VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
TIKIMYBIŲ TEORIJOS IR SKAIČIŲ TEORIJOS KATEDRA

Gabija Gumbakytė

NUOSTOLIŲ DĖL ĮSIPAREIGOJIMŲ NEVYKDYMO MATEMATINIS MODELIAVIMAS

Bakalauro baigiamasis darbas

Leidžiu ginti .....
Darbo vadovas **Lekt., Dr. Andrius Grigutis**

Vilnius 2017

Turinys

Įvadas 2
I. Pagrindinės sąvokos 3
1. Nemokumo tikimybė 3
2. Paskolos dydis nemokumo atveju 4
3. Nuostolis dėl įsipareigojimų nevykdymo 4
4. Beta skirstinys 5
5. Tikėtinas nuostolis 7
6. Nenumatytas nuostolis 7
7. Vertės rizikos pokytis 8
II. Informacija paskolų portfelio vertinimui 9
1. Paskolų portfelio tikėtinas ir nenumatytas nuostoliai 9
2. Nuostolio pasiskirstymo funkcija. Monte Carlo modelis 11
3. Tolydžios nuostolių pasiskirstymo funkcijos sudarymas 12
III. Paskolų portfelio LGD pasiskirstymo funkcijos modeliavimas 13
1. Paskolų portfelio bendra informacija 13
2. Paskolų portfelio poaibio sudarymas 13
3. LGD pasiskirstymo funkcijos modeliavimas 15
Išvados 19
Summary 20
Literatūra 21
Priedai 22

Įvadas

Šiuolaikinėje visuomenėje sumokėti už įsigytas prekes ar paslaugas paskolų būdu yra labai populiaru, tačiau nevisų fizinių ir juridinių klientų paskolų prašymai būna patenkinami. Priežastimi tampa tai, kad paskola būna įvertinama kaip labai nuostolinga. Paskolos nuostolio sąvoka yra kritinis rodiklis, juk paskolos davėjui yra svarbu gauti pelną, o ne nuostolį, todėl nenuostabu, kad paskolos teikimo metu yra vertinama nuostolio tikimybė ir galimas jo dydis. Deja, nuostolio vertinimas nėra paprastas procesas, kadangi klientas su gera kredito istorija ir pastoviomis pajamomis ateityje gali būti kitoje situacijoje – asmens finansinė padėtis bet kurią akimirką gali pasikeisti.

Paskolos nuostoliu yra laikoma suma, kuri liko nesusigrąžinta. Taip gali įvykti, jei klientas, kuriam buvo suteikta paskola, nustoja vykdyti savo įsipareigojimus, pavyzdžiui, nustoja mokėti įmokas, periodinę įmoką pateikia po nustatyto termino, pradeda mokėti mažesnėmis įmokomis ar nebesilaiko kitų sutartyje nurodytų sąlygų. Ši situacija gali turėti be galo daug priežasčių: klientas pakeitė/prarado darbą, pasikeitė kliento darbingumo grupė (invalidumas), pasikeitė šeimos finansinė padėtis, ištiko finansinis bankrotas ar netgi kliento mirtis. Būna situacijų, kai kliento įsipareigojimų nevykdymas yra laikinas – klientas neigiamai pasikeitusią finansinę padėtį, tarkim prarastą darbą, netrunka susitvarkyti. Tada klientas sugeba ne tik padengti praleistas įmokas, bet ir sumoka susikaupusius delspinigius, paskaičiuotus dėl įsipareigojimų nevykdymo. Šioje situacijoje nuostolio nėra. Deja, dažnai būna taip, kad kliento finansinės padėties blogėjimas priveda prie kliento nebegalėjimo mokėti paskolos. Tą akimirką klientas tampa nemokus. Kad klientas būtų laikomas nemokiu, turi būti tenkinama bent viena iš šių sąlygų: bankas laiko klientą negalinčiu grąžinti visos paskolos arba klientas vėluoja daugiau negu 90 dienų sumokėti bet kurį paskolos materialinį įsipareigojimą (paskolos įmoką, palūkanas ar delspinigius).[3] Pirmoji sąlyga yra subjektyvi, tačiau antroji yra objektyvi, kadangi mokėjimo vėlavimas 90 dienų yra signalas, jog klientas tapo nemokiu.[3] Nemokūs klientai, turintys negrąžintų paskolų, sukelia nuostolį, kadangi bankas paskolino tam tikrą pinigų sumą, kurios neatgavo. Kuo daugiau tokių paskolų bankas suteikia, tuo didesnį nuostolį vėliau patiria. Todėl bankui yra svarbu įvertinti, koks gali būti nuostolis kliento įsipareigojimų nevykdymo atveju.

Mano bakalaurinio darbo tikslas yra išnagrinėti pagrindinę teoriją, susijusią su paskolos nuostolio supratimu ir jo vertinimu, taip pat sudaryti konkretaus paskolų portfelio nuostolio pasiskirstymo funkciją. Darbe bus pateikiami reikalingi apibrėžimai ir paaiškintos šios sąvokos: nemokumo tikimybė, paskolos dydis nemokumo atveju, nuostolis dėl klientų įsipareigojimų nevykdymo, tikėtinas ir nenumatytas nuostoliai, vertės rizikos pokytis. Taip pat, bus aptartas Monte Carlo metodas, paaiškinta kaip galima šį metodą naudoti nustatant paskolų portfelių nuostolių pasiskirstymo funkciją, bei paminėtas modelis bus praktiškai pritaikytas konkretaus paskolų portfelio nuostolio dėl klientų įsipareigojimų nevykdymo pasiskirstymo funkcijos sudarymo metu. Monte Carlo metodo taikymo metu bus patvirtinta, kad apskaičiuota pasiskirstymo funkcija, vaizduojanti nuostolį dėl klientų įsipareigojimų nevykdymo, atitinka beta skirstinį, ir bus nustatyti šią pasiskirstymo funkciją atitinkančio beta skirstinio parametrai.

I. Pagrindinės sąvokos

Apibrėžimas. Multiaibė – tai objektų rinkinys, kuriame yra leidžiamas vienodų objektų pasikartojimas. [4]

Apibrėžimas. Atsitiktinis dydis X yra vadinamas tolydžiu, jei jo pasiskirstymo funkcija yra tolydi. [4]

Apibrėžimas. Tarkime, kad turime diskretų atsitiktinį dydį X tikimybinėje erdvėje (Ω; A; P) ir X įgyja skirtingas reikšmes x_1, x_2, x_3, ..., x_n su teigiamomis tikimybėmis p_1, p_2, p_3, ... ,p_n. Tada atsitiktinio dydžio X vidurkį apibrėšime tokia suma: $EX = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k$. Tolydaus atsitiktinio dydžio atveju $EX = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)$, čia F(x) – tolydaus atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija. [4]

Vidurkio savybės: [4]

- Jei P(X=c)=1, tai EX=c;
- Kadangi X turi vidurkį, o c yra konstanta, tai cX turi vidurkį ir E(cX)=c · EX;
- Kadangi X ir Y turi vidurkius, tai ir X+Y turi vidurkį ir E(X+Y)=EX+EY;
- Tarkime, atsitiktiniai dydžiai X ir Y yra nepriklausomi ir turi vidurkius. Tuomet ir XY turi vidurkį bei E(XY)=EX · EY.

Apibrėžimas. Tarkime, kad turime diskretų atsitiktinį dydį X tikimybinėje erdvėje (Ω; A; P), X įgyja skirtingas reikšmes x_1, x_2, x_3, ..., x_n su teigiamomis tikimybėmis p_1, p_2, p_3, ... ,p_n ir X vidurkis yra EX. Tada atsitiktinio dydžio X dispersiją apibrėšime taip: $DX = \sum_{k=1}^{n} (x_k - EX)^2 \cdot p_k = E(X - EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$. Tolydaus atsitiktinio dydžio atveju $D(X) = EX^2 - (EX)^2, čia\ EX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x)$. [4]

Dispersijos savybės: [4]

- Kadangi X turi dispersiją, tai ir cX turi dispersiją, ir D(cX)=$c^2 \cdot DX$;
- Kadangi X ir Y turi dispersijas, tai ir suma X+Y turi dispersiją, ir yra teisinga ši lygybė $\mathrm{D(X+Y) = DX + DY + 2E(X - EX)(Y - EY)}$;
- Kvadratinė šaknis iš dispersijos $\sqrt{D(x)}$ yra vadinama atsitiktinio dydžio X standartiniu nuokrypiu.

Apibrėžimas. Tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai X ir Y turi dispersijas. Tuomet šių atsitiktinių dydžių X ir Y kovariacija, kuri yra žymima cov(X,Y), bus apibrėžiama štai tokia formule: $\mathrm{cov(X,Y) = E(X - EX)(Y - EY) = E(XY) - E(X)E(Y)}$. [4]

Apibrėžimas. Atsitiktiniai dydžiai X ir Y vadinami nekoreliuotais, jei cov(X,Y) = 0. [4]

Apibrėžimas. Tegul atsitiktiniai dydžiai X ir Y turi teigiamas dispersijas. Tada tų dydžių tarpusavio priklausomumui nustatyti yra apibrėžiamas jų koreliacijos koeficientas $\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)} \cdot \sqrt{D(Y)}}$. [4]

1. Nemokumo tikimybė

(Šis skyrius buvo parašytas remiantis [1] šaltiniu)

Suteikdamas paskolą bankas prisiima riziką, kad klientui suteikiama paskola gali tapti nuostolinga, jei klientas dėl kokių nors priežasčių nebegali grąžinti paskolos. Šiuo atveju, yra svarbu žinoti kliento nemokumo tikimybės rodiklį (angliškai Probability of Default, žym. PD), kuris padeda įvertinti, ar teikiama paskola bus grąžinta, kokiu laiko momentu klientas gali nustoti mokėti ir ar tikėtina, kad klientas lems didelį nuostolį. Šio rodiklio įgyjamų reikšmių aibė yra apibrėžiama taip:

- Klientas įvykdo visus sutarties įsipareigojimus ir grąžina visą paskolos sumą su nustatytomis palūkanomis – tuo atveju PD=0.

- Klientas tampa nemokus ir neįvykdo savo įsipareigojimų – tuo atveju PD=1.
- Visais kitais atvejais paskolos mokėjimo metu $PD \in (0; 1)$.

