VILNIAUS UNIVERSITETAS

Alicija
EISMONTAITĖ

Singuliarieji Stokso sistemų sprendiniai srityse su smailuma

DAKTARO DISERTACIJOS SANTRAUKA

Gamtos mokslai,
matematika N 001

VILNIUS 2019

Disertacija rengta 2012–2018 metais Vilniaus universitete.

Mokslinis vadovas:

prof. habil. dr. Konstantinas Pileckas (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika, N 001)

Gynimo taryba:
Pirmininkas – **Prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas** (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika, N 001)
Nariai:
Prof. habil. dr. Raimondas Čiegis (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, gamtos mokslai, matematika, N 001)
Prof. habil. dr. Grigory Panasenko (Lyon univeristetas, gamtos mokslai, matematika, N 001)
Prof. habil. dr. Minvydas Ragulskis (Kauno technologijos univeristetas, gamtos mokslai, matematika, N 001)
Prof. habil. dr. Artūras Štikonas (Vilniaus univeristetas, gamtos mokslai, matematika, N 001)

Disertacija ginama viešame Gynimo tarybos posėdyje 2019 m. kovo 28 d. 15 val. VU Matematikos ir informatikos fakultete, prof. Jono Kubiliaus vardo auditorijoje (102).

Adresas: Naugarduko g. 24, LT-03225, Vilnius, Lietuva.

Disertaciją galima peržiūrėti Vilniaus universiteto bibliotekoje ir VU interneto svetainėje adresu: *https://www.vu.lt/naujienos/ivykiu-kalendorius*.

VILNIUS UNIVERSITY

Alicija
EISMONTAITĖ

Singular solutions of the Stokes problems in the power cusp domains

SUMMARY OF DOCTORAL DISSERTATION

Life sciences,
mathematics N 001

VILNIUS 2019

This dissertation was written between 2012 and 2018 at Vilnius University.

Academic supervisor:

Prof. Habil. Dr. Konstantinas Pileckas (Vilnius University, life sciences, mathematics, N 001)

This doctoral dissertation will be defended in a public meeting of the Dissertation Defence Panel:

Chairman – **Prof. Habil. Dr. Antanas Laurinčikas** (Vilnius University, life sciences, mathematics, N 001)
Members:
Prof. Habil. Dr. Raimondas Čiegis (Vilnius Gediminas Technical University, life sciences, mathematics, N 001)
Distinguished Prof. Habil. Dr. Grigory Panasenko (University of Lyon, life sciences, mathematics, N 001)
Prof. Habil. Dr. Minvydas Ragulskis (Kaunas University of Technology, life sciences, mathematics, N 001)
Prof. Habil. Dr. Artūras Štikonas (Vilnius University, life sciences, mathematics, N 001)

The dissertation shall be defended at a public meeting of the Dissertation Defence Panel at 3 pm on 28th March 2019 in Prof. Jonas Kubilius lecture room (102) of the Faculty Mathematics and Informatics.

Adress: Naugarduko st. 24, LT-03225, Vilnius, Lithuania.

The text of this dissertation can be accessed at the library of Vilnius University, as well as on the website of Vilnius University: *www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius*

SANTRAUKA

1 Tyrimo objektas

Disertacijoje nagrinėjami stacionarus

$$\begin{cases} -\nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f}, \quad x \in \Omega, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} &= 0, \quad x \in \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{a}, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

laiko atžvilgiu periodinis

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t - \nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f}, \qquad (x,t) \in \Omega \times (0, 2\pi), \\ \operatorname{div}\mathbf{u} &= 0, \qquad (x,t) \in \Omega \times (0, 2\pi), \\ \mathbf{u} &= \mathbf{a}, \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times (0, 2\pi), \\ \mathbf{u}(x,0) &= \mathbf{u}(x, 2\pi), \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{2}$$

bei nestacionarus

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t - \nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f}, \qquad (x,t) \in \Omega \times (0, T), \\ \operatorname{div}\mathbf{u} &= 0, \qquad (x,t) \in \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{u} &= \mathbf{a}, \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times (0, T), \\ \mathbf{u}(x,0) &= \mathbf{b}(x), \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{3}$$

Stokso uždaviniai aprėžtoje srityje $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, kai srities kraštui priklauso singuliarus taškas O. Čia $0 < T \leq \infty$, $\mathbf{u} = (u_1, ..., u_n)$ yra nežinomas skysčio greičio vektorius, p yra nežinoma skysčio slėgio funkcija, $\mathbf{f} = (f_1, ..., f_n)$ – žinomų išorinių jėgų laukas, $\nu > 0$ – skysčio klampumo koeficientas, $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n)$ – užduotas skysčio greitis ant srities krašto ir $\mathbf{b}$ – žinomas pradinis skysčio tekėjimo greitis.

Be to, papildomai, kiekvienam iš suformuluotų uždavinių užduodama nenulinio srauto sąlyga, t.y. tariama, kad singuliariajame taške O yra skysčio šaltinis arba nuotakas.

