VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
TIKIMYBIŲ TEORIJOS IR SKAIČIŲ TEORIJOS KATEDRA

Karolis Rapnikas

Konstantos π išraiškos

Expressions of constant π

Bakalauro baigiamasis darbas

Leidžiu ginti .....

Darbo vadovas prof. Artūras Dubickas

Vilnius 2017

Turinys

Įvadas 2

1 Teoremos **4**

2 Kai kurios konstantos π išraiškos per baigtinį veiksmų skaičių **6**

2.1 Konstantos π išraiškų pavyzdžiai per apskritimo ilgį ir $n-$mačio rutulio tūrį 6

2.2 Konstantos π išraiška per kompleksinio kintamojo z logaritmo funkciją $\log z$ 7

2.3 Machin'o tipo formulė konstantai π išreikšti 7

3 Kai kurios konstantos π išraiškos begalinėmis koverguojančiomis skaičių eilutėmis **9**

3.1 Konstantos π išraiškos funkcijų skleidiniais Maclaurin'o eilute 9

3.2 Konstantos π išraiškų pavyzdžiai funkcijų skleidiniais trigonometrinėmis Fourier eilutėmis 10

4 Kai kurios konstantos π išraiškos integralo, ribos, begalinės sandaugos pavidalu **13**

Summary 17

Literatūra 18

Įvadas

Konstanta $\pi = 3,14159265358979323846264...$ yra viena iš pačių svarbiausių konstantų matematikoje. Įrodyta, kad šis skaičius yra transcendentusis. Jis gali būti apibrėžiamas kaip bet kokio apskritimo ilgio ir jo skersmens santykis. Skaičius π dažnai atsiranda geometrijoje, harmoninėje analizėje, skaičių teorijoje ir kitose matematikos srityse.

Nuo senų laikų žmonės bandė surasti kuo tikslesnę šio skaičiaus išraišką, pradedant nuo to, kad $\pi \approx 3$ ir tęsiant dabar, kai, atrasdami efektyvius algoritmus, superkompiuterių pagalba žinome daugiau nei 10^{13} šio skaičiaus skaitmenų po kablelio.

Šio darbo tikslas yra parodyti, kaip galima šią konstantą išreikšti begalinėmis konverguojančiomis eilutėmis, begalinėmis konverguojančiomis skaičių sandaugomis, apibrėžtiniais tiesioginiais ir netiesioginiais integralais, kaip funkcijos ribą.

1 skyrius

Teoremos

1 teorema. *Tarkime, jog seka* $\{b_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ *yra monotoninė ir nykstama. Tuomet eilutė*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k$$

konverguoja.

2 teorema. *Sakykime, kad funkcija*

$$f \in \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x + 2\pi) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}, f \in L^1 [-\pi, \pi] \right\}$$

ir, sakykime, kad funkcija $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap \{x_0\} \to \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ *yra tokia, kad* $\exists$ *baigtinės vienpusės ribos taškuose* $x_0 \pm 0$ *ir* $\exists \delta_1 : 0 < \delta_1 < \delta$*, kad galioja nelygybės:*

$$\int_0^{\delta_1} \frac{|f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)|}{t} \mathrm{d}t < +\infty,$$

$$\int_0^{\delta_1} \frac{|f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)|}{t} \mathrm{d}t < +\infty.$$

Tuomet taške x_0 *funkcijos trigonometrinė eilutė*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

kur

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \mathrm{d}x, k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \mathrm{d}x, k \in \mathbb{N},$$

konverguoja tame taške į skaičių

$$\frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}.$$

3 teorema. *Tarkime, jog sekos* $\{a_k,\ k \in \mathbb{N}\}$, $\{b_k,\ k \in \mathbb{N}\}$, $\{c_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ *tenkina sąlygas:*

$$\lim_{k\to\infty} a_k = x,\ \lim_{k\to\infty} c_k = x,\ a_k \leqslant b_k \leqslant c_k,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Tuomet

$$\lim_{k\to\infty} b_k = x.$$

2 skyrius

Kai kurios konstantos π išraiškos per baigtinį veiksmų skaičių

2.1 Konstantos π išraiškų pavyzdžiai per apskritimo ilgį ir $n-$mačio rutulio tūrį

Iš geometrijos žinome, kad apskritimo, kurio spindulio ilgis yra lygus r, perimetras C yra išreiškiamas formule

$$C = 2\pi r.$$

Iš čia nesunkiai galime pasakyti, kad konstanta π yra lygi apskritimo ilgio C ir jo skersmens $d = 2r$ santykiui t.y.

