

VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
TIKIMYBIŲ TEORIJOS IR SKAIČIŲ TEORIJOS KATEDRA

Sandra Kalinauskaitė
Matematikos ir matematikos taikymų studijų programa

TRIGONOMETRINIŲ SUMŲ ĮVERČIAI
Bakalauro baigiamasis darbas

Vadovas: Prof. Habil. Dr. **Antanas Laurinčikas**

Vilnius, 2017

TURINYS

1. Įvadas	3
2. Trigonometrinė suma su polinomu	5
2.1 Teorema.....	5
2.2 Teorema.....	6
3. Trigonometrinių sumų taikymas	8
3.1 Teorema.....	8
4. Literatūros sąrašas	13
5. Summary	14

1. ĮVADAS

Tarkime, kad $f(x)$ yra kuri nors reali funkcija, apibrėžta intervale $[a, b]$. Tuomet suma

$$\sum_{a \leq m \leq b} e^{2\pi i f(m)}$$

yra vadinama trigonometrine arba eksponentine suma. Čia $i = \sqrt{-1}$ yra menamasis vienetas.

Iš žinomos formulės,

$$e^{ia} = \cos a + i \sin a,$$

teisingos su visais realiais a , turime, kad

$$e^{2\pi i f(m)} = \cos(2\pi f(m)) + i \sin(2\pi f(m)),$$

ir ši lygybė pateisina trigonometrinės sumos pavadinimą.

Trigonometrinės sumos yra plačiai naudojamos analizinėje skaičių teorijoje, vertinant įvairias sumas, susijusias su Rymano dzeta funkcija arba kitomis funkcijomis, apibrėžiamomis Dirichlė eilutėmis

$$\zeta(s), s = \sigma + it.$$

Pademonstruosime tai Rymano dzeta funkcijos atveju. Primename, kad funkcija $\zeta(s)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}$$

ir yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus paprastąjį polių, taške $s = 1$ su reziduumu 1. Sprendžiant įvairius uždavinius yra reikalingi funkcijos dzeta įverčiai įvairiose srityse. Šiam tikslui yra naudojamos vadinamosios artutinės funkcinės lygtys, kuriose funkcija $\zeta(s)$ išreiškiama baigtinėmis sumomis su liekamųjų narių įverčiais. Pati paprasčiausia iš tokių artutinių lygčių galioja srityje $0 \leq \sigma_0 \leq 2, |t| \leq \pi x$ ir turi pavidalą [3]

$$\zeta(s) = \sum_{m \leq x} \frac{1}{m^s} + \frac{x^{1-s}}{s-1} + O(x^{-\sigma}) \quad (1.1)$$

čia $g_1(x) = O(g_2(x))$, $g_2(x) > 0$, $x \in X$, reiškia, kad egzistuoja tokia konstanta $c > 0$, kad su $\forall x \in X$ yra teisinga nelygybė

$$|g_1(x)| \leq c g_2(x).$$

Formulė (1.1) rodo, jog norint įvertinti funkciją $\zeta(s)$ reikia mokėti įvertinti sumą

$$\sum_{m \leq x} \frac{1}{m^s}.$$

Šios sumos įvertinimą nesunku išreikšti trigonometrinės sumos įvertinimu. Turime kad

$$\sum_{m \leq x} \frac{1}{m^s} = \sum_{m \leq x} \frac{1}{m^\sigma} \frac{1}{m^{it}} = \sum_{m \leq x} \frac{1}{m^\sigma} e^{-it \log m}.$$

Iš čia gauname įvertį

$$\sum_{m \leq x} \frac{1}{m^s} = O\left(\max_{y \leq x} \left| \sum_{m \leq y} e^{-it \log m} \right| \right) \quad (1.2)$$

čia mes pasinaudojome žinoma nelygybe [3], kad jei $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$, o $b_1, b_2, \dots, b_n$ yra bet kokie kompleksiniai skaičiai, su visais $m \in M$ tenkinantys nelygybę

$$|b_1 + \dots + b_m| \leq c,$$

tai tada

$$|a_1 b_1 + \dots + a_n b_n| \leq c a_1.$$

Taigi, iš (1.1) ir (1.2) matome, kad funkcijos $\zeta(s)$ įvertinimas yra suvedamas į trigonometrinės sumos

$$\sum_{m \leq y} e^{2\pi i f(m)}$$

su $f(x) = \frac{-t \log x}{2\pi}$ įvertinimą.