2 Mokslinės problemos istorija ir aktualumas

Navjė-Stokso ir Stokso lygtys aprašo klampaus nespūdaus skysčio tekėjimą. Natūralu, jog dėl gausių skysčio tekėjimo uždavinių taikymų įvairiose mokslo ir technikos srityse, šios lygtys labai domino ir domina daugelio sričių specialistus, o ypač matematikus. Matematinė Navjė-Stokso lygčių teorija pradėta vystyti dar XIX amžiuje, o XX amžiaus pabaigoje, dėl vis įvairesnio hidrodinamikos modelių taikymo, šios teorijos vystymasis ypatingai suintensyvėjo. Nepaisant to, daugelis šios srities uždavinių vis dar lieka neišspręsti.

Formaliai, tam kad išspręstume (1)–(3) uždavinius, turėtume rasti nežinomas funkcijas $\mathbf{u}$ ir p. Tačiau praktika rodo, kad daugeliu atveju šios lygtys yra per sudėtingos tam, kad rastume analitinius sprendinius. Todėl tapo įprasta ieškoti tam tikrų aproksimacijų ir/arba redukacijų, kurias galima išspręsti. To pasekoje asimptotinis Navjė-Stokso ir Stokso uždavinių sprendinių elgesys tapo labai svarbiu klausimu.

Per pastaruosius 50 metų augo susidomėjimas asimptotiniu Stokso ir Navjė-Stokso uždavinių sprendinių elgesiu neįprastos geometrijos srityse. Atkreiptinas dėmesys į [1], [13], [14] darbus, kuriuose nagrinėjamos stacionarios Navjė-Stokso lygtys srityje $\Omega = \Omega_0 \setminus \{O\}$, kai $O \in \Omega_0$ ir tariama, kad taške O yra skysčio šaltinis arba nuotakas (darbe [2] galima rasti šių ir kitų rezultatų apžvalgą). Nestacionariam Navjė-Stokso lygčių atvejui galima išskirti [10]–[12] darbus, kuriuose nagrinėjamas sprendinių asimptotinis elgesys cilindrinėse sistemose. Šiuose darbuose tiriami uždaviniai tiek nereikalaujantys, tiek reikalaujantys pasienio sluoksnio pagal laiką konstravimo.

Disertaciniame darbe konstruodami sprendinio asimptotinę išraišką šalia singuliariojo krašto taško O (angl. *cusp point*), rėmėmės metodika pateikta [9] darbe. Šiame straipsnyje buvo tiriamas stacionarių Stokso ir Navjė–Stokso uždavinių sprendinių asimptotinis elgesys srityse su paraboloidiniais išėjimais į begalybę. Savo ruožtu, metodas naudojamas [9] darbe yra algoritmo, naudojamo konstruoti eliptinių uždavinių sprendinio asimptotikai glodžiose srityse, atmaina, žr., pavyzdžiui, darbus [3]–[6], kuriuose nagrinėjami eliptiniai uždaviniai, darbus [7], [8], kuriuose nagrinėjami stacionarūs Stokso ir Navjė–Stokso uždaviniai, bei darbus [10]–[12], kuriuose nagrinėjami nestacionarūs ir laiko atžvilgiu periodiniai Navjė–Stokso uždaviniai.

Pažymėtina, kad [9] straipsnyje autoriai pamini, jog asimptotinė stascionarių Stokso ir Navjė–Stokso uždavinių sprendinių išraiška šalia singuliariojo srities krašto taško gali būti konstruojama remiantis tomis pačiomis idėjomis kaip ir paraboloidinio išėjimo į begalybę atveju. Skirtumas tarp singuliariojo taško ant krašto ir paraboloidinio išėjimo atvejų yra tas, kad pirmu atveju sprendinio asimptotika yra konstruojama, kai x_n artėja į 0, o antruoju – kai x_n tolsta į begalybę. Abiem atvejais naudojama ta pati koordinačių transformacija. Tačiau autoriai savo straipsnyje [9] nepateikia jokių formulių.

Todėl buvo iškelti žemiau išvardinti disertacinio darbo tikslai.

3 Disertacijos tikslai

Disertacijoje buvo nagrinėjami stacionarus, laiko atžvilgiu periodinis ir nestacionarus Stokso uždaviniai aprėžtose srityse su smailuma (angl. *power cusp domains*). Šio disertacinio darbo tikslas buvo įrodyti singuliariųjų sprendinių suformuluotiems Stokso uždaviniams egzistavimą. Todėl visiems trims uždaviniams turėjome

- sukonstruoti formalią asimptotinę sprendinių išraišką šalia singuliariojo krašto taško,
- įrodyti singuliariųjų sprendinių egzistavimą.