$$\pi = \frac{C}{d}.$$

Apibendrinkime šį atvejį. Yra žinoma [2], kad $N-$mačio rutulio

$$B_n = \Big\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 < r^2\},$$

kurio spindulio ilgis yra lygus r, tūrio V_n formulė turi išraišką

$$V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(n + \frac{1}{2})} r^n.$$

Iš čia gauname, kad

$$\pi = \frac{1}{r^2} \left(V_n^2 \Gamma^2 \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \right)^{1/n}.$$

2.2 Konstantos π išraiška per kompleksinio kintamojo z logaritmo funkciją $\log z$

Nagrinėkime kompleksinį skaičių $z = a + ib$, čia a yra skaičiaus z realioji dalis $\Re z$, o b yra skaičiaus z menamoji dalis $\Im z$. Iš kompleksinio kintamojo z logaritmo apibrėžimo

$$\log z = \log|z| + i(\arg z + 2\pi n),\ n \in \mathbb{Z}$$

seka, kad logaritmo funkcijos $\log z$ realioji dalis išreiškiama vienareikšmiškai, o menamoji dalis - nevienareikšmiškai. Taigi,

$$\pi = -\frac{\arg z}{2n} - \frac{\log z - \log|z|}{2n} \cdot i,\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Keletas pavyzdžių: Kai $z = 1$, tai $\arg z = 0$ ir

$$\pi = -\frac{0}{2n} - \frac{\log 1 - \log|1|}{2n} \cdot i \ \Rightarrow \pi = -\frac{\log 1}{2n} \cdot i,\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

kai $z = -1$, tai $\arg z = \pi$ ir

$$\pi = -\frac{\pi}{2n} - \frac{\log(-1) - \log|-1|}{2n} \cdot i \ \Rightarrow \pi = -\frac{\log(-1)}{2n+1} \cdot i,\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

Kai $z = 1 + i$, tai $\arg z = \pi/4$ ir

$$\pi = -\frac{\frac{\pi}{4}}{2n} - \frac{\log(1+i) - \log|1+i|}{2n} \cdot i \ \Rightarrow \pi = -\frac{2\log(1+i) - \log 2}{4n+1} \cdot i,\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

2.3 Machin'o tipo formulė konstantai π išreikšti

Nagrinėsime formulę, kuri turi pavidalą

$$M\operatorname{arccot} x + N\operatorname{arccot} y = \frac{1}{4}\pi,\ M, N \in \mathbb{Z} \cup \{0\},\ x, y \in \mathbb{Z}.$$

Pakeiskime funkcijos $\operatorname{arccot} x$ išraišką:

$$\operatorname{arccot} x = \frac{1}{2i}\log\frac{z+i}{z-i}.$$

Tada

$$M\operatorname{arccot} x + N\operatorname{arccot} y = \frac{1}{2i}\log\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^M + \frac{1}{2i}\log\left(\frac{y+i}{y-i}\right)^N = \frac{\pi}{4}.$$

Jeigu potencijuosime abi lygybės

$$\frac{1}{2i}\log\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^M + \frac{1}{2i}\log\left(\frac{y+i}{y-i}\right)^N = \frac{\pi}{4}$$

puses, tai gausime lygybę

$$\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^M \cdot \left(\frac{y+i}{y-i}\right)^N = \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{2}} = i.$$