Šios charakteristikos žinojimas gali padėti įvertinti labai svarbius paskolos teikimo kriterijus. Deja, apibrėžti kliento nemokumo tikimybę yra sudėtinga užduotis, kadangi paskolos mokėjimas priklauso nuo įvairių kintamųjų, kurie gali bent minimaliai padaryti įtaką asmens finansinei padėčiai.

2. Paskolos dydis nemokumo atveju

(Šis skyrius buvo parašytas remiantis [1] šaltiniu)

Paskolos dydis nemokumo atveju (angliškai Exposure At Default, žym. EAD), yra dar vienas labai svarbus rodiklis paskolų vertinimo teorijoje. Šis skaičius rodo, kokia yra paskolos vertė dar nesuteikus konkrečių paskolos mokėjimo atidėjimų ar nuolaidų ir dar nenurašius paskolos vertės. Ši charakteristika apibrėžia, kiek bankas rizikuoja prarasti, jei klientas taptų nemokus konkrečiu momentu. Apskritai vertinant, paskolos dydis nemokumo atveju yra sudarytas iš išmokėjimų (banko išmokėta paskolos dalis klientui), kliento įmokų (grąžintos paskolos dydis) ir neišmokėjimų (likutis, kiek bankas yra įsipareigojęs suteikti klientui). Dažniausiai, klientui artėjant prie nemokumo ribos, išmokėjimų dalis didėja, kol tuo tarpu neišmokėjimų dalis mažėja, kartais mažėja ir periodinės įmokos. Paprasčiausia matematinė EAD išraiška gali būti užrašoma tokiu būdu:

$$EAD = išmokėjimai - įmokos + \gamma \cdot neišmokėjimai,$$

čia $\gamma \in [0;1]$ yra rodiklis, žymintis santykį tarp planuojamų išmokėjimų ir turimų neišmokėjimų dydžio, t.y. γ apibrėžia neišmokėjimų dalį, kurią klientas norės pasiimti prieš tampant nemokiu paskolos vartotoju. Galima būtų sakyti, kad šis skaičius yra neišmokėjimų sunaudojimo koeficientas, kadangi žymi kintamąją paskolos dalį, kurią bankas gali prarasti arba neprarasti, priklausomai nuo to, ar klientas pasiims norimą paskolos sumą. Tačiau pažvelgus į situaciją, kai klientas tampa nemokus, galima pastebėti, kad γ bus nulis, kadangi klientui nebebus suteikiama galimybė pasiimti likusią paskolos dalį. Tai perspėja, kad γ turi būti skaičiuojamas konkrečiu momentu, dar prieš klientui pasinaudojant visa paskolos suma.

Turint $\gamma = 0$, yra akivaizdu, kad paskolos dydis nemokumo atveju žymi, kiek bankas rizikuoja prarasti, jei neturės galimybės padengti bent dalies skolos iš kliento sąskaitos ar kitų sutartyje paminėtų apsaugos variantų. Tačiau reikia turėti omenyje, kad bankas, suteikdamas klientui paskolą, dažnai pasirūpina paskolos padengimu kliento nemokumo atveju, t.y. kartais būna užstatomas kliento valdomas konkretus turtas, kuris galėtų padengti suteiktos paskolos nuostolį.

3. Nuostolis dėl įsipareigojimų nevykdymo

(Šis skyrius buvo parašytas remiantis [1] šaltiniu)

Nuostolis įvykus įsipareigojimų nevykdymui (angliškai Loss Given Default, žym. LGD) yra apibrėžiamas labai paprastai:

$$LGD = 1 - \delta,$$

čia $\delta \in [0;1]$ yra paskolos susigrąžinimo sumos rodiklis. Jei bankas susigrąžina visą paskolos likutį, kuris buvo negrąžintas dėl kliento nemokumo, tuomet $\delta=1$, ir priešingai, jei bankas nesusigrąžina nė mažiausios dalies, tada $\delta=0$. Paskolos susigrąžinimo (išieškotos sumos) rodiklis yra grindžiamas apsaugomis, kurias bankas sudarė su klientu, pavyzdžiui, esant kliento turto įkeitimui. Kitais žodžiais tariant, ši sąvoka apibrėžia

dalį, kurią bankas iš tiesų praras, jei klientas taps nemokus. Deja, kad ir kaip paprastai skambėtų nuostolio dėl įsipareigojimų nevykdymo apskaičiavimas, tačiau viskas yra daug sudėtingiau, kadangi paskolos padengimo rodiklis priklauso nuo įvairių faktorių: užstato kokybės, kokiu eiliškumu bus suteiktos išieškotos lėšos, kokia suma bus padengta ir kitų rodiklių. Dėl šios priežasties nuostolių dėl kliento įsipareigojimų nevykdymo sąvoka yra apibrėžiama kaip atsitiktinis dydis, kuris nusako finansinį praradimą kliento nemokumo atveju.[2] Praktikoje yra išskiriami du rodikliai: faktinis ir numanomas nuostoliai dėl įsipareigojimų nevykdymo.[3] Faktinis paskolos nuostolis dėl klientų įsipareigojimų nevykdymo net pagal pavadinimą leidžia suprasti, kad yra skaičiuojamas klientui nebegalint grąžinti paskolos, o numanomas nuostolis dėl įsipareigojimų nevykdymo yra skaičiuojamas klientų grąžinamoms paskoloms kaip informacinis rodiklis, padedantis įsivertinti paskolos ateities pelningumą. Žinoma, reikia atkreipti dėmesį, ar skaičiuojamas nuostolis dėl įsipareigojimų nevykdymo yra vertinamas kaip buhalterinis ar kaip ekonominis nuostolis, kadangi nuostolio įvertinimas gali skirtis. [3] Buhalterinis nuostolis vertina tik tą sumą, kurios bankui nepavyks atgauti. Tuo tarpu, ekonominis nuostolis atsižvelgia ir į valiutų kursų svyravimus, pinigų vertę laike ir kitus rodiklius, darančius įtaką atgautos sumos ekonominei vertei. [3]

Nuostolių dėl klientų įsipareigojimų nevykdymo rodiklis gali būti apskaičiuotas ir kitaip, įvertinus kliento praeityje turėtas ir negrąžintas paskolas. Turint tokią informaciją galima įvertinti kliento elgesį, kai šis artėja prie nemokumo. Šiame skaičiavime yra naudojami pinigų srautai iš paskolos išieškojimo, diskontuotos pinigų sumos iš negrąžintos paskolos. Šis rodiklis apskaičiuojamas taip:

$$LGD_1 = \frac{Ekonominis\ nuostolis}{EAD} \cdot 100\%$$

Apibrėžimas. Paskolos nuostolio svoris (angliškai loss severity, žym SEV) - tai atsitiktinis dydis, kurio vidurkis yra paskolos LGD, t.y. $E(SEV) = LGD$.

4. Beta skirstinys

Kaip yra rašoma Vyvauto Valvonio daktaro disertacijoje [2], verta paminėti, kad „modeliuojant LGD rodiklį, paprastai daroma prielaida, kad jis pasiskirstęs pagal beta skirstinį (nurodomas beta skirstinio tankis):

$$p(x) = \frac{x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1}}{\beta(a,b)},$$

$$čia\ 0 \leq x\ \leq 1; a, b > 0; \beta(a,b) = \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} - beta\ funkcija; \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt - gama\ funkcija.“$$

Kadangi vėliau bus nagrinėjama nuostolio dėl klientų įsipareigojimų nevykdymo pasiskirstymo funkcija ir skaičiavimuose bus naudojami beta skirtinio vidurkis ir dispersija, todėl šiame skyriuje bus pateikti šių charakteristikų išraiškos per a ir b parametrus. Beta funkcija yra apibrėžiama taip:

$$\beta(a,b) = \int_0^1 x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1} dx\ .$$

Nesunku matyti, kad:

$$\int_0^1 p(x)dx = \int_0^1 \frac{x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1}}{\beta(a,b)} dx = 1\ ,$$

O atsitiktinio dydžio X, kuris yra pasiskirstęs pagal beta skirstinį su parametrais a ir b, pasiskirstymo funkcija yra

$$P(X \le x) = \int_0^x \frac{u^{a-1} \cdot (1-u)^{b-1}}{\beta(a,b)} du = u, čia\ 0 \le x \le 1\,.$$

Teiginys. Yra teisinga tokia lygybė: $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$.

Įrodymas. Pagal apibrėžimą yra teisinga:

$$\Gamma(a+1) = \int_0^\infty t^{a+1-1} e^{-t} dt = -\int_0^\infty t^a de^{-t} = -(t^a e^{-t})\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t} dt^a = a\int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt = a\Gamma(a)\,. \square$$

Teiginys. Jei atsitiktinis dydis $X \sim \beta(a,b)$, tai atsitiktinio dydžio X vidurkis yra

$$E(X) = \frac{a}{a+b}\,.$$

Įrodymas. Naudojantis tolydžios funkcijos vidurkio apibrėžimu ir turima beta skirstinio išraiška, yra gaunama tokia lygybė:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^1 x\, \frac{x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1}}{\beta(a,b)}\, dx = \frac{1}{\beta(a,b)} \int_0^1 x^a \cdot (1-x)^{b-1}\, dx\ = \frac{\beta(a+1,b)}{\beta(a,b)}$$

Pasinaudojus aukščiau įrodytu teiginiu ir beta skirstinio išraiška per gama funckiją, turimą lygybę galima užrašyti taip:

$$E(X) = \frac{\beta(a+1,b)}{\beta(a,b)} = \frac{\Gamma(a+1)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+1+b)} \cdot \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} = \frac{a\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{(a+b)\,\Gamma(a+b)} \cdot \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)} = \frac{a}{a+b}\,. \square$$

Teiginys. Jei atsitiktinis dydis $X \sim \beta(a,b)$, tai atsitiktinio dydžio X dispersija yra

$$D(X) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}\,.$$

Įrodymas. Naudojantis tolydžios funkcijos dispersijos apibrėžimu ir turima beta skirstinio išraiška, yra gaunama tokia lygybė:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - E(X)^2 = \frac{1}{\beta(a,b)} \int_0^1 x^{a+1} \cdot (1-x)^{b-1}\, dx\ - E(X)^2 =$$

$$\frac{\beta((a+1)+1),b)}{\beta(a,b)} - E(X)^2 = \frac{\Gamma\big((a+1)+1\big)\,\Gamma(b)}{\Gamma\big((a+1+b)+1\big)} \cdot \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} - E(X)^2 =$$

$$\frac{(a+1)\Gamma(a+1)\,\Gamma(b)}{(a+b+1)\,\Gamma(a+b+1)} \cdot \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)} - E(X)^2 = \frac{a(a+1)\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{(a+b+1)(a+b)\Gamma(a+b)} \cdot \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)} -$$

$$E(X)^2 = \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)} - \frac{a^2}{(a+b)^2} = \frac{a(a+b)(a+1) - a^2(a+b+1)}{(a+b)^2(a+b+1)} =$$

$$\frac{a^3 + a^2 + a^2 b + ab - a^3 - a^2 b - a^2}{(a+b)^2(a+b+1)} = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}\,. \square$$

5. Tikėtinas nuostolis

Vienas svarbiausių argumentų, kai svarstoma apie paskolos suteikimą, yra informacija, koks gali būti nuostolis, jei skolintojas sutiks išduoti prašomą paskolą. Šioje situacijoje bankas turi įsivertinti, koks bus tikėtinas nuostolis (angliškai Expected Loss, žym. EL). Šis nuostolis parodo, kokie gali būti nuostoliai, susiję su įmonės nepelningomis operacijomis, tarkim, nesėkmingų priminimų apie mokėjimo vėlavimą išlaidos.[5] Turint šią informaciją, bankas gali kurti veiksmų planą, kokio dydžio įmokas imti, kokio užstato prašyti bei kokį kitą apsaugos būdą pasirinkti, kad prireikus būtų padengtas tikėtinas nuostolis.