4 Disertacijos struktūra ir apimtis

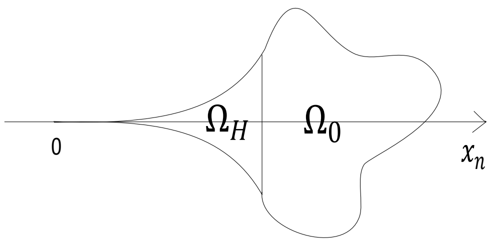
Disertaciją sudaro penki skyriai, išvados ir naudotos literatūros sąrašas. Pirmasis skyrius yra įvadinis. Jame pristatoma problemos istorija bei pagrindžiamas aktualumas. Antrajame skyriuje įvedami pagrindiniai žymėjimai bei pateikiami žinomi rezultatai, kurių prireikia vėlesniuose skyriuose. Trečias, ketvirtas ir penktas skyriai yra skirti stacionariam, laiko atžvilgiu periodiniam bei nestacionariam Stokso uždaviniams atitinkamai, t.y. juose aprašyti disetacijoje gauti moksliniai rezultatai. Disertacijos pabaigoje yra pateiktos išvados bei naudotos literatūros sąrašas. Bendra disertacinio darbo apimtis yra 97 puslapiai.

5 Disertacijoje gautų rezultatų apžvalga

Disertacijoje nagrinėjami Stokso uždavinai (1)–(3) srityse su smailuma $\Omega = \Omega_H \cup \Omega_0$, kur

$$\Omega_H = \left\{x \in \mathbb{R}^n : |x'| < \varphi(x_n), x_n \in (0, H]\right\},$$

čia $\varphi(x_n) = \gamma_0 x_n^\lambda$, $\gamma_0 = \text{const}$, $\lambda > 1$, $x' = (x_1, ..., x_{n-1})$, ir kraštas $\partial\Omega_0$ yra Lipšico. Mes tariame, kad taške O yra skysčio



1 pav. Sritis $\Omega = \Omega_H \cup \Omega_0$.

šaltinis arba nuotakas, t.y. kiekvienam iš trijų uždavinių užduodame papildomą nenulinio srauto sąlygą. To pasekoje šių uždavinių sprendiniai yra būtinai singuliarūs. Tam, kad įrodytume šių sprendinių egzistavimą mes pirmiausia formaliai konstruojame sprendinių asimptotines išraiškas šalia singuliariojo krašto taško O. Tuomet parodome, kad (1)–(3) uždavinių singuliarieji sprendiniai gali būti išreikšti kaip šios asimptotinės dalies ir nario su baigtine energija suma.

5.1 Stacionarus Stokso uždavinys

Nagrinėdami stacionarų Stokso uždavinį (1) mes tariame, kad $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)$, $\operatorname{supp} \mathbf{a} \subset \partial\Omega \cap \partial\Omega_0$, $\mathbf{a} \in W^{1/2,2}(\partial\Omega)$ ir

$$\int\limits_{\partial\Omega} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \, dS = -F \neq 0. \tag{4}$$

1 Apibrėžimas. *Apibendrintuoju* (1) *uždavinio sprendiniu vadinsime tokį solenoidinį (t.y.* $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$*) vektorinį lauką* $\mathbf{u} \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$*, kuris tenkina kraštinę sąlygą* $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{a}$ *ir integralinę tapatybę*

$$\nu \int\limits_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\eta} \, dx = \int\limits_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dx,$$

kiekvienai funkcijai $\boldsymbol{\eta} \in C_0^\infty(\Omega)$*,* $\operatorname{div} \boldsymbol{\eta} = 0$*.*

Mes ieškome (1) uždavinio sprendinio $(\mathbf{u}, p)$ tokiu pavidalu

$$\mathbf{u}(x) = \xi(x_n) \mathbf{U}^{[J^*-1]}(x'/x_n^\lambda, x_n) + \mathbf{V}(x) + \widehat{\mathbf{U}}(x), \tag{5}$$

$$p(x) = \xi(x_n) P^{[J^*-1]}(x'/x_n^\lambda, x_n) + \widehat{P}(x), \tag{6}$$

čia $x = (x', x_n)$, $\xi \in C^\infty[0, \infty)$ yra nupjautinė funkcija

$$\xi(t) = \begin{cases} 1, & t \leq H/2, \\ 0, & t \geq H, \end{cases} \tag{7}$$

funkcijos $(\mathbf{U}^{[J^*-1]}, P^{[J^*-1]})$ yra disertacijoje sukonstruota sprendinio asimptotinė išraiška šalia taško O; funkcija $\mathbf{V} = 0$, kai

$x_n \leq H/2$ ir kai $x_n \geq H$, o kai $x_n \in (H/2, H)$ funkcija $\mathbf{V} \in W^{1,2}(\Omega_{H/2,H})$ yra tokio divergencijos uždavinio sprendinys:

$$\begin{cases} \mathrm{div}\mathbf{V} &= -\xi' U_n^{[J^*-1]}, \quad x \in \Omega_{H/2,H}, \\ \mathbf{V} &= \mathbf{a}, \qquad\qquad x \in \partial\Omega_{H/2,H}, \end{cases} \tag{8}$$

ir mes pratęsiame funkciją $\mathbf{a}$ nuliu plokštumoje $x_n = H/2$, čia

$$\Omega_{H/2,H} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x'| < \varphi(x_n), \, x_n \in [H/2, H]\} \cup \Omega_0. \tag{9}$$

Galiausiai, $(\widehat{\mathbf{U}}, \widehat{P})$ – apibendrintasis stacionaraus Stokso uždavinio su nuline kraštine sąlyga sprendinys:

$$\begin{cases} -\nu\Delta\widehat{\mathbf{U}} + \nabla\widehat{P} &= f^*, \quad x \in \Omega, \\ \mathrm{div}\,\widehat{\mathbf{U}} &= 0, \quad x \in \Omega, \\ \widehat{\mathbf{U}} &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{10}$$

čia $f^* \in L^2(\Omega)$.