Machin'o tipo formulė

$$M\mathrm{arccot}x + N\mathrm{arccot}y = \frac{1}{4}\pi,\ M, N \in \mathbb{Z} \cup \{0\},\ x, y \in \mathbb{Z}$$

egzistuoja tada ir tik tada, kai egzistuoja bent vienas lygties

$$\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^M \cdot \left(\frac{y+i}{y-i}\right)^N = i$$

sprendinys $(x, y, M, N) \in \mathbb{Z}^4$. Yra tik keturios tokio tipo formulės [7]:

Kai $(x, y, M, N) = (5, 239, 4, -1)$, tai

$$\left(\frac{5+i}{5-i}\right)^4 \cdot \left(\frac{239+i}{239-i}\right)^{-1} = i \ \Rightarrow\ 4\mathrm{arccot}5 - \mathrm{arccot}239 = \frac{\pi}{4},$$

Kai $(x, y, M, N) = (2, 3, 1, 1)$, tai

$$\left(\frac{2+i}{2-i}\right)^1 \cdot \left(\frac{3+i}{3-i}\right)^1 = i \ \Rightarrow\ \mathrm{arccot}2 + \mathrm{arccot}3 = \frac{\pi}{4},$$

Kai $(x, y, M, N) = (2, 7, 2, -1)$, tai

$$\left(\frac{2+i}{2-i}\right)^2 \cdot \left(\frac{7+i}{7-i}\right)^{-1} = i \ \Rightarrow\ 2\mathrm{arccot}2 - \mathrm{arccot}7 = \frac{\pi}{4},$$

Kai $(x, y, M, N) = (3, 7, 2, 1)$, tai

$$\left(\frac{3+i}{3-i}\right)^2 \cdot \left(\frac{7+i}{7-i}\right)^1 = i \ \Rightarrow\ 2\mathrm{arccot}3 + \mathrm{arccot}7 = \frac{\pi}{4}.$$

3 skyrius

Kai kurios konstantos π išraiškos begalinėmis koverguojančiomis skaičių eilutėmis

3.1 Konstantos π išraiškos funkcijų skleidiniais Maclaurin'o eilute

Yra žinoma [3], kad funkcijos

$$f(x) = (1+x)^a\,,\ x \in (-1,1)\,,\ a \in A := \mathbb{R} \setminus (\mathbb{N} \cup \{0\})$$

Maclaurin'o eilutė

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-k+1)}{k!} x^k$$

konverguoja absoliučiai intervale $x \in (-1,1)$, kai $a \in A$, bei šio intervalo galuose $\{-1,1\}$, kai $a \in A \cap \{a \in \mathbb{R} : a \geqslant 0\}$. Funkcijos $f(x)$ eilutė konverguoja reliatyviai taške $x = 1$, kai $a \in A \cap (-1,0)$. Kitais atvejais funkcijos $f(x)$ eilutė diverguoja. Iš čia ir seka, kad

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = \int_0^x \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{-1}{2}\left(\frac{-1}{2}-1\right)\left(\frac{-1}{2}-2\right)\dots\left(\frac{-1}{2}-k+1\right)}{k!} \left(-y^2\right)^k\right) \mathrm{d}y$$

$$= x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2^k k!\,(2k+1)} x^{2k+1} = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!\,(2k+1)} x^{2k+1},\ \forall x \in (-1,1)\,.$$

Jeigu šioje išraiškoje įrašysime reikšmę $x = 1/2$, tai gausime konstantos π išraišką

$$\pi = 3 + 6\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}k!\,(2k+1)} = 3 + 6\left(\frac{1}{6} + \frac{3}{80} + \frac{5}{224} + \dots\right).$$

Kadangi

$$\frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}k!} \cdot \frac{(2k)!!}{(2k)!!} = \frac{(2k)!}{2^{2k}\,(k!)^2},$$

tai funkcijos $\arcsin x$ laipsninė eilutė turi pavidalą

$$\arcsin x = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k}\,(k!)^2} \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1},\ \forall x \in (-1,1)\,.$$