Yra įvairių būdų trigonometrinių sumų įvertinimui. Vienas iš tokių būdų pakeičia trigonometrinės sumos įvertinimą įvertinimu trigonometrinės sumos, kurioje $f(x)$ yra kurio nors laipsnio polinomas. Bakalauro darbo tikslas yra pademonstruoti šį metodą, gauti trigonometrinės sumos, kai $f(x)$ yra 2-ojo laipsnio polinomas, įvertį ir tai pritaikyti sumos

$$\sum_{a < m \leq b} e^{-it \log m}$$

įvertinimu.

Galima nagrinėti dar sudėtingesnes kartotines trigonometrines sumas

$$\sum_{m_1} \dots \sum_{m_r} e^{2\pi i f_1(m_1) + \dots + 2\pi i f_r(m_r)}.$$

čia $m_1, \dots, m_r$ perbėga baigtinių reikšmių skaičių, o $f_1(x), \dots, f_r(x)$ yra atitinkamose srityse apibrėžtos realios funkcijos. Tokių trigonometrinių sumų teorija buvo sukurta [1] monografijoje.

2. TRIGONOMETRINĖ SUMA SU POLINOMU

Šiame skyrelyje nagrinėsime trigonometrinę sumą

$$S = \sum_{a < m \leq b} e^{2\pi i f(m)},$$

kurioje $f(m)$ yra, tarkime, k laipsnio polinomas, t.y.:

$$f(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_0, a_k \neq 0.$$

Parodysime, kad sumos S įvertinimą galima pakeisti gana paprastos sumos vertinimu, kai polinomas $f(x)$ yra 1-ojo laipsnio. Tikrai, žymėdami $\bar{z}$ kompleksinį jungtinį skaičiaus z , iš lygybės $|z|^2 = z\bar{z}$, galime parašyti, kad

$$|S|^2 = S\bar{S} = \sum_m e^{2\pi i f(m)} \sum_l e^{-2\pi i f(l)} = \sum_m e^{2\pi i f(m)} \sum_k e^{-2\pi i f(k)} = \sum_m \sum_l e^{2\pi i (f(m) - f(k))}, \quad (2.1)$$

čia, trumpumo dėlei, vietoje $a < m \leq b$ rašome tiesiog m . Tas pats ir antroje sumoje pagal k . Tegul dabar $l = m - r$. Tuomet iš (2.1) lygybės turime, kad

$$|S|^2 = \sum_r \sum_m e^{2\pi i (f(m+r) - f(m))} \leq \sum_r \left| \sum_m e^{2\pi i (f(m+r) - f(m))} \right|. \quad (2.2)$$

Nesunku matyti, kad

$$f(m+r) - f(m)$$

jau yra polinomas, kurio laipsnis yra vienetu mažesnis už polinomo $f(m)$ laipsnį, nes aukščiausias m laipsnis susiprastina.

Taigi, jau turime $k-1$ laipsnio polinomą. Šią procedūrą pakartoję $k-1$ kartų, matysime, kad pakanka mokėti įvertinti gana paprastą sumą

$$Z_1 = \sum_{a < m \leq b} e^{2\pi i (a_1 m + a_2)}.$$

Taigi, sumą S įvertinsime, jei turėsime sumos Z_1 įvertį.

2.1 TEOREMA. Teisingas įvertis

$$|Z_1| \leq \frac{1}{|\sin \pi a_1|}.$$

Irodymas. Žinome, kad geometrinės progresijos $b_1, b_1 q, \dots, b_1 q^{n-1}$ sumai

$$S_n = b_1 + b_1 q + \dots + b_1 q^{n-1}$$

(čia b_1 yra geometrinės progresijos 1-asis narys, o q yra jos vardiklis) yra teisinga formulė