Disertacijoje įrodoma tokia sprendinio egzistavimo teorema:

1 Teorema. *Tegul* $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)$, $\mathbf{a} \in W^{1/2,2}(\partial\Omega_{H/2,H})$ *yra duotos funkcijos,* $\mathrm{supp}\,\mathbf{a} \subset \partial\Omega_0 \cap \partial\Omega \subset \partial\Omega_{H/2,H} \cap \partial\Omega$. *Tuomet egzistuoja bent vienas* (1) *uždavinio apibendrintasis sprendinys* $\mathbf{u} \in W^{1,2}_{loc}(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega_{H/2,H})$, *kurį galima išreikšti* (5) *suma. Be to, galioja įvertis*

$$\|\mathbf{u} - \xi\mathbf{U}^{[J^*-1]}\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C\left(\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{a}\|_{W^{1/2,2}(\partial\Omega_{H/2,H})}\right).$$

5.2 Laiko atžvilgiu periodinis Stokso uždavinys

Nagrinėdami laiko atžvilgiu periodinį Stokso uždavinį (2) mes tariame, kad funkcijos $\mathbf{f}$ ir $\mathbf{a}$ yra periodinės laiko atžvilgiu, t.y. $\mathbf{f}(x,0) = \mathbf{f}(x,2\pi)$, $\mathbf{a}(x,0) = \mathbf{a}(x,2\pi)$; be to, $\mathrm{supp}\,\mathbf{a} \subset \partial\Omega_0 \cap \partial\Omega$ ir

$$\int\limits_{\partial\Omega} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}\, dS = -F(t). \tag{11}$$

2 Apibrėžimas. *Apibendrintuoju* (2) *uždavinio sprendiniu vadinsime solenoidinį laiko atžvilgiu periodinį vektorinį lauką* $\mathbf{u} \in L^2(0,2\pi; W^{1,2}_{loc}(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega_{H/2,H}))$ *su* $\mathbf{u}_t \in L^2(0,2\pi; L^2_{loc}(\Omega) \cap L^2(\Omega_{H/2,H}))$, *tenkinantį kraštinę sąlygą* $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{a}$ *ir integralinę tapatybę*

$$\int_0^{2\pi}\int_\Omega \mathbf{u}_\tau(x,\tau)\cdot\boldsymbol{\eta}(x,\tau)\,dxd\tau + \nu\int_0^{2\pi}\int_\Omega \nabla\mathbf{u}(x,\tau)\cdot\nabla\boldsymbol{\eta}(x,\tau)\,dxd\tau$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_\Omega \mathbf{f}(x,\tau)\cdot\boldsymbol{\eta}(x,\tau)\,dxd\tau,$$

kiekvienai solenoidinei laiko atžvilgiu periodinei funkcijai $\boldsymbol{\eta} \in L^2\big(0,2\pi;\, C_0^\infty(\Omega)\big)$.

Mes ieškome (2) uždavinio sprendinio $(\mathbf{u}, p)$ tokiu pavidalu

$$\mathbf{u}(x,t) = \xi(x_n)\mathbf{U}^{[J^*-1]}(x'/x_n^\lambda, x_n, t) + \mathbf{V}(x,t) + \widehat{\mathbf{U}}(x,t), \quad (12)$$

$$p(x,t) = \xi(x_n)P^{[J^*-1]}(x'/x_n^\lambda, x_n, t) + \widehat{P}(x,t), \quad (13)$$

čia $x = (x', x_n)$, $\xi \in C^\infty[0,\infty)$ yra nupjautinė funkcija (7), funkcijos $(\mathbf{U}^{[J^*-1]}, P^{[J^*-1]})$ yra disertacijoje sukonstruota sprendinio asimptotinė išraiška šalia taško O; funkcija $\mathbf{V}(x', x_n, t) = 0$, kai $x_n \le H/2$, o kai $x_n \ge H/2$, funkcija $\mathbf{V}$ yra (8) divergencijos uždavinio sprendinys, kur visos funkcijos priklauso nuo kintamųjų (x,t). Galiausiai, $(\widehat{\mathbf{U}}, \widehat{P})$ yra apibendrintasis laiko atžvilgiu periodinio Stokso uždavinio su nuline kraštine sąlyga sprendinys

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{U}}_t - \nu\Delta\widehat{\mathbf{U}} + \nabla\widehat{P} = \mathbf{f}^*, & x \in \Omega,\\ \operatorname{div}\widehat{\mathbf{U}} = 0, & x \in \Omega,\\ \widehat{\mathbf{U}} = 0, & x \in \partial\Omega,\\ \widehat{\mathbf{U}}(x,0) = \widehat{\mathbf{U}}(x,2\pi), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (14)$$

čia $\mathbf{f}^* \in L^2(\Omega)$.

