrindai*, Vilniaus universiteto leidykla, 1990
- [2] A. Laurinčikas, R. Garunkštis, *Lercho dzeta funkcija (angl. The Lerch zeta-function)*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht , 2002.
- [3] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, London 1927.