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}. \quad (2.3)$$

Sumą Z_1 galime užrašyti pavidalu

$$Z_1 = e^{2\pi i a_2} \sum_{a < m \leq b} e^{2\pi i a_1 m}. \quad (2.4)$$

Nariai po sumos ženklu sudaro geometrinę progresiją, kurios $b_1 = e^{2\pi i (a+1)a_1}$, o vardiklis $q = e^{2\pi i a_1}$. Todėl pagal (2.3) formulę

$$\sum_{a < m \leq b} e^{2\pi i a_1 m} = \frac{e^{2\pi i (a+1)a_1} - e^{2\pi i (b+1)a_1}}{1 - e^{2\pi i a_1}}.$$

Taigi, iš (2.4), kadangi $|e^{2\pi i c}| = 1$ su bet kuriuo $c \in R$, gauname nelygybę

$$|Z_1| \leq \frac{|e^{2\pi i (a+1)a_1}| + |e^{2\pi i (b+1)a_1}|}{|1 - e^{2\pi i a_1}|} = \frac{2}{|1 - e^{2\pi i a_1}|}.$$

Žinome, kad $|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x, y \in R$. Todėl

$$\begin{aligned} |1 - e^{2\pi i a_1}| &= |1 - \cos 2\pi a_1 - i \sin 2\pi a_1| = |(1 - \cos 2\pi a_1) - i \sin 2\pi a_1| = \\ &= \sqrt{(1 - \cos 2\pi a_1)^2 + \sin^2 2\pi a_1} = \sqrt{1 - 2\cos 2\pi a_1 + \cos^2 2\pi a_1 + \sin^2 2\pi a_1} = \\ &= \sqrt{2 - 2\cos 2\pi a_1} = \sqrt{2(1 - \cos 2\pi a_1)} = \\ &= \sqrt{4\sin^2 \pi a_1} = 2|\sin \pi a_1|. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Čia mes pasinaudojome formule $1 - \cos \alpha = 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}$. Taigi, teoremos tvirtinimas išplaukia iš (2.4) ir (2.5).

Dabar įvertinsime trigonometrinę sumą su kvadratinio polinomu. Tegul

$$Z_2 = \sum_{m=1}^r e^{2\pi i (am^2 + bm)}.$$

2.2 TEOREMA. Teisingas įvertis

$$|Z_2|^2 \leq r + 2 \sum_{m=1}^{r-1} \min \left(r, \frac{1}{|\sin 2\pi am|} \right).$$

Irodymas. Remsimės skyrelio pradžioje aprašytu metodu, t.y., 2-ojo laipsnio polinomą keisime 1-ojo laipsnio polinomu ir panaudosime 2.1 teoremą. Iš sumos Z_2 apibrėžimo turime, kad

$$|Z_2|^2 = Z_2 \overline{Z_2} = \sum_{m=1}^r \sum_{l=1}^r e^{2\pi i (am^2 + bm)} e^{-2\pi i (al^2 + bl)} = \sum_{m=1}^r \sum_{l=1}^r e^{2\pi i (am^2 + bm - al^2 - bl)}. \quad (2.6)$$

Tegul $l = m - k$. Tada

$$am^2 + bm - al^2 - bl = am^2 + bm - a(m-k)^2 - b(m-k) =$$

$$= am^2 + bm - am^2 + 2amk - ak^2 - bm + bk = 2amk - ak^2 + bk.$$

Iš čia ir (2.6) randame, kad

$$|Z_2|^2 = \sum_{m=1}^r \sum_{k=-r+1}^{r-1} e^{2\pi i(2amk - ak^2 + bk)} = \sum_{k=-r+1}^{r-1} e^{2\pi i(-ak^2 + bk)} \sum_{m=1}^r e^{4\pi iamk}. \quad (2.7)$$

Čia mes pasinaudojome tuo, kad $1 \leq l \leq r$, todėl $-r+1 \leq k \leq r-1$.