Disertacijoje įrodoma tokia sprendinio egzistavimo teorema:

2 Teorema. *Tegul* $\mathbf{f} \in L^2(0,2\pi; L^2(\Omega))$, $\mathbf{a}$, $\dfrac{\partial^k \mathbf{a}}{\partial t^k} \in L^2(0,2\pi; W^{1/2,2}(\partial\Omega_{H/2,H}))$, $k = 1, \ldots, J^* + 1$, *yra duotos laiko atžvilgiu periodinės funkcijos,* $\operatorname{supp}\mathbf{a} \subset \partial\Omega_0 \cap \partial\Omega \subset \partial\Omega_{H/2,H} \cap \partial\Omega$. *Tuomet egzistuoja bent vienas* (2) *uždavinio apibendrintasis laiko atžvilgiu periodinis sprendinys* $\mathbf{u} \in L^2(0,2\pi; W^{1,2}_{loc}(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega_{H/2,H}))$, $\mathbf{u}_t \in L^2(0,2\pi; L^2_{loc}(\Omega) \cap L^2(\Omega_{H/2,H}))$, *kuris gali būti išreikštas* (12) *suma. Be to, galioja įvertis*

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in[0,2\pi]} \|\mathbf{u}(\cdot,t) - \xi(\cdot)\mathbf{U}^{[J^*-1]}(\cdot,t)\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} \\
&+\|\mathbf{u} - \xi\mathbf{U}^{[J^*-1]}\|^2_{L^2(0,2\pi;W^{1,2}(\Omega))} + \|\mathbf{u}_t - \xi\mathbf{U}_t^{[J^*-1]}\|^2_{L^2(0,2\pi;L^2(\Omega))} \\
&\le C\Big(\|\mathbf{f}\|^2_{L^2(0,2\pi;L^2(\Omega))} + \|\mathbf{a}\|^2_{L^2(0,2\pi;W^{1/2,2}(\partial\Omega_{H/2,H}))} \\
&+ \sum_{k=1}^{J^*+1} \Big\|\frac{\partial^k \mathbf{a}}{\partial t^k}\Big\|^2_{L^2(0,2\pi;W^{1/2,2}(\partial\Omega_{H/2,H}))}\Big).
\end{aligned}$$

5.3 Nestacionarus Stokso uždavinys

Nagrinėdami nestacionarų Stokso uždavinį (3) mes tariame, kad $\operatorname{supp}\mathbf{a} \subset \partial\Omega_0 \cap \partial\Omega$ ir

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\, dS = -F(t). \tag{15}$$

Be to, laikome, kad funkcija $\mathbf{b}$ yra išreikšta kaip suma

$$\mathbf{b}(x) = \zeta(x_n)\mathbf{u}_{sing}(x) + \mathbf{u}_0(x), \tag{16}$$

čia ζ yra glodi nupjautinė funkcija: $\zeta(t) = 1$, kai $t \le H/2$, ir $\zeta(t) = 0$, kai $t \ge H$,

$$\mathbf{u}_{sing}(x) = \Big(x_n^{-\lambda(n-2)-1}\boldsymbol{u}'_s\big(x'x_n^{-\lambda}\big),\ x_n^{-\lambda(n-1)}u_{n,s}\big(x'x_n^{-\lambda}\big)\Big),$$

ir $\boldsymbol{u}'_s, u_{n,s} \in \mathring{W}^{1,2}(\omega)$, $\omega = \{y' \in \mathbb{R}^{n-1} : |y'| < \gamma_0\}$, $\mathbf{u}_0 \in W^{1,2}(\Omega)$, $y' = x' x_n^{-\lambda}$. Be to, funkcijos $\mathbf{b}$ ir $\mathbf{a}$ turi tenkinti būtinąsias suderinamumo sąlygas

$$\operatorname{div} \mathbf{b}(x) = 0, \quad \mathbf{b}(x)|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}_0(x)|_{\partial\Omega} = \mathbf{a}(x,0). \tag{17}$$

Singuliarioji pradinės sąlygos $\mathbf{b}$ dalis $\mathbf{u}_{sing}$ yra solenoidinė ir yra „atsakinga“ už srautą taške O laiko momentu $t = 0$:

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_{sing} = 0, \qquad \int\limits_{\sigma(h)} \mathbf{u}_{sing} \cdot \mathbf{n} \, dS = F(0) \quad \forall h \in (0, H/2). \tag{18}$$

Iš (15) seka, kad

$$\int\limits_{\partial\Omega} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} \, dS = -F(0). \tag{19}$$

Be to, mes tariame, kad galioja sąlyga parametrui λ

$$-\lambda(n + 1 - 2k) + 1 - 2k \neq 0, \tag{20}$$

čia $n = 2, 3,\ k \in \mathbb{N}$.