Dabar parodysime, kaip galima išreikšti funkciją $\arctan x$ laipsnine eilute intervale $x \in (-1,1)$. Iš funkcijos $\frac{1}{1+x^2}$ skleidinio Maclaurino'o eilute gauname, kad

$$\arctan x = \int_0^x \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \int_0^x \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1\,(-1-1)\cdot\ldots\cdot(-1-n+1)}{k!}\left(y^2\right)^k\right)\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^x \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k\, y^{2k}\right)\mathrm{d}y = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1},\ \forall x \in (-1,1)\,.$$

Iš teoremos 1 seka, kad ši eilutė konverguoja reliatyviai aibėje $x \in \{-1,1\}$. Į pastarąją eilutę įrašę reikšmę $x = 1$, gausime eilutę

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Ši eilutė kartais vadinama Leibniz'o eilute. Pritkaikę funkcijos $\arctan x$ skleidinį Maclaurin'o eilute Machin'o tipo formulėms, gausime, kad, pavyzdžiui,

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} = 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)5^{2k+1}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)239^{2k+1}},$$

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)2^{2k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)3^{2k+1}}.$$

3.2 Konstantos π išraiškų pavyzdžiai funkcijų skleidiniais trigonometrinėmis Fourier eilutėmis

Funkciją $f(x) = x,\ x \in [-\pi,\pi]$ išskleisime trigonometrine Fourier eilute. Eilutės trigonometriniai koeficientai yra

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos kx\mathrm{d}x = 0,\ k \in \mathbb{N}\cup\{0\}\,,$$

nes pontegralinė funkcija $x\cos kx$ yra nelyginė, o integravimo rėžiai yra vienas kitam priešingi skaičiai.

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin kx\mathrm{d}x = -\frac{2}{\pi n}\left(x\cos kx|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\cos kx\mathrm{d}x\right) = \frac{2}{k}\left(-1\right)^{k+1},\ k\in\mathbb{N}.$$

Remiantis teorema 2, trigonometrinė eilutė

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\left(-1\right)^{k+1}}{k}\sin kx$$

konverguoja ir yra teisinga lygybė

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\left(-1\right)^{k+1}}{k}\sin kx = \begin{cases} x, & |x|<\pi, \\ 0, & |x|=\pi. \end{cases}$$

Jeigu į eilutę įrašysime reikšmę $x=\pi/2$, tai

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}.$$

Funkciją $f(x)=x^2,\ x\in[-\pi,\pi]$ išskleisime trigonometrine Fourier eilute. Eilutės trigonometriniai koeficientai yra tokie:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\mathrm{d}x = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos kx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi k}\int_0^{\pi} x^2\mathrm{d}\sin kx$$

$$= \frac{2}{\pi k}\left(x^2\sin kx|_0^{\pi} + \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\mathrm{d}\cos kx\right) = \frac{4\left(-1\right)^k}{k^2},\ k\in\mathbb{N},$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\mathrm{d}x = 0, k\in\mathbb{N}.$$

Tada funkcijos x^2 trigonometrinė Fourier eilutė

$$\frac{a_0}{2} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k}{k^2}\cos kx,$$

remiantis teorema 2, koverguoja, o jos suma yra lygi x^2 t.y.

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k}{k^2}\cos kx = x^2,\ x\in[\pi,\pi].$$

Jeigu į eilutės išraišką įrašysime dydį $x=\pi$, tai gausime, kad

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots,$$

o jeigu įrašysime dydį $x=0$, tai turėsime, kad

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{n^2} = 1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\ldots.$$

Sudėję šias dvi eilutes, gausime kitą eilutę t.y.

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots,$$

o jas atėmę vieną iš kitos, gausime, kad

$$\frac{\pi^2}{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64} + \dots.$$

Jeigu ieškotumėme funkcijų $f(x) = x^m,\ m \in \mathbb{N},\ x \in [-\pi, \pi]$ Fourier eilučių, tai gautume konstantos π^m išraiškas.