Taigi,

$$|Z|^2 \leq \sum_{k=-r+1}^{r-1} \left| e^{2\pi i(-ak^2 + bk)} \sum_{m=1}^r e^{4\pi iamk} \right| = \sum_{k=-r+1}^{r-1} \left| e^{2\pi i(-ak^2 + bk)} \right| \left| \sum_{m=1}^r e^{4\pi iamk} \right| = \sum_{k=-r+1}^{r-1} \left| \sum_{m=1}^r e^{4\pi iamk} \right|.$$

Kadangi $|e^{4\pi iamk}| = 1$, tai iš čia ir (2.1) teoremos su $a_1 = 2ak$ gauname nelygybę

$$|Z|^2 \leq \sum_{k=-r+1}^{r-1} \min \left(r, \frac{1}{|\sin 2\pi ak|} \right) = r + \sum_{k=-r+1, k \neq 0}^{r-1} \min \left(r, \frac{1}{|\sin 2\pi ak|} \right) = r + 2 \sum_{k=1}^{r-1} \min \left(r, \frac{1}{|\sin 2\pi ak|} \right).$$

3. TRIGONOMETRINIŲ SUMŲ TAIKYMAS

Šiame skyrelyje įvertinsime trigonometrinę sumą

$$S = \sum_{m=a_1+1}^{a_2} e^{-it \log m} = \sum_{m=a_1+1}^{a_2} \frac{1}{m^{it}}.$$

Tokia suma atsiranda nagrinėjant Rymano dzeta funkciją [2]

$$\zeta(s) = \sum_1 \frac{1}{m^s}, \sigma > 1,$$

kuri yra aproksimuojama baigtine suma

$$\zeta(s) = \sum_{m \leq x} \frac{1}{m^s} + \frac{x^{s-1}}{s-1} + O(x^{-\sigma}),$$

kai $|t| \leq \pi x$ ir $0 < \sigma_0 \leq \sigma \leq 2$. Taigi, mes panagrinėsime baigtinę sumą

$$\sum_{m=a_1+1}^{a_2} \frac{1}{m^s},$$

kai $\sigma = 0$.

3.1 TEOREMA. Tarkime, kad $a_2 \leq 2a_1$, $2\sqrt[3]{t} \leq a_1 < ct$ su kuriuo nors $t > 0$, tuomet su pakankamai dideliais $t > 0$ yra teisingas įvertis

$$S = O(\sqrt{a_1} \sqrt[6]{t} \sqrt{\log t} + O(a_1 t^{-\frac{1}{6}} \log t)).$$

Irodymas. Naudosime žymenis

$$\alpha = \left\lceil \frac{1}{2} a_1 t^{-\frac{1}{3}} \right\rceil \text{ ir } n = \left\lceil \frac{a_2 - a_1}{\alpha} \right\rceil,$$

čia $[u]$ yra skaičiaus u sveikoji dalis, t.y., didžiausias sveikasis skaičius neviršijantis u . Iš apibrėžimo ir teoremos sąlygų išplaukia, kad yra teisingas įvertis

$$n = O\left(\frac{a_1}{\alpha}\right) = O(\sqrt[3]{t}). \quad (3.1)$$

Sumą S užrašome trumpesnių sumų, sudarytų iš α dėmenų, suma. Turime, kad

$$S = \left(\sum_{m=a_1+1}^{a_1+\alpha} + \sum_{m=a_1+\alpha+1}^{a_1+2\alpha} + \dots + \sum_{m=a_1+n\alpha+1}^{a_2} \right) e^{-it \log m} = \sum_1 + \sum_2 + \dots + \sum_{n+1}, \quad (3.2)$$

čia

$$\sum_k = \sum_{m=a_1+(k-1)\alpha+1}^{a_1+k\alpha} e^{-it \log m}, \quad k = 1, \dots, n+1.$$

Apibrėžiame pagalbines sumas

$$S_l = \sum_{m=1}^{\alpha} \exp \left\{ -it \left(\frac{m}{a_1 + l\alpha} - \frac{1m^2}{2(a_1 + l\alpha)^2} \right) \right\} = \sum_{m=1}^{\alpha} \exp \left\{ 2\pi i \left(\frac{tm^2}{4\pi(a_1 + l\alpha)^2} - \frac{tm}{2\pi(a_1 + l\alpha)} \right) \right\}.$$

Matome, kad po eksponentės ženklų yra 2-ojo laipsnio polinomas, todėl sumą S_l galime įvertinti remdamiesi 2.2 teorema. Taigi, yra teisingas įvertis

$$S_l \leq \left(\alpha + \sum_{k \neq 1}^{\alpha-1} \min \left(\alpha, \frac{1}{\left| \sin \frac{tk}{2(a_1 + l\alpha)^2} \right|} \right) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.3)$$