3 Apibrėžimas. *Apibendrintuoju (3) uždavinio sprendiniu vadinsime solenoidinį vektorinį lauką* $\mathbf{u} \in L^2(0,T; W^{1,2}(\Omega \setminus \Omega_h))$ *su* $\mathbf{u}_t \in L^2(0,T; L^2(\Omega \setminus \Omega_h))$, $\forall h \in (0, H)$, *tenkinantį kraštinę sąlygą* $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{a}$, *pradinę sąlygą* $\mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0(x) + \zeta(x_n)\mathbf{u}_{sing}(x)$ *ir integralinę tapatybę*

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \mathbf{u}_\tau(x,\tau) \cdot \boldsymbol{\eta}(x,\tau) \, dx d\tau + \nu \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \nabla \mathbf{u}(x,\tau) \cdot \nabla \boldsymbol{\eta}(x,\tau) \, dx d\tau = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \mathbf{f}(x,\tau) \cdot \boldsymbol{\eta}(x,\tau) \, dx d\tau,$$

kiekvienai solenoidinei funkcijai $\boldsymbol{\eta} \in L^2\left(0,T; C_0^\infty(\Omega)\right)$.

Mes ieškome (3) uždavinio sprendinio $(\mathbf{u}, p)$ tokiu pavidalu

$$\mathbf{u}(x,t) = \xi(x_n)\mathbf{U}^{[J^*-1]}\left(x'/x_n^{\lambda}, x_n, t, t/x_n^{2\lambda}\right) + \widehat{\mathbf{U}}(x,t), \qquad (21)$$

$$p(x,t) = \xi(x_n)P^{[J^*-1]}\left(x'/x_n^{\lambda}, x_n, t, t/x_n^{2\lambda}\right) + \widehat{P}(x,t), \qquad (22)$$

čia $x = (x', x_n)$, $\xi \in C^{\infty}[0,\infty)$ yra nupjautinė funkcija (7), funkcijos $(\mathbf{U}^{[J^*-1]}, P^{[J^*-1]})$ yra disertacijoje sukonstruota sprendinio asimptotinė išraiška šalia taško O, $(\widehat{\mathbf{U}}, \widehat{P})$ yra apibendrintasis nestacionaraus Stokso uždavinio sprendinys:

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{U}}_t(x,t) - \nu\Delta\widehat{\mathbf{U}}(x,t) + \nabla\widehat{P}(x,t) = \mathbf{f}^*(x,t), \\ \operatorname{div}\widehat{\mathbf{U}}(x,t) = -\xi'(x_n)U_n^{[J^*-1]}(x,t), \\ \widehat{\mathbf{U}}(x,t)|_{\partial\Omega} = \mathbf{a}(x), \\ \widehat{\mathbf{U}}(x,0) = \mathbf{u}_0(x), \end{cases} \qquad (23)$$

čia $x \in \Omega$, $\mathbf{f}^* \in L^2(\Omega)$, $\mathbf{u}_0(x) \in W^{1,2}(\Omega)$.

Disertacijoje įrodoma tokia sprendinio egzistavimo teorema:

3 Teorema. *Tarkime, kad galioja* (20). *Tegul* $\mathbf{f} \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$, $\mathbf{u}_0 \in W^{1,2}(\Omega)$, $\mathbf{u}_s \in \mathring{W}^{1,2}(\omega)$, $\mathbf{a}$, $\dfrac{\partial^k \mathbf{a}}{\partial t^k} \in L^2(0,T; W^{1/2,2}(\partial\Omega_{H/2,H}))$, $k = 1, \dots, J^* + 1$, *yra duotos funkcijos ir yra tenkinamos suderinamumo sąlygos* (17), (18), (19); *be to,* $\operatorname{supp}\mathbf{a} \subset \partial\Omega_0 \cap \partial\Omega \subset \partial\Omega_{H/2,H} \cap \partial\Omega$. *Tuomet egzistuoja bent vienas* (3) *uždavinio apibendrintasis sprendinys* $\mathbf{u} \in L^2(0,T; W^{1,2}(\Omega \setminus \Omega_h))$, $\mathbf{u}_t \in L^2(0,T; L^2(\Omega \setminus \Omega_h))$ $\forall h \in (0,H)$, *kuris gali būti išreikštas* (21) *suma. Be to, galioja įvertis*

$$\begin{aligned} &\sup_{t\in[0,T]} \|\mathbf{u}(\cdot,t) - \xi(\cdot)\mathbf{U}^{[J^*-1]}(\cdot,t)\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} \\ &+\|\mathbf{u} - \xi\mathbf{U}^{[J^*-1]}\|^2_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))} + \|\mathbf{u}_t - \xi\mathbf{U}_t^{[J^*-1]}\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\ &\le C\Big(\|\mathbf{f}\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|\mathbf{a}\|^2_{L^2(0,T;W^{1/2,2}(\partial\Omega_{H/2,H}))} \\ &+ \sum_{k=1}^{J^*+1} \|\frac{\partial^k \mathbf{a}}{\partial t^k}\|^2_{L^2(0,T;W^{1/2,2}(\partial\Omega_{H/2,H}))} + \|\mathbf{u}_0\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} + \|\mathbf{u}_s\|^2_{W^{1,2}(\omega)}\Big). \end{aligned}$$

Pastaba. Skaičius $J^* \in \mathbb{N}$ yra mažiausias pakankamas skaičius, kuris garantuoja, kad $f^* \in L^2(\Omega)$ (disertacijoje yra pateiktos formulės jam apskaičiuoti). Jis priklauso nuo parametro λ reikšmės.