Kad įsivertinti tikėtiną nuostolį, bankui reikia žinoti tris kriterijus: nemokumo tikimybę, nuostolį dėl klientų įsipareigojimų nevykdymo ir paskolos dydį kliento nemokumo atveju. [1] Tarkime, turiu tikimybinę erdvę (Ω; A; P) , čia Ω – elementarių įvykių aibė, A – σ algebra aibė, P – tikimybinis matas. Aibė A yra atsitiktinių įvykių išmatuojama aibė, ir galima teigti, kad nemokumo įvykis yra taip pat išmatuojamas. Tada nuostolio rodiklį galima apibrėžti tokia formule[1]:

$$\acute{L} = EAD \times LGD \times L,$$

čia L= $1_{D,}$ įsipareigojimų neįvykdymas (L=1) arba įsipareigojimų įvykdymas (L=0), o D žymi įvykį, kad klientas taps nemokus konkrečiu laiko momentu. [2] Kadangi klientas gali nustoti mokėti konkrečiu laiko momentu, ir gali nenustoti mokėti, todėl įvykis D yra Bernulio bandymų įvykis. Yra žinoma, jog galimybė įvykti Bernulio įvykui, kaip tarkim, įvykiui D, yra lygi jo tikimybei, todėl galime apibrėžti tikėtiną nuostolį taip[2]:

$$EL = E(\acute{L}) = EAD \times LGD \times P(D) = EAD \times LGD \times PD$$

Tai primityvi tikėtino nuostolio lygtis, tačiau ši lygybė suteikia pagrindinį suvokimą apie tikėtino nuostolio interpretaciją bei iliustruoja aiškų skaitinį apibrėžimą.

6. Nenumatytas nuostolis

(Šis skyrius buvo parašytas remiantis [1] šaltiniu)

Žinant tikėtiną nuostolį, jau galima nuspręsti, ar paskola bus pelninga, ar nuostolinga. Tačiau tikėtinas nuostolis nevisada įvertina visą patirtą nuostolį. Suteikiant paskolą reikia įvertinti situaciją, koks gali būti didžiausias nuostolis blogiausiu įmanomu scenarijumi. Tam reikia sužinoti ir nenumatytą nuostolį (angliškai Unexpected Loss, žym. UL). Žinoma, nenumatyti nuostoliai gali pasireikšti, arba gali ir nepasirodyti konkrečios paskolos grąžinimo laikotarpiu, tačiau vertinant paskolos pelningumą ir sudarinėjant paskolos sąlygas, reikėtų turėti omenyje faktą, kad nenumatyti nuostoliai yra galimi. Šis rodiklis yra vertinamas kaip nuokrypis nuo nuostolio vidurkio, todėl nenumatyto nuostolio apskaičiavimui yra taikoma ši formulė:

$$UL = \sqrt{D(\acute{L})} = \sqrt{D(EAD \cdot SEV \cdot L)}\ .$$

Verta paminėti, kad nenumatytas nuostolis mažėja, kai paskolų skaičius portfelyje didėja, o koreliacija tarp paskolų nemokumo mažėja.[5] Šis nuostolis nėra dažnas, tačiau kai pasireiškia, nenumatytas nuostolis sukelia didelę žalą.

7. Vertės rizikos pokytis

(Šis skyrius buvo parašytas remiantis [1] šaltiniu)

Suteikiant paskolą, bankas turi įsivertinti faktą, kad paskolos metu gaunamos pajamos turi padengti ne tik tikėtiną nuostolį, bet ir nuspėti nenumatyto nuostolio sumą, kad paskola netaptų nuostolinga. Deja, nėra galimybės iš anksto žinoti, kokia, visgi, bus nenumatyto nuostolio suma, ją galima tik įvertinti, tačiau tai nebūtinai reiškia, jog nenumatytas nuostolis neviršys vertinimo. Dėl šios priežasties reikalingų pajamų riba, kad paskola netaptų nuostolinga, taip pat nėra žinoma. Todėl šioje situacijoje naudingiausia yra įsivesti naują charakteristiką, pagal kurią būtų galima įvertinti, ar paskolos pajamos padengs staiga atsiradusius nenumatytus nuostolius. Dažniausiai ši informacija gaunama įvertinus vertės rizikos pokytį (angliškai Value At Risk, žym. VaR). Bankas įsivertina, koks rizikingumo koeficientas jiems yra priimtinas ir pagal tai sprendžia, ar paskola bus patvirtinta. Bankas vis dar nežino tikslios nenumatyto nuostolio sumos, tačiau gali įsivertinti, kokio nenumatyto nuostolio sumą gali priimti, o kuri būtų per daug nuostolinga. Visgi, nenumatyto nuostolio galima išvengti. Tad, kai yra žinomas leistinas paskolų portfelio nuostolio skirstinio kvantilis α, kuris žymi rizikos dydį, tada vertės rizikos pokytis yra apibrėžiamas taip:

$$\mathrm{VaR}_\alpha = \mathrm{q}_\alpha - \mathrm{EL}_\mathrm{p}\ ,$$

čia $\mathrm{q}_\alpha = \inf\{\mathrm{q} > 0 | \mathrm{P}(\acute{\mathrm{L}}_\mathrm{p} \leq \mathrm{q}) \geq \alpha\}$, o EL_p – portfelio tikėtinas nuostolis.

Pavyzdys. Tarkime, bankas laiko, kad priimtinas nuostolio skirstinio kvantilis $\alpha = 99{,}95\%$ yra tinkamas. Tada vertės rizikos pokytis VaR_α rodo, kad paskolos pajamos dengs visus nenumatytus nuostolius 9 995 metų iš 10 000 metų periodo. Aišku, iš kitos pusės pažiūrėjus, ši paskola gali nepadengti 5 - ių metų nenumatytų nuostolių iš 10 000 metų periodo.

Galima pastebėti, kad nuostolio skirstinio kvantilis yra suskirstytas į dvi dalis: į nenumatytą nuostolį ir į tikėtiną nuostolį.[2] Tikėtinas nuostolis priklauso nuo kliento kreditingumo, todėl jis tiesiogiai priklauso nuo teikiamos paskolos. Tačiau nenumatytas nuostolis priklauso nuo finansinio porftelio, į kurį yra paskiriama paskola. Jei portfelis yra sudarytas iš stabilių ir nerizikingų paskolų, vadinasi įvertintas nenumatytas nuostolis bus minimalus dėl kitų paskolų suteikiamo pastovumo, net jei pati paskola gali sukelti didelį nenumatytą nuostolį. Tačiau, jei portfelis yra rizikingas, paskolos yra nestabilios ir jos turi bendras nemokumą sukeliančias sąlygas, tuomet nenumatytas nuostolis konkrečiai paskolai gali būti priskirtas didesnis, net jei pati paskola nesukelia ženklaus nenumatyto nuostolio.

II. Informacija paskolų portfelio vertinimui

1. Paskolų portfelio tikėtinas ir nenumatytas nuostoliai

(Šis skyrius buvo parašytas remiantis [1] šaltiniu)

Anksčiau pateikti skaičiavimo nurodymai yra taikomi situacijose, kai reikia įvertinti vieną konkrečią paskolą. Tačiau dažnu atveju yra vertinamos ne tik individualios paskolos, ar jų rodikliai. Iš paskolų visumos yra sudaromos atitinkamos paskolų grupės, vadinamos portfeliais, kurios vėliau būna vertinamos. Be to, dažna situacija būna tokia, kad tikėtino nuostolio ir nenumatyto nuostolio vertinimas vyksta portfelio lygmenyje – retai yra vertinama individualių paskolų tikėtini ir nenumatyti nuostoliai. Todėl yra reikalinga apibrėžti paskolų portfelio tikėtino ir nenumatyto nuostolių skaičiavimo formules. Tarkime, kad konkretų portfelį sudaro n skirtingų paskolų su joms priskirtomis charakteristikomis.

Teiginys. Paskolų portfelio nuostolis yra apskaičiuojamas pagal šią formulę:

$$\acute{L}_p = \sum_{i=1}^{n} \acute{L}_i = \sum_{i=1}^{n} EAD_i \cdot LGD_i \cdot L_i \ .$$

Teiginys. [2] Tikėtinas nuostolis portfelio vertinimo atveju yra apibrėžiamas taip:

$$EL_p = E(\acute{L}_p) = \sum_{i=1}^{n} E(\acute{L}_i) = \sum_{i=1}^{n} EAD_i \cdot LGD_i \cdot PD_i \ ,$$

čia $\acute{L}_p$ – finansinio porftelio nuostolis; n – paskolų skaičius portfelyje; $\acute{L}_i$ yra i-tosios paskolos nuostolis; EAD_i yra i-tosios paskolos dydis nemokumo atveju; LGD_i tai i-tosios paskolos nuostolis dėl klientų įsipareigojimų neįvykdymo; L_i tai i-tosios paskolos įsipareigojimų neįvykdymas (L_i = 1) arba įvykdymas (L_i = 0); EL_p – finansinio portfelio tikėtinas nuostolis; PD_i tai i-tosios paskolos nemokumo tikimybė; E(X) – atsitiktinio dydžio X vidurkis.