Sumų $\sum_k$ įvertinimui naudosimės tokia pastaba. Tarkime, kad $k = 2, t \geq 1, \frac{a_2 - a_1}{a_1} \leq \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{3}}$ ir

$$\left| \sum_{m=1}^{a_3} \exp \left\{ -it \left(\frac{m}{a_1} - \frac{1m^2}{2a_1^2} \right) \right\} \right| \leq K, \quad (3.4)$$

kai $a_3 \leq a_2 - a_1$. Tuomet įrodysime, kad yra teisingas įvertis

$$\sum_{m=a_1+1}^{a_2} e^{-it \log m} = O(K). \quad (3.5)$$

Tikrai, remdamiesi elementariųjų funkcijų skleidiniais laipsnine eilute, gauname, kad

$$\begin{aligned} \sum_{m=a_1+1}^{a_2} e^{-it \log m} &= \sum_{m=1}^{a_2-a_1} e^{-it \log(m+a_1)} = \sum_{m=1}^{a_2-a_1} e^{-it(\log a_1 + \log(1+\frac{m}{a_1}))} = e^{-it \log a_1} \sum_{m=1}^{a_2-a_1} e^{\log(1+\frac{m}{a_1})} = \\ &= e^{-it \log a_1} \sum_{m=1}^{a_2-a_1} \exp \left\{ -it \left(\frac{m}{a_1} - \frac{m^2}{2a_1^2} \right) + it \left((-1)^2 \frac{m^3}{3a_1^3} + \dots \right) \right\}. \end{aligned}$$

Iš čia turime, kad

$$\left| \sum_{m=a_1+1}^{a_2} e^{-it \log m} \right| = \left| \sum_{m=1}^{a_2-a_1} \exp \left\{ -it \left(\frac{m}{a_1} - \frac{m^2}{2a_1^2} \right) \right\} \sum_{r=0}^{\infty} a_r(t) \left(\frac{m}{a_1} \right)^r \right|.$$

čia $a_r(t)$ yra koeficientai, gaunami skleidžiant eksponentinę funkciją

$$\exp \left\{ -it \left(\frac{m^3}{3a_1^3} + (-1)^3 \frac{a_1^4}{4a_1^4} + \dots \right) \right\}.$$

Iš čia išplaukia, kad

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m=a_1+1}^{a_2} e^{-it \log a_1} \right| &= \left| \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_r(t)}{a_1^r} \sum_{m=1}^{a_2-a_1} m^r \exp \left\{ -it \left(\frac{m}{a_1} - \frac{m^2}{2a_1^2} \right) \right\} \right| \leq \\ &\leq \sum_{m=0}^{\infty} \left| \frac{a_r(t)}{a_1^r} \right| (a_2 - a_1)^r 2K = 2K \sum_{r=0}^{\infty} |a_r(t)| \left(\frac{a_2 - a_1}{a_1} \right)^r \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2K \exp \left\{ t \left(\frac{(a_2 - a_1)^3}{3a_1^3} + \dots \right) \right\} \leq \\
&2K \exp \left\{ \frac{t(a_2 - a_1)^3}{a_1^3} \left(1 + \frac{a_2 - a_1}{a_1} + \frac{(a_2 - a_1)^2}{a_1^2} + \dots \right) \right\} = \\
&= 2K \exp \left\{ \frac{t(a_2 - a_1)^3}{a_1^3} + \frac{1}{1 - \frac{a_2 - a_1}{a_1}} \right\} \leq \\
&\leq 2K \exp \left\{ t \left(\frac{1}{2} \right)^3 \frac{2}{t} \right\} = O(K).
\end{aligned}$$

Čia pasinaudojome geometrinės progresijos sumos formule su pirmuoju nariu 1 ir vardikliu $\frac{a_2 - a_1}{a_1} \leq \frac{1}{2}$ bei padaryta (3.4) prielaida.