6 Rezultatų naujumas

Disertacijoje gauti rezultatai yra nauji. Srityse su smailuma stacionaraus, laiko atžvilgiu periodinio ir nestacionaraus Stokso uždavinių singuliariųjų sprendinių išraiška sukonstruota pirmą kartą. Tokių sprendinių egzistavimas iki šiol nebuvo įrodytas. Pasienio sluoksnio (laiko atžvilgiu) konstravimas, kai greitasis laikas priklauso nuo erdvinio kintamojo, yra naujas. Mes nežinome nei vieno darbo kur būtų naudojama tokia koordinačių transformacija.

7 Aprobacija

Disertacijos rezultatai buvo pristatyti Diferencialinių lygčių ir skaičiavimo matematikos (VU, MIF) bei Matematinio modeliavimo (VGTU, FMF) katedrų seminaruose, o taip pat šiose mokslinėse konferencijose:

- *Asymptotic Problems, Elliptic and Parabolic Issues,* Vilnius, Lietuva, 2015 m. birželio 1 - 5 d.

- *Classical Problems and New Trends in Mathematical Fluid Mechanics,* Ferara, Italija, 2014 m. rugsėjo 29 - spalio 3 d.

- *Advances in Mathematical Fluid Mechanics,* Lisabona, Portugalija, 2014 m. birželio 30 - liepos 5 d.

- *55th Conference of Lithuanian Mathematical Society,* Vilnius, Lietuva, 2014 birželio 26 - 27 d.

Doktorantų mokykloje

- *12th School "Mathematical Theory in Fluid Mechanics"*, Kacov, Čekija, 2013 gegužės 24 - 31 d.

8 Publikacijos

Disertacijos rezultatai yra publikuoti šiuose straipsniuose:

1. A. Eismontaite, K. Pileckas, On singular solutions of time-periodic and steady Stokes problems in a power cusp domain, *Applicable Analysis*, **97**(3) (2018), 415–437.

2. A. Eismontaite, K. Pileckas, On singular solutions of the initial boundary value problem for the Stokes system in a power cusp domain, *Applicable Analysis*, (2018), Advanced online publication: 20 Apr 2018, https://doi.org/10.1080/00036811.2018.1460815.

9 Išvados

Disertacijoje nagrinėti stacionarus, laiko atžvilgiu periodinis ir nestacionarus Stokso uždaviniai (1)-(3) srityse su smailuma (angl. power cusp domains). Tokių sričių kraštui priklauso singuliarus taškas O. Šiame taške esama šaltinio arba nuotakos, t.y. visiems trims uždaviniams užduodamas nenulinis srautas.

- *Srityse su smailuma stacionaraus, laiko atžvilgiu periodinio ir nestacionaraus Stokso uždavinių sprendiniai yra būtinai singuliarūs ir jų singuliarumas priklauso nuo srities parametro λ.*

Tam kad galėtume išspręsti suformuluotus uždavinius, turėjome formaliai sukonstruoti sprendinio asimptotinę išraišką šalia singuliaraus krašto taško.

- *Formaliąją stacionaraus ir laiko atžvilgiu periodinio Stokso uždavinių asimptotiką sudaro tik išorinė asimptotinė dalis (angl.* outer asymptotics*);*

- *Formaliąją nestacionaraus Stokso uždavinio asimptotiką sudaro išorinė ir vidinė (pasienio sluoksnis laiko atžvilgiu) asimptotinės dalys (angl.* inner asymptotics, boundary-layer-in-time*);*

- *Greitasis laikas (angl.* fast time*) pasienio sluoksnio konstravime priklauso nuo erdvinio kintamojo.*

Disertacijoje buvo įrodytas singuliaraus sprendinio egzistavimas.

- *Visų trijų uždavinių (stacionaraus, laiko atžvilgiu periodinio ir nestacionaraus) sprendinys gali būti išreikštas kaip asimptotinio skleidinio ir nario su baigtine energija suma;*

- *Disertacijoje plėtojami metodai gali būti pritaikyti analogiškų netiesinių uždavinių sprendimui, t.y. Navjė-Stokso lygtims.*

10 Summary

In the dissertation we considered stationary, time-periodic and nonstationary Stokes problems (1)-(3) in domains $\Omega = \Omega_H \cup \Omega_0$ having a singular point O on the boundary. We assumed that there is a source or a sink of the fluid in the cusp point O. Therefore, the solutions are necessary singular.

The main objective of the thesis was to prove the existence of singular solutions to stationary, time-periodic and nonstationary Stokes problems in the case when the boundary value $\mathbf{a}$ has nonzero fluxes, i.e. there hold additional flux conditions (4), (11) and (15). In order to do that, we constructed the formal asymptotic expansion of the solutions near the singular point of the boundary. This approach allowed us to reduce the initial problem to a finite number of problems which solvability is well known.

In the case of the stationary and time-periodic Stokes problems the constructed asymptotic expansion contains only the outer asymptotics terms, while, in the case of the nonstationary Stokes problem, the formal asymptotic expansion contains both outer and inner (boundary-layer-in-time) asymptotics terms. Moreover, the fast time in the boundary layer asymptotics depends on the space variable. This coordinate transformation is new and promising to be of much use in solving the nonlinear Navier-Stokes equations.