Kadangi portfelio tikėtiną nuostolį sudaro atskirų paskolų tikėtinų nuostolių suma, todėl ir koreliacijos žinojimas nėra svarbus. Jei vienos paskolos nemokumo buvimas priartina kitą paskolą prie galimybės tapti nemokia, portfelio tikėtinas nuostolis nesikeičia, kadangi tikėtini nuostoliai yra vertinami individualiai, ir vėliau yra paskaičiuojama atskirų tikėtinų nuostolių bendra suma, t.y. $E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = EX_1 + EX_2 + \cdots + EX_n$ bet kokiems atsitiktiniams dydžiams X_i .

Teiginys. Nenumatytas nuostolis portfelio vertinimo atveju yra apibrėžiamas taip:

$$UL_p = \sqrt{D(\acute{L}_p)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} EAD_i \cdot EAD_j \cdot cov(SEV_i \cdot L_i \ , \ SEV_j \cdot L_j)} \ .$$

Atskiru atveju, kai SEV yra konstantos, ir yra žinomos portfelį sudarančių paskolų LGD_i, tuomet nenumatytas nuostolis gali būti išreikštas ir kitaip.

Teiginys. Jei portfelio sudarančių paskolų nuostoliai SEV yra konstantos, nenumatytą nuostolį galima išreikšti tokia formule:

$$UL_p^2 = \sum_{i,j=1}^{n} EAD_i \cdot EAD_j \cdot LGD_i \cdot LGD_j \cdot \sqrt{PD_i \cdot (1 - PD_i) \cdot DP_j \cdot (1 - PD_j)} \cdot \rho_{ij} \ ,$$

čia $\rho_{ij} = corr(1_{D_i}; 1_{D_j})$ apibrėžia nemokumo koreliavimą tarp *i* ir *j* paskolų.

Įrodymas. Iš dispersijos ir koreliacijos apibrėžimų turime:

$$UL_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} EAD_i \cdot EAD_j \cdot cov\big(SEV_i \cdot L_i\,,\, SEV_j \cdot L_j\big)} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} EAD_i \cdot EAD_j \cdot \sqrt{D(SEV_i \cdot L_i)} \cdot \sqrt{D(SEV_j \cdot L_j)} \cdot \rho_{ij}}$$

Abi lygybės puses pakėlus kvadratu, turimą formulę galima perrašyti tokiu būdu:

$$UL_p^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} EAD_i \cdot EAD_j \cdot \sqrt{D(SEV_i \cdot L_i)} \cdot \sqrt{D(SEV_j \cdot L_j)} \cdot \rho_{ij} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} EAD_i \cdot EAD_j \cdot LGD_i \cdot LGD_j \cdot \sqrt{D(L_i) \cdot D(L_j)} \cdot \rho_{ij}$$

Pasinaudoję faktu, kad $D(L) = PD(1 - PD)$, yra gaunamas teiginio įrodymas. □

Kad būtų lengviau suprasti nenumatyto nuostolio interpretaciją, reikia suprasti koreliacijos įtaką šiam nuostoliui. Sakykime, turimas portfelis yra sudarytas iš dviejų paskolų, ir yra žinoma, kad LGD=100%, EAD=1, $p_i = PD_i$, o turimoms L_i, čia i=1,2 yra apibrėžta koreliacija $\rho = corr(L_1, L_2)$. [1] Tada turime, kad

$$UL_p^2 = p_1(1 - p_1) + p_2(1 - p_2) + 2\rho\sqrt{p_1(1 - p_1)p_2(1 - p_2)}\,.$$

Nagrinėjant koreliaciją ρ, galima išskirti tris scenarijus[1]:

1. Kai $\rho = 0$, sakoma, kad yra tobula diversifikacija. Tai reiškia, kad, kaip yra nurodyta [2] šaltinyje: „Paskolų portfelio rizika labai maža, nes mažai tikėtina, kad, esant, nulinei paskolų rizikos koreliacijai, dvi ar daugiau paskolų portfelį sudarančių paskolų būtų negrąžintos vienu metu.“
2. Kai $\rho > 0$, vadinasi šių dviejų paskolų nemokumas yra tarpusavyje susijęs – vienos paskolos klientui tapus nemokiu, padidėja tikimybė, kad ir antros paskolos klientas taps nemokus. Atskiru atveju, kai $\rho = 1$, sakoma, kad yra tobula koreliacija. [1] Tobulos koreliacijos atveju, vienam iš klientų tapus nemokiu, tikimybė, kad ir antras klientas taps nemokiu, artėja prie 1. [1]
3. Kai $\rho < 0$, yra sudaroma situacija, kad vienam klientui tapus nemokiu, kito kliento nemokumo tikimybė sumažėja. [2] Atskiru atveju, kai $\rho = -1$, tai reiškia, kad vieno kliento nemokumo atveju, kitas klientas būtinai grąžins paskolą. [2] Šis atvejis yra vadinamas idealaus apsidraudimo atveju. [2]

Teiginys. Tarkime, kad atsitiktinis dydis SEV ir nemokumo įvykis D yra nepriklausomi. Tada nenumatytą nuostolį galima užrašyti tokia formule:

$$UL = EAD \cdot \sqrt{D(SEV) \cdot DP + LGD^2 \cdot DP \cdot (1 - DP)}\,.$$

Įrodymas. Pagal UL apibrėžimą turime, kad:

$$UL = \sqrt{D(EAD \cdot SEV \cdot L) = [\,\mathrm{L} = 1_D]} =$$

$$= \sqrt{D(EAD \cdot 1_D) \cdot D(SEV) + D(EAD \cdot 1_D) \cdot M^2(SEV) + D(SEV) \cdot M^2(EAD \cdot 1_D)} = \text{[EAD yra konstanta]} =$$

$$= \sqrt{EAD^2 \cdot D(1_D) \cdot D(SEV) + EAD^2 \cdot D(1_D) \cdot M^2(SEV) + D(SEV) \cdot EAD^2 \cdot E^2(1_D)} = \begin{bmatrix} D(1_D) = PD(1 - PD) \\ M(SER) = LGD \end{bmatrix} =$$

$=EAD \cdot \sqrt{DP(1-PD) \cdot D(SEV) + PD(1-PD) \cdot LGD^2 + D(SEV) \cdot E^2(1_D)} = [E(1_D) = PD] =$

$= EAD \cdot \sqrt{PD(1-PD) \cdot D(SEV) + PD(1-DD) \cdot LGD^2 + D(SEV) \cdot PD^2} =$

$= EAD \cdot \sqrt{PD \cdot D(SEV) + PD(1-PD) \cdot LGD^2}$ □

2. Nuostolio pasiskirstymo funkcija. Monte Carlo modelis

(Šis skyrius buvo parašytas remiantis [1] šaltiniu)

Suteikiant paskolą, bankui yra svarbu teisingai įvertinti galimą nuostolį suteikiamos paskolos atžvilgiu. Sprendžiant paskolos patvirtinimo aspektą, jo nuostolis yra vertinamas ne tik individualiai, bet ir paskolų portfelio lygmenyje, todėl nenuostabu, kad esminis kintamasis portfelio vertinimo teorijoje yra portfelio nuostolis $Ĺ_p$. Informacija, koks nuostolis yra labiausiai tikėtinas, suteikia galimybę sudaryti atitinkamas sutarties sąlygas su klientu, kad būtų išvengta didelio nuostolio. Dėl šios priežasties yra labai svarbu teisingai nustatyti nuostolio pasiskirstymo funkciją. Paprasčiausias metodas nustatyti nuostolių dėl kliento įsipareigojimų nevykdymo pasiskirstymo funkciją yra vertinti empirinį pasiskirstymą.[3] Vienas dažniausiai naudojų metodų yra Monte Carlo metodas, kurio taikymas skaičiavimų aspektu yra sąlyginai paprastas ir lengvai suprantamas[2].

Šis metodas yra paremtas tuo, kad yra įvertinamas modeliuojamų nuostolių pasirodymo dažnumas, tuomet nuostoliai su jų žinomais dažniais yra grafiškai pavaizduojami histograma ir tokiu būdu yra gaunamas empirinis nuostolio pasiskirstymas. Tarkime, turime n potencialių portfelio nuostolių, sudarytų atsižvelgiant į portfelio paskolų sukeliamus individualius nuostolius ir įvertinus jų pasiskirstymo funkcijas ir koreliacijas. Potencialius portfelio nuostolius pažymėsiu taip: $Ĺ_p^1$, $Ĺ_p^2$, $Ĺ_p^2$, ... , $Ĺ_p^n$. Tada empirinę portfelio nuostolio pasiskirstymo funkciją galima užrašyti taip:

$$F(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{[0,x]} \cdot Ĺ_p^j \ .$$

Turint įvertintus galimus nuostolius su jų dažniais, galima apibrėžti vertės rizikos pokytį. Visiems galimiems įgyti n portfelio nuostoliams suteikiame eiliškumą pagal reikšmę – šiuos rodiklius sudėliojame taip, kad būtų tenkinama ši sąlyga:

$$Ĺ_p^{i_1} \le Ĺ_p^{i_2} \le Ĺ_p^{i_3} \le \ldots \le Ĺ_p^{i_n} \ .$$

Tada leistinas rizikos dydis q_α gali būti apibrėžiamas taip:

$$q_\alpha = \begin{cases} \alpha Ĺ_p^{i_{[n\alpha]}} + (1-\alpha) Ĺ_p^{i_{[n\alpha]+1}}, jei\ n\alpha \in N \\ Ĺ_p^{i_{[n\alpha]}} \qquad\qquad\qquad\qquad , jei\ n\alpha \notin N \end{cases} ,$$

čia $[n\alpha] = min\ \{k \in \{1,2,\ldots,n\} | \, n\alpha \le k\}$.