Dabar įvertinsime sumas $\sum_k$. Šiose sumose sumavimo intervalo ilgis $\propto \leq \frac{1}{2} a_1 t^{-\frac{1}{3}}$, o mažiausias intervalas prasideda taške $a_1 + 1$, todėl galime taikyti tik ką panaudotą įvertį (3.5), o vietoje k panaudoti įvertį (3.3). Taigi turime, kad

$$\sum_k = O(K_1) \quad (3.6)$$

su

$$K_1 = \left(\alpha + \sum_{k=1}^{\alpha-1} \min \left(\alpha, \frac{1}{\frac{tk}{2(a_1 + l_\alpha)^2}} \right) \right)^2.$$

Dabar jau nėra sunku įvertinti ir sumą S . Iš (3.2) ir (3.6), pasinaudoję žinoma nelygybe $(a + b)^{\frac{1}{2}} \leq a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}$, teisinga su visais ne neigiamais a ir b , randame, kad

$$\begin{aligned}
S &= O \left((n+1) \alpha^{\frac{1}{2}} \right) + O \left(\sum_{k=1}^{n+1} \left(\sum_{l=1}^{\alpha-1} \min \left(\alpha, \frac{1}{\left| \frac{\sin tl}{2(a_1 + l_\alpha)^2} \right|} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \right) = \\
&= O(n \alpha^{\frac{1}{2}}) + O \left(n^{\frac{1}{2}} \sum_{l=1}^{\alpha-1} \sum_{k=1}^{n+1} \min \left(\alpha, \frac{1}{\left| \frac{\sin tl}{2(a_1 + k\alpha)^2} \right|} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (3.7)
\end{aligned}$$

Kad galėtume įvertinti sumą su sinusais, įvertinsime gretimų reiškinių po sinuso ženklų skirtumą. Nesunku matyti, kad

$$\begin{aligned} \frac{tl}{2(a_1 + k\alpha)^2} - \frac{tl}{2(a_1 + (k+1)\alpha)^2} &= \frac{tl((a_1 + (k+1)\alpha)^2 - (a_1 + k\alpha)^2)}{2(a_1 + k\alpha)^2(a_1 + (k+1)\alpha)^2} = \\ &= \frac{tl\alpha(2a_1 + (2k+1)\alpha)}{2(a_1 + k\alpha)^2(a_1 + (k+1)\alpha)^2}. \end{aligned}$$

Matome, kad šios lygybės dešinioji pusė yra ne mažesnė už dydį

$$\frac{c\alpha tl}{a_1^3}$$

su kuria nors konstanta $c > 0$.

Prisiminę dydžio α apibrėžimą, matome, kad ši pusė yra ne mažesnė už dydį

$$\frac{c_1 l}{\alpha^2}, \quad c > 0.$$

Tai reiškia, kad toms k reikšmėms, kurioms trupmena

$$\frac{tl}{2(a_1 + k\alpha)^2}$$

priklauso intervalui pavidalo $\left(r\pi, \left(r \pm \frac{1}{2}\right)\pi\right), r \in N$, sinuso reikšmės $\left|\sin \frac{tl}{2(a_1 + k\alpha)^2}\right|$,

išskyrus vieną, bus didesnės už $\frac{c_2 l}{\alpha^2}$. Išskiriame tą reikšmę k , kuriai trupmena po sinuso ženklų

yra artimiausia $r\pi$. Visos minėtos sinuso reikšmės, išskyrus dvi bus didesnės už $\frac{2c_2 l}{\alpha^2}$, ir taip

toliau. Čia mes pasinaudojome tuo, kad atstumas tarp gretimų trupmenų po sinuso ženklų yra ir mažesnis už $\frac{c_1 l}{\alpha^2}$. Remdamiesi teoremos sąlygomis, turime iš viso $n + 1$ tokią k reikšmę ir

$n = O(t^{\frac{1}{3}})$. Todėl visos tokios reikšmės duoda įvertį

$$\begin{aligned} \alpha + O\left(\frac{\alpha^2}{l} + \frac{\alpha^2}{2l} + \dots + \frac{\alpha^2}{(n+1)l}\right) &= \alpha + O\left(\frac{\alpha^2}{l} \sum_{m \leq n+1} \frac{1}{m}\right) = \alpha + O\left(\frac{\alpha^2}{l} \log n\right) = \\ &= \alpha + O\left(\frac{\alpha^2}{l} \log t\right) = O\frac{\alpha^2 \log t}{l}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

Kadangi turime, kad $1 \leq l \leq \alpha - 1$.