Finally, the existence of singular solution was proved, i.e. it was shown that for all three problems (stationary, time-periodic and nonstationary) the solution can be constructed as a sum of the asymptotic expansion and the term with finite energy.

Literatūra

[1] H. Kim, H. Kozono, A removable isolated singularity theorem for the stationary Navier-Stokes equations, *J. Diff. Equations*, **220** (2006), 68–84.

[2] M.B. Korobkov, K. Pileckas, V.V. Pukhnachev, R. Russo, The Flux Problem for the Navier-Stokes Equations, *Uspech Mat. Nauk*, **69**(6) (2014), 115–176. English Transl.: *Russian Math. Surveys*, **69**(6) (2015), 1065–1122.

[3] V.G. Maz'ya, S.A. Nazarov, B.A. Plamenevskij, Asymptotics of the solution of the Dirichlet problem in domains with a thin cross piece, *Funkt. Anal. i Prilozhen.*, **16**(2) (1982), 39–46. English Transl.: *Funct. Anal. Appl.*, **16** (1982) 108-114.

[4] V.G. Maz'ya, S.A. Nazarov, B.A. Plamenevskij, The Dirichlet problem in domains with thin cross connections, *Sibirsk. Mat. Zh.*, **25**(2) (1984), 161–179. English Transl.: *Sib. Math. J.*, **25** (4) (1984) 297-313.

[5] V.G. Maz'ya, S.A. Nazarov, B.A. Plamenevskij, *Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains*, Vol. 2, Birkhäuser-Verlag, Basel, Boston, Berlin, (2000).

[6] S.A. Nazarov, The structure of solutions of elliptic boundary value problems in thin domains, *Vestnik Leningrad.*

Univ., Ser. Mat. Mekh. Astr. vyp., **7**(2) (1982), 65–68. English Transl.: *Vestnik Leningrad Univ. Math.* **15** (1983).

[7] S.A. Nazarov, Asymptotic solution of the Navier–Stokes problem on the flow of a thin layer of fluid, *Sibirsk. Mat. Zh.,* **31**(2) (1990), 131–144. English Transl.: *Siberian Math. Journal*, **31** (1990) 296-307.

[8] S.A. Nazarov, K. Pileckas, The Reynolds flow of a fluid in a thin three-dimesional channel, *Litovskii Mat. Sb.*, **30** (1990), 772–783. English Transl.: *Lithuanian Math. J.*, **30** (1990).

[9] S.A. Nazarov, K. Pileckas, Asymptotics of Solutions to Stokes and Navier-Stokes equations in domains with paraboloidal outlets to infinity, *Rend. Sem. Math. Univ. Padova*, **99** (1998), 1–43.

[10] G. Panasenko, K. Pileckas, Asymptotic analysis of the nonsteady viscous flow with a given flow rate in a thin pipe, *Applicable Analysis*, **91**(3) (2012), 559–574.

[11] G. Panasenko, K. Pileckas, Asymptotic analysis of the non-steady Navier-Stokes equations in a tube structure. I. The case without boundary-layer-in-time, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **122** (2015), 125–168.

[12] G. Panasenko, K. Pileckas, Asymptotic analysis of the non-steady Navier-Stokes equations in a tube structure. II. General case, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **125** (2015), 582–607.

[13] V.V. Pukhnachev, Singular solutions of Navier-Stokes equations, *Advances in Mathematical Analysis of PDEs, Proc. St. Petersburg Math. Soc. XV*, AMS Transl. Series 2. **232** (2014), 193–218.

[14] A. Russo, A. Tartaglione, On the existence of singular solutions of the stationary Navier-Stokes problem, *Lithuanian Math. J.*, **53**(4) (2013), 423–437.

Trumpos žinios apie disertacijos autorių

Gimimo data ir vieta

1986 metų liepos 24 diena, Vilnius.

Išsilavinimas

- 1998–2006 Vilniaus jėzuitų gimnazija.
- 2006–2010 Matematikos bakalauras, Vilniaus universitetas.
- 2010–2012 Matematikos magistras (Magna cum laude), Vilniaus universitetas.
- 2012–2018 Matematikos doktorantūros studijos, Vilniaus universitetas.

Akademinio darbo patirtis

- 2011–2012 Laborantė, Vilniaus universitetas.
- 2012–2015 Jaunesnioji mokslo darbuotoja bendrame Vilniaus universiteto ir Ciuricho universiteto mokslinių tyrimų projekte "Asymptotic Problems and Applications" (projektas finansuojamas Lietuvos ir Šveicarijos bendradarbiavimo programos "Research and Development" pagal sutartį nr. ŠMM-3-01/01). Projekto vadovas – prof. K. Pileckas.
- 2013–dabar Asistentė, Vilniaus universitetas.

UŽRAŠAMS

Vilniaus universiteto leidykla
Universiteto g. 1, LT-01513 Vilnius
El. p. info@leidykla.vu.lt,
www.leidykla.vu.lt
Tiražas 40 egz.