Kai yra apskaičiuotas leistinas rizikos dydis, galima apibrėžti vertės rizikos pokytį, kurio skaitinė išraiška būtų tokia:

$$VaR_\alpha = q_\alpha - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Ĺ_p^j \ .$$

3. Tolydžios nuostolių pasiskirstymo funkcijos sudarymas

(Šis skyrius buvo parašytas remiantis [1] šaltiniu)

Šis nuostolio pasiskirstymo funkcijos sudarymas remiasi tokia idėja, kad jei portfelių pagrindinės charakteristikos, pavyzdžiui, vidurkis ir dispersija, sutampa, vadinasi ir pasiskirstymo funkcijos skirsis ne daug. Turint portfelį, kurį norima įvertinti, žinant jo vidurkį ir dispersiją, bei paėmus visus žinomus portfelius ir suradus artimiausio vidurkio ir artimiausios dispersijos portfelį su žinoma nuostolio pasiskirstymo funkcija, galima apibrėžti ir pirmojo porftelio pasiskirstymo funkciją.

Tarkime, turime portfelį, kurio tikėtinas nuostolis yra 5^{-3}, o nenumatytas nuostolis $2{,}3^{-3}$ su vidutinio stiprumo koreliacija. Taip pat, tarkime, kad šio portfelio nuostolio pasiskirstymo funkcija priklauso nuo dviejų parametrų. Turint tokią informaciją, galime apibrėžti kito portfelio pasiskirstymo funkciją. Kadangi yra daroma prielaida, kad nuostolio pasiskirstymo funkcija yra beta skirstinys [2], todėl šioje situacijoje bus ieškoma tokia pasiskirstymo funkcija su beta skirstiniu, kad jos parametrai sutaptų su pirmojo portfelio parametrais. Kitaip sakant, bus ieškomas toks atsitiktinis dydis $X \sim \beta(a,b)$, apibrėžiantis procentinį portfelio nuostolį, kad parametrai a ir b tenkintų šias sąlygas:

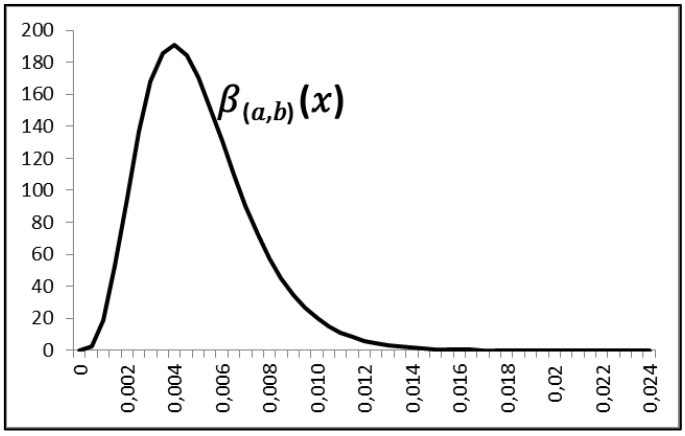
$$0{,}005 = M(X) = \frac{a}{a+b} \;\; ir \;\; 0{,}0023^2 = D(X) = \frac{ab}{(a+b)^2 \cdot (a+b+1)} \; .$$

Kadangi yra žinoma beta skirstinio tankio funkcija:

$$\beta_{a,b}(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, čia \; x \in [0;1] \; .$$

Todėl, suradus parametrus, tenkinančius aukščiau paminėtas lygtis, šiuo atveju, parametrai yra tokie: $a \approx 4{,}6973$ ir $b \approx 934{,}763$, yra gaunama antrojo portfelio nuostolio pasiskirstymo funkcija.

Pav. 1



Šis metodas gali būti labai naudingas turint sudarytą histogramą Monte Carlo metodu, kurio metu yra žinomas pasiskirstymo funkcijos elgesys - didėjimo ir mažėjimo invervalai. Tuomet įvertinus turimos histogramos esmines charakteristikas galima surasti pasiskirstymo funkciją, kuri ne tik elgtųsi atitinkamai sukurtos histogramos pasiskirstymui, bet ir turėtų tokius pačius rodiklius, pavyzdžiui, vidurkį ir dispersiją.

III. Paskolų portfelio LGD pasiskirstymo funkcijos modeliavimas

1. Paskolų portfelio bendra informacija

Šiame darbe yra naudojami realūs duomenys, kurie dėl konfidencialumo yra užšifruoti.

Skaičiavimams naudotas paskolų portfelis yra sudarytas iš 2655 paskolų, kurios buvo apibrėžtos kaip skolos dėl klientų įsipareigojimų nevykdymo. Lentelėje nr. 1 yra pateikiama informacija, kokios paskolos sudaro minimą portfelį. Akivaizdu, kad kreditinių kortelių paskolos, kitaip vadinamos kaip kredito kortelės, sudaro portfelio pagrindą, nors vartojamų paskolų vertė, tenkanti vienai paskolai, yra sąlyginai didesnė.

Lentelė 1

Paskolos tipas	Paskolų skaičius	Skolos pradinis dydis	Tikrasis nuostolis
Kredito kortelės	78,15%	53,16%	56,70%
Vartojamos paskolos	21,69%	46,64%	43,09%
Kiti	0,15%	0,20%	0,21%
Iš viso:	**100,00%**	**100,00%**	**100,00%**

Žinoma, vertinant porftelio nuostolį, yra svarbu pastebėti, kokie skolų dydžiai sudaro minimą paskolų portfelį. Kaip lentelė nr. 2 rodo, skolos nėra sąlyginai didelės, kadangi, pagrindinis skolų dydžio pasiskirstymas yra iki 3,5tūkst.

Lentelė 2 – Skolų dydis yra vertinamas piniginiais vienetais

Skolų dydžiai	Paskolų skaičius	Paskolų skaičius (%)	Skolos suma
1. Mažiau negu 900	684	26%	397087
2. 0,9 tūkst. - 1,8 tūkst.	691	26%	912189
3. 1,8 tūkst. - 3,5 tūkst.	639	24%	1629744
4. Daugiau negu 3,5 tūkst.	641	24%	3937387
Iš viso:	**2655**	**100%**	**6876407**

Šio apibrėžto portfelio nuostolių dėl klientų įsipareigojimo nevykdymo pasiskirstymo funkcija bus modeliuojama tokiu būdu: naudojantis Monte Carlo metodu bus sudaroma histograma, kuri iliustruos nuostolių dėl įsipareigojimų nevykdymo pasiskirstymo funkcijos elgesį. Turint histogramą ir jos suteiktą informaciją apie funkcijos savybes, tokias kaip pasiskirstymo funkcijos didėjimo ir mažėjimo intervalus, maksimumo tašką, augimo ir kritimo staigumą, bus ieškomas žinomas skirstinys, kuris turėtų tokią pat elgseną. Yra daroma prielaida, kad tinkamas skirstinys bus beta skirstinys. Modeliavimo metu bus vertinama, ar beta skirstinys atitinka histogramos pateikiamus duomenis ir tuo pat metu, ar atitinka nuostolių dėl klientų įsipareigojimų nevykdymo pasiskirstymo funkciją.

2. Paskolų portfelio poaibio sudarymas

Norint pasinaudoti Monte Carlo metodu, buvo nuspręsta sudaryti aibę, kurioje būtų įtraukti visi įmanomi porftelio nuostoliai. Portfelis suteikė informacijos, kokia buvo fiksuota skolos suma, ir kokia tos skolos suma buvo susigrąžinta. Vadinasi, buvo tiksliai žinoma, kiek kiekviena paskola yra nuostolinga, ir verta paminėti, kad portfelyje nebuvo tokių paskolų, kurios sukeltų vienodą nuostolį. Tačiau, sudarinėjant multiaibę, buvo daroma prielaida, kad yra nežinoma, kurios skolos buvo pilnai padengtos, o kurios nebuvo. Kitaip sakant,

skola galėjo būti lygi nuliui, arba skola galėjo būti lygi fiksuotam nuostoliui, kurį konkreti paskola iš tiesų ir sukėlė. Turint šią prielaidą, buvo bandoma sudaryti visas įmanomas kombinacijas tarp skolų, t.y. įvertinti, koks bus nuostolis, jei tik viena kuri nors skola buvo nuostolinga, jei dvi kurios nors skolos bus nuostolingos ir t.t. Multiaibė turėjo būti sudaryta iš tiek narių:

$$N = C_{2655}^{1} + C_{2655}^{2} + C_{2655}^{3} + \cdots + C_{2655}^{2655}$$

Sudaryti tokią didelę multiaibę buvo per sunku, kadangi narių skaičius viršijo 345mln., todėl buvo nuspręsta iš portfelio paskolų aibės išskirti panašių charakteristikų poaibį. Žinoma, poaibio dydis turėjo būti patikimas, kadangi turint poaibį, tarkim, iš 20 skolų, yra didelė tikimybė gauti prastą atitiktį su portfeliu, net jei tokio poaibio sudėtis procentaliai būtų tokia pati kaip portfelio aibės. Atrinktas poaibis sudarė 10% visos aibės. Poaibis turėjo būti atsitiktinai atrinktas, todėl naudojant Microsoft Excel RAND funkcija kiekvienai paskolai buvo priskirtas atsitiktinis skaičius iš intervalo [0; 1]. Tada, pagal šiuos atsitiktinai priskirtus skaičius paskolos buvo sudėliotos didėjimo tvarka. Tokiu būdu buvo gautas atsitiktinai sudėliotų paskolų sąrašas, ir buvo paimtos 269 paskolos. Lentelėje nr. 3 yra parodytas šio poaibio atitikimas su portfelio aibe lyginant skolų grupes. Pagal pateiktą informaciją yra akivaizdu, kad skirtumas tarp aibės ir poaibio yra mažesnis už 0,5% nurodytose skolų grupėse. Lyginant atitiktį yra svarbu sudaryti tokias grupes, kad atitikimas būtų tiksliai įvertinamas, todėl sudarinėjant grupių pjūvius didelis dėmesys buvo skirtas faktui, koks yra grupių procentinis svoris. Tikslas buvo pasirinkti tokius grupių pjūvius, kad jų pasiskirstymas būtų tolygus. Šis kriterijus yra matomas iš procentinio paskolų skaičiaus.