Mes nagrinėjame intervalus, kurių ilgis yra $\frac{\pi}{2}$, o iš viso turime $n + 1$ k reikšmių ir atstumas tarp gretimų trupmenų yra $O\left(\frac{l}{\alpha^2}\right)$. Iš čia išplaukia, kad tokių intervalų skaičius yra įvertinamas dydžiu

$$O\left(\frac{nl}{\alpha^2} + 1\right).$$

Ši pastaba yra (3.8) įvertis mums duoda įvertį

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \min \left(\alpha, \frac{1}{\left| \frac{\sin tl}{2(a_1 + k\alpha)^2} \right|} \right) &= O\left(\left(n \frac{l}{\alpha^2} + 1 \right)^n + \frac{\alpha^2 \log t}{l} \right) = \\ &= O(n \log t) + O\left(\frac{\alpha^2}{l} \log t \right). \end{aligned}$$

Iš šių įverčių ir (3.7) išplaukia, kad mūsų pagrindinei sumai S galioja įvertis

$$\begin{aligned} S &= O\left(n \alpha^{\frac{1}{2}} \right) + O\left(n^{\frac{1}{2}} \sum_{l=1}^{\alpha-1} \left(n \log t + \frac{\alpha^2}{l} \log t \right) \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= O\left(n \alpha^{\frac{1}{2}} \right) + O\left(n \alpha^{\frac{1}{2}} (\log t)^{\frac{1}{2}} \right) + O\left(n \alpha^{\frac{1}{2}} (\log t)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{l \leq \alpha} \frac{1}{l} \right)^{\frac{1}{2}} \right) = \\ &= O\left(n \alpha^{\frac{1}{2}} \right) + O\left(n \alpha^{\frac{1}{2}} (\log t)^{\frac{1}{2}} \right) + O\left(n^{\frac{1}{2}} \alpha \log t \right) = \\ &= O\left(n \alpha^{\frac{1}{2}} (\log t)^{\frac{1}{2}} \right) + O\left(n^{\frac{1}{2}} \alpha \log t \right). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Pagal sąlygą turime, kad $n = O\left(t^{\frac{1}{3}}\right)$ ir $\alpha = O\left(a_1 t^{-\frac{1}{3}}\right)$. Todėl iš (3.9) gauname, kad

$$S = O\left(a_1^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{6}} (\log t)^{\frac{1}{2}} \right) + O\left(a_1 t^{-\frac{1}{6}} \log t \right).$$

Taigi, gavome teoremos tvirtinimą.

LITERATŪROS SĄRAŠAS

- [1] G. I. Archipov, A. A. Karatsuba, V. N. Chubarkov. Theory of Multiple Trigonometric Sums, Nauka, Moscow, 1987 (rusų k.)
- [2] A. Laurinčikas, R. Macaitienė, Įvadas į Dirichlė eilučių Teoriją, Šiaulių universiteto leidykla, Šiauliai, 2008
- [3] E. C. Titchmarsh, The Theory of the Riemann Zeta-Function, Clarendon Press, Oxford, 1986

Estimates for trigonometric sums

Sandra Kalinauskaitė

(Summary)

Let $f(x), x \in [a, b]$, be a certain real-valued function. Then a sum

$$\sum_{a \leq m \leq b} e^{2\pi i f(m)}, i = \sqrt{-1},$$

is called a trigonometric sum.

Trigonometric sums appear in many problems of mathematics, however, analytic number theory is one of the widest areas of applications of such sums.

In the bachelor work, we estimate the trigonometric sum

$$S = \sum_{m=a_1+1}^{a_2} \frac{1}{m^{it}} = \sum_{m=a_1+1}^{a_2} e^{-it \log m}$$

related to the Riemann zeta-function $\zeta(s)$, $s = \sigma + it$, defined, for $\sigma > 1$ by the series

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s},$$

and by analytic continuation elsewhere. Using the restrictions $a_2 \leq 2a_1$ and $2\sqrt[3]{t} \leq a_1 < t$ with sufficiently large $t > 0$, we obtain that

$$S = O(\sqrt{a_1} \sqrt[6]{t} \sqrt{\lg t}) + O(a_1 t^{-\frac{1}{6}} \log t).$$