4 skyrius

Kai kurios konstantos π išraiškos integralo, ribos, begalinės sandaugos pavidalu

Parodysime, kaip konstantą π galima išreikšti begaline sandauga

$$\pi = 2\prod_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1}.$$

Nagrinėkime apibrėžtinį integralą

$$I_n := \int_0^{\pi/2}\sin^n x\mathrm{d}x,\ n\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

$$I_n = -\int_0^{\pi/2}\sin^{n-1}x\mathrm{d}\cos x = (n-1)\int_0^{\pi/2}\left(1-\sin^2 x\right)\sin^{n-2}x\mathrm{d}x$$
$$= (n-1)\left(I_{n-2}-I_n\right),\ \forall\in\mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

Iš čia gauname, kad

$$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2},\ \forall\in\mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

Pastebime, kad jeigu

$$\sin^n x\leqslant\sin^{n-1}x,\ \forall x\in[0,\pi/2],\ \forall n\in\mathbb{N},$$

tai

$$I_n = \int_0^{\pi/2}\sin^n x\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\pi/2}\sin^{n-1}x\mathrm{d}x = I_{n-1},\ \forall x\in[0,\pi/2],\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Iš čia seka, kad

$$\frac{I_n}{I_{n-1}}\leqslant 1,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Be to,

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \geqslant \frac{n-1}{n} I_{n-1},\ \forall \in \mathbb{N}.$$

Vadinasi,

$$\frac{n-1}{n} \leqslant \frac{I_n}{I_{n-1}} \leqslant 1,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Remiantis teorema 3, iš pastarosios nelygybės seka, kad

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{I_{n-1}} = 1$$

Dydžio I_n išraiška priklauso nuo to, ar skaičius n yra lyginis, ar nelyginis t.y.

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{N},$$

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,\ k \in \mathbb{N}.$$

Tada

$$\lim_{k\to\infty} \frac{I_{2k+1}}{I_{2k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2k}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2k+1)} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2k}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1)} \cdot \frac{2}{\pi} = 1.$$

Iš čia seka, kad

$$2 \prod_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2}{4k^2-1} = \pi$$

Ši sandauga kartais vadinama Wallis'o sandauga.

Yra įrodyta [5], kad

$$\sin x = x \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Šioje išraiškoje atlikę pateikimą $x = \pi t$, turėsime, kad

$$\sin \pi t = \pi t \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right).$$

Kai $t = 1/2$, tada

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right).$$

Gama funkcija

$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} u^{z-1} \mathrm{e}^{-u} \mathrm{d}u$$

yra netiesioginis integralas, priklausantis nuo parametro $z : \Re z > 0$. Gama funkcija tenkina tokią lygybę:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}} \mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$$

Parodysime, kaip ją gauti. Matematinėje analizėje [4] yra įrodoma pildinio formulė

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},\ \forall x \in (0,1),$$

kurioje, įrašę reikšmę $x = 1/2$, gausime, kad

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \pi \;\Rightarrow\; \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Matematinėje analizėje yra įrodoma [4], kad Gamma funkciją $\Gamma(x),\ x \in \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\}$ galima išreiškti begaline konveruojančia sandauga

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x\mathrm{e}^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) \mathrm{e}^{-\frac{x}{n}},$$

kur γ yra Eulerio-Mascheroni konstanta. Ši sandauga kartais vadinama Weierstrass'o sandauga. Joje įrašę reikšmę $x = 1/2$, turėsime, kad

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{\gamma}{2}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{2n}}.$$

Logaritmavę Weierstrass'o sandaugos abi lygybės puses, gausime išraišką:

$$\log \frac{1}{\Gamma(x)} = \log x + \gamma x + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\log\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right).$$

Diferencijuokime gautąją išraišką kintamojo x atžvilgiu, tada gausime lygybę

$$-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{1}{x} + \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n}\right),$$

kurioje įrašę reikšmes $x = 1$ ir $x = 1/2$, gausime, kad

$$\gamma = -\Gamma'(1) = -\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-u} \log u \mathrm{d}u$$

ir

$$\sqrt{\pi} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{2 + \gamma + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{1-\gamma}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}\log u}{\sqrt{u}} \mathrm{d}u.$$