Lentelė 3 - Skolų dydis yra vertinamas piniginiais vienetais

Skolų dydžiai	Paskolos	Paskolos (%)	Skolos	Atitikimas			Skolų dydžiai	Paskolos	Paskolos (%)	Skolos
1. Mažiau negu 900	684	26%	397087	0%	0%	0%	1. Mažiau negu 900	69	26%	41071
2. 0,9 tūkst. - 1,8 tūkst.	691	26%	912189	0%	0%	0%	2. 0,9 tūkst. - 1,8 tūkst.	71	26%	95039
3. 1,8 tūkst. - 3,5 tūkst.	639	24%	1629744	0%	0%	0%	3. 1,8 tūkst. - 3,5 tūkst.	64	24%	166894
4. Daugiau negu 3,5 tūkst.	641	24%	3937387	0%	0%	0%	4. Daugiau negu 3,5 tūkst.	65	24%	394120
Iš viso:	**2655**	**100%**	**6876407**	10%	100%	10%	**Iš viso:**	**269**	**100%**	**697124**

Tačiau kad poaibio atitiktis būtų tiksli, neužtenka gero atitikimo tik skolų lygmenyje. Nuostolių dėl klientų įsipareigojimų nevykdymo pasiskirstymo funkcija priklauso ne tik nuo skolos dydžio, bet svarbus argumentas yra ir galutinis nuostolis, kurį sukelia konkreti paskola. Juk turint didelę skolą, nebūtinai nuostolis bus didelis, nes gali susiklostyti tokia situacija, kad skola bus padengta dėl sutartyje nurodytų paskolos apsaugų. Todėl poaibio įvertinimui buvo sudaryta dar viena grupė, kurioje skolos buvo suskirstytos pagal jų turimą rodiklį, iliustruojantį nuostolį dėl įsipareigojimų nevykdymo. Lentelė nr. 4 vaizduoja minimų grupių suskirstymą ir jų pasiskirstymą tiek portfelio aibėje, tiek atrinktame skolų poaibyje. Sudarytose nuostolio grupėse, kaip ir skolų vertės grupėse, paklaida neviršija 0,5%. Šie du faktai suteikia stiprų pasitikėjimą, kad šis atrinktas poaibis elgtis labai panašiai kaip pagrindinė portfelio aibė.

Lentelė 4 - Nuostolių dydis yra vertinamas piniginiais vienetais

LGD	Paskolos	Paskolos (%)	Nuostolis	Atitikimas			LGD	Paskolos	Paskolos (%)	Nuostolis
1. 0,0-0,65	741	28%	583008	0%	0%	0%	1. 0,0-0,65	75	28%	59382
2. 0,65-0,85	736	28%	1291405	0%	0%	0%	2. 0,65-0,85	74	28%	129830
3. 0,85-0,95	704	27%	1891401	0%	0%	0%	3. 0,85-0,95	71	26%	197903
4. 0,95-1,0	474	18%	1668284	0%	0%	0%	4. 0,95-1,0	49	18%	161427
Iš viso:	**2655**	**100%**	**5434099**	10%	100%	10%	**Iš viso:**	**269**	**100%**	**548542**

3. LGD pasiskirstymo funkcijos modeliavimas

Nuostolio dėl klientų įsipareigojimo nevykdymo pasiskirstymo funkcijos skaičiavimui buvo pasirinkta Microsoft Excel programa dėl jos galimybių talpinti didelį informacijos kiekį ir dėl įvairių matematinių funkcijų palaikymo. Išskyrus mažesnį poaibį, kurio elgsena bus panaši kaip viso paskolų portfelio, galima buvo sudaryti multiaibę su visais įmanomais porftelio nuostoliais. Skaičiavimo pradžia buvo tokia, kad reikėjo sugalvoti skaičiavimų eigą optimaliam visų įmanomų nuostolių sudarymui. Todėl pirmas žingsnis buvo Microsoft Excel programoje iš paskolų nuostolių sudaryti matriciją A:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{269} \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{269} & 0 \\ a_3 & a_4 & \cdots & a_{269} & 0 & 0 \\ a_4 & \dots & a_{269} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ a_{269} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{čia } a_i \text{ yra } i - \text{tos paskolos nuostolis.}$$

Tuomet po šia matrica lygiagrečiai buvo sudaryta naują skaičių matricą, kurios stulpelių skaičius sutapo su A matricos skaičiumi ir kuri turėjo virš 35 tūkst. eilučių. Šalia naujos matricos, lygiagrečiai jos eilutėms, buvo sudaryti du stulpeliai, kurie suteikė informaciją, kokius Microsoft Excel puslapio langelius naudoti skaičiavimuose, ir tuo pačiu, kuriuos skaičius konkrečiu atveju imti iš turimos A matricos. Kadangi matricos A pirmoji eilutė buvo naudojama visose eilutėse, todėl pirmame stulpelyje seka prasidėjo nuo 2-ojo skaičiaus. Pirmo stulpelio skaičių seka buvo sudaryta tokiu būdu: skaičius 2 buvo parašytas 267 kartus, skaičius 3 buvo parašytas 266 kartus, skaičius n buvo parašytas n-2 kartus. Antras stulpelis buvo pildytas kitu būdu: surašyti skaičiai nuo 3 iki 269, tada surašyti skaičiai nuo 4 iki 269 ir skaičiai nuo n iki 269, kol buvo teisinga lygybė n=269-1. Pati matrica buvo užpildyta Microsoft Excel programoje veikiančia formule:

$$= \text{IFERROR}(\text{C\$2} + \text{SUM}(\text{INDIRECT}(\text{ADDRESS}(3; \text{C\$1})) : \text{INDIRECT}(\text{ADDRESS}(\text{\$A793}; \text{C\$1}))) \\ + \text{SUM}(\text{INDIRECT}(\text{ADDRESS}(\text{\$B793}; \text{C\$1})) : \text{INDIRECT}(\text{ADDRESS}(\text{\$B793}; \text{C\$1}))); 0)$$

Čia C$2 – matricos A pirmos eilutės atitinkamas narys;

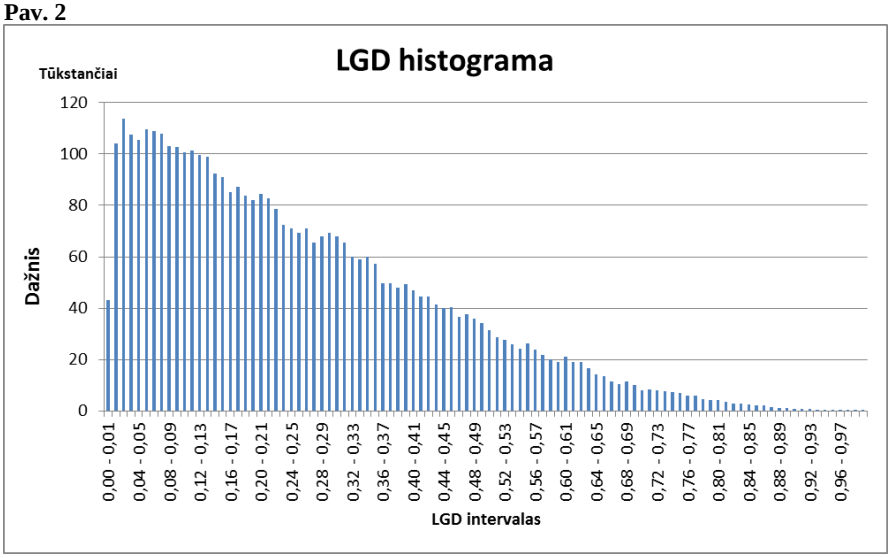
INDIRECT(ADDRESS(3;C$1) – nurodo matricos A antros eilutės narį;

INDIRECT(ADDRESS($A793;C$1) – nurodo kintamą narį, iki kurio visi nariai nuo matricos A aukščiau nurodytos eilutės yra sumuojami, jis apibrėžiamas pagal pirmąjį stulpelį;

SUM(INDIRECT(ADDRESS($B793;C$1)):INDIRECT(ADDRESS($B793;C$1) – nurodo kintamąjį narį, kuris kinta pagal antrąjį stulpelį.

Pasirinkus norimą nuostolio dėl įsipareigojimų nevykdymo intervalo ilgį, šiuo atveju 0,01, buvo paskaičiuota, kokie turi būti nuostoliai intervalų kraštuose. Tuomet atsižvelgus į intervalų kraštines ribas, sugeneruoti nuostoliai buvo priskirti į atitinkamus intervalus (žr. Priedas 1). Turimų intervalų narių skaičius buvo traktuotas kaip intervalo dažnis ir pagal šią informaciją buvo sudaryta nuostolių dėl įsipareigojimų nevykdymo histograma (žr. Pav. 2).

Pav. 2



Kitas žingsnis buvo nustatyti, ar beta skirstinys β(a,b) yra tinkamas turimai histogramai įvertinti. Šis skirstinys turėjo atitikti pagrindines histogramos charakteristikas – vidurkį ir dispersiją. Paskaičiavus multiaibės nuostolių dėl įsipareigojimų nevykdymo vidurkį ir dispersiją, buvo gauta, kad EX ≈ 0,2569, o DX ≈ 0,0368. Turint šiuos rodiklius buvo galima įvertinti beta skirstinio β(a,b) parametrus a ir b. Šie parametrai turėjo tenkinti šią sąlygą: $a, b > 0$. Kadangi yra žinomos beta skirstinio vidurkio ir dispersijos išraiškos per parametrus, todėl, išsprendus iš žemiau nurodytų lygčių sudarytą lygčių sistemą, buvo gauti a ir b parametrai:

$$0{,}2569 = \mathrm{E(X)} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a+b}} \text{ ir } 0{,}0368 = \mathrm{D(X)} = \frac{\mathrm{ab}}{(\mathrm{a+b})^2 \cdot (\mathrm{a+b+1})}$$

Sprendimas:

$$\begin{cases} \mathrm{E(X)} = \dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{a+b}} \\ \mathrm{D(X)} = \dfrac{\mathrm{ab}}{(\mathrm{a+b})^2 \cdot (\mathrm{a+b+1})} \end{cases} => \begin{cases} E(X) \cdot (a+b) = a \\ \mathrm{D(X)} = \dfrac{\mathrm{ab}}{(\mathrm{a+b})^2 \cdot (\mathrm{a+b+1})} \end{cases} =>$$

$$\begin{cases} b = \dfrac{1-M(X)}{M(X)} \cdot a \\ \mathrm{D(X)} = \dfrac{\mathrm{ab}}{(\mathrm{a+b})^2 \cdot (\mathrm{a+b+1})} \end{cases} => \left[C = \frac{1-M(X)}{M(X)}\right] => \begin{cases} b = Ca \\ D(X) = \dfrac{Ca^2}{(a+Ca)^2 \cdot (a+Ca+1)} \end{cases} =>$$