Diferencijuokime Weierstrass'o sandaugą dar kartą kintamojo x atžvilgiu:

$$\frac{\Gamma''\Gamma - (\Gamma')^2}{\Gamma^2}(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2}.$$

Tada, pastarojoje išraiškoje įrašę reikšmę $x = 1$ turėsme, kad

$$\frac{\pi^2}{6} = -y^2 + \Gamma''(1) = -\gamma^2 + \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-u} \log^2 u \mathrm{d}x.$$

Jeigu Gama funkcijos $\Gamma(x)$ nepriklausomas argumentas $x \in \mathbb{N}$, tai ši funkcija skaičiui x priskiria skaičiaus $x-1$ faktorialą $(x-1)!$. Matematinėje analizėje [3] yra įrodoma Stirling'o formulė

$$\Gamma(x+1) = x! \sim \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x,\ x \to \infty,$$

iš kurios galime išreiškti konstantos π išraišką t.y.

$$\pi = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x} x!^2}{2x^{2x+1}}.$$

Konstantos π išraiškoms rasti, pasinaudokime Riemann'o apibrėžtinio integralo apibrėžimu [3]. Nagrinėkime intervale $x \in [0,1]$ apibrėžtinius integralus

$$A := \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4},\ B := \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2},\ C := \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$$

Intervalą $x \in [0,1]$ padalinkime į n lygių dalių ir sunumeruokime intervalo taškus:

$$x_k = \frac{1-0}{n}k,\ k = \overline{0,n}.$$

Tada

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1-x_k^2}\,(x_k - x_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2}\sqrt{n^2-k^2} = \frac{\pi}{4},$$

$$B = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1-x_k^2}}\,(x_k - x_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} = \frac{\pi}{2},$$

$$C = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+x_k^2}\,(x_k - x_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Matematinėje literatūroje [1] yra sutinkamas integralas

$$J := \int_0^1 \frac{\log(1+x^p)}{x}\mathrm{d}x,\ p \in \mathbb{R},\ p > 0.$$

Pasinaudodami funkcijos $\log(1+x)$ Maclaurin'o eilute

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k,\ x \in (-1,1]$$

apskaičiuosime integralą J:

$$J = \int_0^1 \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^{pk}\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^{pk-1}\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\int_0^1 x^{pk-1}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12p}.$$

Analogiškai, pasinaudojant funkcijos $\log(1-x)$ Maclaurin'o eilute

$$\log(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}x^k,\ x \in (0,1),$$

galime apskaičiuoti, kad

$$I := \int_0^1 \frac{\log(1-x^q)}{x}\mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{6q},\ q \in \mathbb{R},\ q > 0$$

Expressions of constant π

Summary

In this work we showed expressions of constant π. This constant can be expanded into Maclaurin's series or Fourier series. This constant can be expressed as infinite product of real numbers, or definite integral. Also, the constant π can be expressed as finite sum of arctangents. As we can see there are many ways how to express this constant and it can arise in many branches in mathematics.

Literatūra

[1] H. B. Dwight, *Tables of Integrals and Other Mathematical Data,* Maskva, 214-215 1966.

[2] V. Kabaila, *Matematinė analizė, 2*, Vilnius, „Mokslas“ , 266-268, 1986.

[3] E. Misevičius, *Matematinė analizė, I dalis,* Vilnius, TEV, 131-133, 1998.

[4] E. Misevičius, *Matematinė analizė,*, Vilnius ,Vilniaus universiteto leidykla, 183-224, 2001.

[5] A. Nagelė, *Kompleksinio kintamojo funkcijų teorija*,Vilnius, Žara, 314-333, 1996.

[6] R. B. Schinazi, *From Calculus to Analysis*, New York, NY, Springer Science+Busines Media,95-112, 2010.

[7] *http://mathworld.wolfram.com/Machin-LikeFormulas.html*