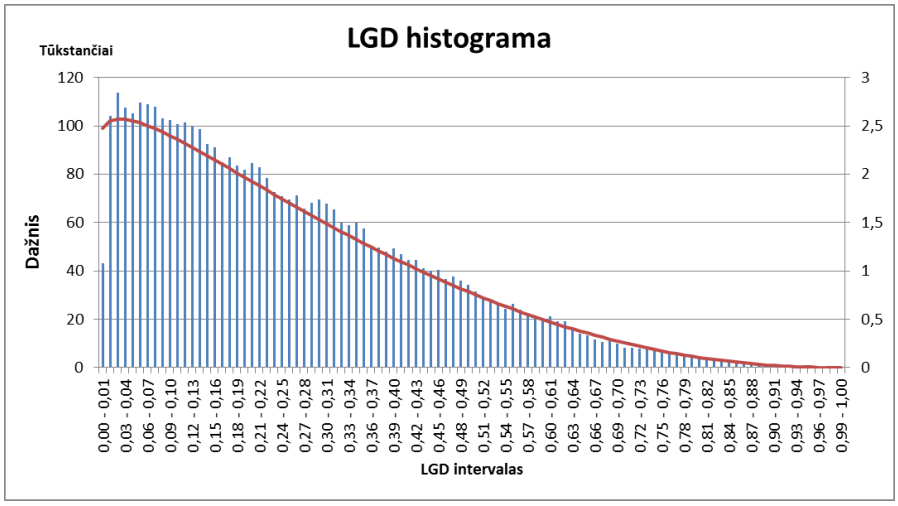
$$\begin{cases} b = Ca \\ D(X) = \dfrac{C}{(1+2C+C^2) \cdot (a+Ca+1)} \end{cases} => \begin{cases} b = Ca \\ D(X)(C^3a + 3C^2a + C^2 + 3Ca + 2C + a + 1) = C \end{cases} =>$$

$$\begin{cases} b = Ca \\ D(X)(C^3a + 3C^2a + 3Ca + a) = C - D(X) \cdot (C^2 + 2C + 1) \end{cases} => \begin{cases} b = Ca \\ a = \dfrac{C - D(X) \cdot (C^2 + 2C + 1)}{D(X)(C^3 + 3C^2 + 3C + 1)} \end{cases} =>$$

$$\begin{bmatrix} M(X) = 0{,}2569 \\ D(X) = 0{,}0368 \\ C = \dfrac{1-0{,}2569}{0{,}2569} \approx 2{,}8925 \end{bmatrix} => \begin{matrix} \mathrm{a} \approx 1{,}0758 \\ \mathrm{b} \approx 3{,}1118 \end{matrix}.$$

Turint beta skirstinio parametrus, kiekvienam intervalui buvo paskaičiuota beta skirstinio reikšmė. Kadangi intervale, kurio ilgis yra 0,01 yra be galo daug skaičių mažesnių už 1, todėl, kad būtų išlaikytas pastovus atstumas tarp skaičiuojamų beta skirstinio taškų, buvo pasirinkta imti kiekvieno intervalo dešinę ribą (žr. Priedas 2). Paskaičiavus beta skirstinio reikšmes kiekvienam intervalui, jos buvo atidėtos turimoje histogramoje. Tokiu būdu buvo gautas beta skirstinio grafikas ir buvo galima įvertinti, ar šis beta skirstinys su turimais parametrais atitinka turimą histogramą. Pav. 3 iliustruoja, kaip beta skirstinys β(1,07;3,11) atitinka nuostolių dėl klientų įsipareigojimų nevykdymo histogramą. Galima pastebėti, kad atitikimas yra stiprus.

Pav. 3



Iš Lentelės nr. 3 yra žinoma, kad poaibio skolų suma yra 697 124, o iš lentelės nr. 4 yra matoma, kad poaibio nuostolis yra 548 542. Turint šią informaciją, galima paskaičiuoti tikrąjį poaibio nuostolį dėl įsipareigojimų nevykdymo, kuris yra toks:

$$LGD_{poaibis} = \frac{548542}{697124} \approx 0{,}787 \ .$$

Žinant, kad visų imanomų nuostolių poaibis buvo sudarytas iš 4 121 179 galimų įgyti nuostolių, ir pasinaudojus Priedas nr. 1 lentelėje pateikiama informacija, galima įvertinti, kokia buvo tikimybė, kad turimas poaibis sukels tokį nuostolį, kokį ir sukėlė:

$$P(0{,}78 < X \leq 0{,}79) = \frac{4760}{4121179} \approx 0{,}0012 \ .$$

Kadangi poaibis buvo sudarytas su panašiomis charakteristikomis ir su tokiu pačiu pasiskirstymu tarp nuostolio ir skolų grupių, todėl galima teigti, kad paskolų portfelio turimas tikras nuostolis taip pat buvo su tikimybe 0,0012. Be to, galima įvertinti, koks yra turimo poaibio tikėtinas nuostolis:

$$EL_{poaibis} = E\left(\acute{L}_{poaibis}\right) \approx 179\ 110$$

Ir koks yra šio poaibio nenumatytas nuostolis:

$$UL_p = \sqrt{D(\acute{L}_p)} = \sqrt{17\,907\,547\,166{,}32} \approx 133\,819$$

Jei nebūtų žinoma, koks buvo tikrasis poaibio nuostolis, ir bankas būtų vertinęs tikėtiną ir nenumatytą nuostolį, kad įvertintų riziką, jis tikėtųsi, kad nuostolis bus nedidesnis už 179 110+133 819=312 929. Tikimybė, kad nuostolis būtų buvęs didesnis už 312 929 yra:

$$P(X \geq 0{,}45) = \frac{1}{4121179}\sum_{46}^{100} intervalo\ dažnis = \frac{677506}{4121179} \approx 0{,}1644\ ,$$

čia intervalo dažniai sumuojami Iš Priedas nr. 1 lentelės pagal nurodytą numerį.

Išvados

Nuostolis, įvykęs dėl klientų įsipareigojimų nevykdymo, yra vienas svarbiausių paskolos rizikos vertinimo charakteristikų. Juk žinojimas, ar klientas bus mokus visą paskolos periodą, ar ne, yra kritiška paskolos įvertinimui, sąlygų sudarymui. Tačiau jį nustatyti yra sudėtinga užduotis, kadangi nuostolio įvykimas priklauso nuo daugelio faktorių, iš kurių nevisus galima įvertinti. Netgi nustačius klientų nemokumo tikimybes, apskaičiavus tikėtinus ir nenumatytus nuostolius, pareikalavus pateikti užstatą ar kitas paskolos apsaugos priemones, turimas paskolų portfelis vis tiek gali tapti nuostolingu.

Skaičiavimų metu buvo parodyta, kad paskolų portfelio nuostolių dėl įsipareigojimų nevykdymo pasiskirstymo funkcija yra beta skirstinys su parametrais a ir b. Jei išsprendus lygčių sistemą būtų gavęsi, kad parametrai $a < 0$ arba $b < 0$, tai būtų buvęs įrodymas, kad sudaryta pasiskirstymo funkcijos histograma neatitinka beta skirstinio, ir dėl šios priežasties nuostolių dėl įsipareigojimų nevykdymo pasiskirstymo funkcijos nebūtų buvę galima vertinti kaip beta skirstinio.

Skaičiavimai buvo paremti tikru, o ne numanomu paskolų portfeliu. Šių skaičiavimų eigoje buvo parodyta, kad įvykęs nuostolis turėjo mažą tikimybę įvykti. Šis faktas leidžia suprasti, kad įvertinti paskolos ir paskolų portfelio nuostolį yra sudėtingas procesas. Tačiau tikrasis iššūkis yra nuspręsti, kokią sumą, nelygią visų paskolų sumai, reikėtų turėti atsargoje, kad būtų galima išvengti nuostolio.

Summary

The author of Bachelor thesis: Gabija Gumbakytė

The title of the Bachelor thesis: Mathematical modeling of loss given default

As the people are willing to take more loans for their individual use, the banks have to estimate the loan conditions more carefully. The level of consumptions is growing rapidly and not all people are evaluating their financial ability to pay the loan. That is why a lot of loans are not being returned and the banks are facing great loss over the time. To tackle this particular problem, banks have to evaluate their client‘s creditworthiness now, more careful then ever. And the main object regarding this evaluation is loss given default. The importance of knowing what loss given default can be for a particular loan is almost crucial, therefore, this paper introduced the main knowledge of what loss given default is.

The first part of the paper presents the main information about all the necessary concepts used in the theory of loan evaluation. This part includes the information and definitions of these main characteristics: the probability of default, exposure at default, loss given default, expected loss, unexpected loss and value at risk. Of course, there are some other definitions that are used as an addition to the main objects, but are as important as the definitions mentioned before.

The second part of this paper includes propositions for describing the formulas, used in the loan portfolio evaluation. It presents the main formulas of expected loss and unexpected loss in the loan portfolio evaluation and for the clarity of the formulas, some of the propositions are given with proof. Moreover, this chapter has the explanation of the Monte Carlo simulation and the presentation of the analytical approximation for the loss distribution.

The last part displays the practical calculations of the paper. In this sector the specific loan portfolio was taken. Because of the size of portfolio, the subset was taken to evaluate the portfolio. In order to check fulfillment of the taken subset, the portfolio was grouped according to loan debts and grouped again according to loan loss. Then the distribution of portfolio and of the subset was compared. The distribution in the generated groups were the same with the error percentage of less than 0,5%. The subset had the same distribution in generated debts‘ and loss‘ groups. That is why, the loss distribution of the subset had the same shape and other indicators, such as the intervals of growing and decreasing. Using the Monte Carlo simulation, the histogram of the portfolio‘s loss given default was done. After this step, using the knowledge of analytical approximation, it was tested whether loss given default distribution match the beta distribution. The average and variance of the simulated loss given default was calculated and because of these characteristics the parameters of beta distribution where founded.

Literatūra

[1] C. Bluhm, L. Overbeck, and C. Wagner, *An Introduction to Credit Risk Modeling*, 2002metai.

[2] Vytautas Valvonis, *Kredito rizikos vertinimo ir valdymo modelis: Lietuvos bankų praktika ir perspektyvos, Daktaro disertacija*, 2008 metai.

[3] Basel Committee on Banking Supervision, *Studies on the Validation of Internal Rating System, Working Paper No. 14*, 2005 metai.

[4] Jonas Kubilius, *Tikimybių teorija ir matematinė statistika*, VU leidykla, 1996 metai.

[5] Philippe Jorion, *Financial Risk Manager handbook, second edition*, 2003 metai.

Priedai

Priedas 1

Nr.	LGD intervalas		Nuostolių riba intervaluose		Intervalo dažnis	Nr.	LGD intervalas		Nuostolių riba intervaluose		Intervalo dažnis
	Pradžia	Pabaiga	Pradžia	Pabaiga			Pradžia	Pabaiga	Pradžia	Pabaiga	
1.	0,00	0,01	0	6971,24	43228	51.	0,50	0,51	348562	355533,24	31483
2.	0,01	0,02	6971,24	13942,48	104167	52.	0,51	0,52	355533,24	362504,48	28838
3.	0,02	0,03	13942,48	20913,72	113801	53.	0,52	0,53	362504,48	369475,72	27722
4.	0,03	0,04	20913,72	27884,96	107418	54.	0,53	0,54	369475,72	376446,96	25905
5.	0,04	0,05	27884,96	34856,2	105308	55.	0,54	0,55	376446,96	383418,2	24251
6.	0,05	0,06	34856,2	41827,44	109528	56.	0,55	0,56	383418,2	390389,44	26381
7.	0,06	0,07	41827,44	48798,68	108818	57.	0,56	0,57	390389,44	397360,68	23823
8.	0,07	0,08	48798,68	55769,92	107834	58.	0,57	0,58	397360,68	404331,92	21704
9.	0,08	0,09	55769,92	62741,16	103018	59.	0,58	0,59	404331,92	411303,16	20173
10.	0,09	0,10	62741,16	69712,4	102519	60.	0,59	0,60	411303,16	418274,4	19210
11.	0,10	0,11	69712,4	76683,64	100595	61.	0,60	0,61	418274,4	425245,64	21243
12.	0,11	0,12	76683,64	83654,88	101316	62.	0,61	0,62	425245,64	432216,88	19043
13.	0,12	0,13	83654,88	90626,12	99613	63.	0,62	0,63	432216,88	439188,12	19017
14.	0,13	0,14	90626,12	97597,36	98776	64.	0,63	0,64	439188,12	446159,36	16491
15.	0,14	0,15	97597,36	104568,6	92492	65.	0,64	0,65	446159,36	453130,6	14112
16.	0,15	0,16	104568,6	111539,84	90956	66.	0,65	0,66	453130,6	460101,84	13383
17.	0,16	0,17	111539,84	118511,08	85053	67.	0,66	0,67	460101,84	467073,08	11573
18.	0,17	0,18	118511,08	125482,32	87097	68.	0,67	0,68	467073,08	474044,32	10602
19.	0,18	0,19	125482,32	132453,56	83715	69.	0,68	0,69	474044,32	481015,56	11513
20.	0,19	0,20	132453,56	139424,8	81974	70.	0,69	0,70	481015,56	487986,8	10057
21.	0,20	0,21	139424,8	146396,04	84592	71.	0,70	0,71	487986,8	494958,04	8176
22.	0,21	0,22	146396,04	153367,28	82819	72.	0,71	0,72	494958,04	501929,28	8358
23.	0,22	0,23	153367,28	160338,52	78495	73.	0,72	0,73	501929,28	508900,52	7884
24.	0,23	0,24	160338,52	167309,76	72487	74.	0,73	0,74	508900,52	515871,76	7624
25.	0,24	0,25	167309,76	174281	71039	75.	0,74	0,75	515871,76	522843	7409
26.	0,25	0,26	174281	181252,24	69434	76.	0,75	0,76	522843	529814,24	7076
27.	0,26	0,27	181252,24	188223,48	71180	77.	0,76	0,77	529814,24	536785,48	5880
28.	0,27	0,28	188223,48	195194,72	65666	78.	0,77	0,78	536785,48	543756,72	5857
29.	0,28	0,29	195194,72	202165,96	68059	79.	0,78	0,79	543756,72	550727,96	4760
30.	0,29	0,30	202165,96	209137,2	69434	80.	0,79	0,80	550727,96	557699,2	4353
31.	0,30	0,31	209137,2	216108,44	67868	81.	0,80	0,81	557699,2	564670,44	4246
32.	0,31	0,32	216108,44	223079,68	65531	82.	0,81	0,82	564670,44	571641,68	3590
33.	0,32	0,33	223079,68	230050,92	59950	83.	0,82	0,83	571641,68	578612,92	2945
34.	0,33	0,34	230050,92	237022,16	58916	84.	0,83	0,84	578612,92	585584,16	2801
35.	0,34	0,35	237022,16	243993,4	59885	85.	0,84	0,85	585584,16	592555,4	2417
36.	0,35	0,36	243993,4	250964,64	57367	86.	0,85	0,86	592555,4	599526,64	2130
37.	0,36	0,37	250964,64	257935,88	49679	87.	0,86	0,87	599526,64	606497,88	2064
38.	0,37	0,38	257935,88	264907,12	49810	88.	0,87	0,88	606497,88	613469,12	1459
39.	0,38	0,39	264907,12	271878,36	47928	89.	0,88	0,89	613469,12	620440,36	1287
40.	0,39	0,40	271878,36	278849,6	49324	90.	0,89	0,90	620440,36	627411,6	1135
41.	0,40	0,41	278849,6	285820,84	46819	91.	0,90	0,91	627411,6	634382,84	901
42.	0,41	0,42	285820,84	292792,08	44376	92.	0,91	0,92	634382,84	641354,08	764
43.	0,42	0,43	292792,08	299763,32	44446	93.	0,92	0,93	641354,08	648325,32	785
44.	0,43	0,44	299763,32	306734,56	41259	94.	0,93	0,94	648325,32	655296,56	615
45.	0,44	0,45	306734,56	313705,8	40084	95.	0,94	0,95	655296,56	662267,8	452
46.	0,45	0,46	313705,8	320677,04	40526	96.	0,95	0,96	662267,8	669239,04	376
47.	0,46	0,47	320677,04	327648,28	36567	97.	0,96	0,97	669239,04	676210,28	239
48.	0,47	0,48	327648,28	334619,52	37792	98.	0,97	0,98	676210,28	683181,52	160
49.	0,48	0,49	334619,52	341590,76	35981	99.	0,98	0,99	683181,52	690152,76	88
50.	0,49	0,50	341590,76	348562	34235	100.	0,99	1,00	690152,76	697124	50

Priedas 2

Nr.	Intervalo reikšmė	Beta skirstinio reikšmė	Nr.	Intervalo reikšmė	Beta skirstinio reikšmė
1.	0,01	2,472559474680420000	51.	0,51	0,752307720995969000
2.	0,02	2,548041607900170000	52.	0,52	0,721364512296475000
3.	0,03	2,569775671621110000	53.	0,53	0,691042686765354000
4.	0,04	2,568555505001640000	54.	0,54	0,661346689399455000
5.	0,05	2,554479828947040000	55.	0,55	0,632280672931171000
6.	0,06	2,532202170458180000	56.	0,56	0,603848512614602000
7.	0,07	2,504277178272150000	57.	0,57	0,576053819594667000
8.	0,08	2,472269340749740000	58.	0,58	0,548899952982054000
9.	0,09	2,437211846865790000	59.	0,59	0,522390030740919000
10.	0,1	2,399825889820390000	60.	0,6	0,496526939482012000
11.	0,11	2,360636739348310000	61.	0,61	0,471313343241318000
12.	0,12	2,320040067507040000	62.	0,62	0,446751691312852000
13.	0,13	2,278342185577510000	63.	0,63	0,422844225193909000
14.	0,14	2,235785657772170000	64.	0,64	0,399592984691504000
15.	0,15	2,192566265136920000	65.	0,65	0,376999813229798000
16.	0,16	2,148844620039760000	66.	0,66	0,355066362389818000
17.	0,17	2,104754346003850000	67.	0,67	0,333794095704545000
18.	0,18	2,060407980541370000	68.	0,68	0,313184291724273000
19.	0,19	2,015901326093320000	69.	0,69	0,293238046358917000
20.	0,2	1,971316717389570000	70.	0,7	0,273956274495359000
21.	0,21	1,926725515926530000	71.	0,71	0,255339710878824000
22.	0,22	1,882190042639540000	72.	0,72	0,237388910237378000
23.	0,23	1,837765095229470000	73.	0,73	0,220104246617570000
24.	0,24	1,793499153709110000	74.	0,74	0,203485911886695000
25.	0,25	1,749435348663200000	75.	0,75	0,187533913342538000
26.	0,26	1,705612246640070000	76.	0,76	0,172248070354177000
27.	0,27	1,662064492991090000	77.	0,77	0,157628009936644000
28.	0,28	1,618823342413240000	78.	0,78	0,143673161136860000
29.	0,29	1,575917100170440000	79.	0,79	0,130382748076725000
30.	0,3	1,533371491631600000	80.	0,8	0,117755781459680000
31.	0,31	1,491209973802910000	81.	0,81	0,105791048296500000
32.	0,32	1,449453999560380000	82.	0,82	0,094487099540779800
33.	0,33	1,408123243035170000	83.	0,83	0,083842235238803900
34.	0,34	1,367235792879790000	84.	0,84	0,073854486684335800
35.	0,35	1,326808318810750000	85.	0,85	0,064521594914146000
36.	0,36	1,286856215785800000	86.	0,86	0,055840984666948600
37.	0,37	1,247393729358780000	87.	0,87	0,047809732628725500
38.	0,38	1,208434065110970000	88.	0,88	0,040424528356910600
39.	0,39	1,169989484544300000	89.	0,89	0,033681625641950700
40.	0,4	1,132071389410500000	90.	0,9	0,027576781104613300
41.	0,41	1,094690396117800000	91.	0,91	0,022105175325070500
42.	0,42	1,057856401587960000	92.	0,92	0,017261309357571100
43.	0,43	1,021578641715770000	93.	0,93	0,013038865329478400
44.	0,44	0,985865743403492000	94.	0,94	0,009430512352143590
45.	0,45	0,950725770993221000	95.	0,95	0,006427624577801360
46.	0,46	0,916166267797360000	96.	0,96	0,004019847936409080
47.	0,47	0,882194293324433000	97.	0,97	0,002194380207759900
48.	0,48	0,848816456711761000	98.	0,98	0,000934626492353326
49.	0,49	0,816038946804303000	99.	0,99	0,000217134614745814
50.	0,5	0,783867559258200000	100.	1	0,000000000000000000