VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Magistro studijų baigiamasis darbas

Dispersijų santykio testai ir jų apibendrinimai finansų rinkų efektyvumo tikrinimui

Variance ratio tests and their generalizations for testing the market efficiency

Laurynas Jasiukėnas

VILNIUS 2017

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
EKONOMETRINĖS ANALIZĖS KATEDRA

Darbo vadovas prof. habil. dr. Remigijus Leipus ______________

Darbas apgintas ______________

Registravimo NR. ______________

Dispersijų santykio testai ir jų apibendrinimai finansų rinkų efektyvumo tikrinimui

Santrauka

Šiame darbe aprašomi keturi dispersijų santykio testai, skirti atsitiktinio klaidžiojimo hipotezei tikrinti. Šie testai leidžia daryti išvadas, ar finansų rinkos pasižymi silpnos formos efektyvumu. Empiriškai įvertinamos šių testų galios su skirtingais imties dydžiais. Taip pat testai pritaikomi Baltijos šalių akcijų indeksams. Vilniaus atveju dauguma testų leidžia daryti išvadas, kad rinka pasižymi silpnos formos efektyvumu. Tačiau Talino bei Rygos atvejais skirtingi testai siūlo daryti skirtingas išvadas. Šiame darbe taip pat pasiūlomos Kim statistikos, kuri remiasi dalinių sumų santykiu, modifikacijos. Monte Karlo modeliavimo metodu išmatavus testo galias, rezultatai parodė, kad siūlomos modifikacijos pagerina testo galią. Taip pat nebuvo pastebėta reikšmingų testo dydžio nuokrypių nuo pasirinkto reikšmingumo lygmens, kai teisinga nulinė hipotezė.

Raktiniai žodžiai: Atsitiktinio klaidžiojimo hipotezė; Dispersijų santykio testai; Efektyvios rinkos hipotezė.

Variance ratio tests and their generalizations for testing the market efficiency

Abstract

This paper reviews the variance-ratio tests of random walk hypothesis. In this work, various tests including the individual and multiple variance-ratio, rank, sign, and subsampling tests are presented. Powers of tests were examined by using Monte-Carlo simulations. We investigated the weak-form efficiency for Tallinn, Riga and Vilnius stock markets indices. It was shown, that stock prices of Vilnius stock market follows a random walk, but there are some exceptions of Tallin and Riga stock markets. Also, we present the modifications of Kim test, that is based on the partial sums ratio. It was demonstrated, that test modifications have no size distortions and improve tests power.

Key words: Random walk hypothesis; Variance ratio tests; Market efficiency.

Turinys

Įvadas

Finansų rinkose investuotojus dažnai domina galimybė užsidirbti nerizikuojant. Tačiau tokios galimybės nelieka, kai finansų rinka yra efektyvi. Jei rinka yra efektyvi, tai akcijų kainos pilnai atspindi visą žinomą bei su tuo susijusią informaciją [4,5]. Priklausomai nuo to, kokia informacija remiamasi, yra skiriamos trys pagrindinės efektyvumo formos - silpna, vidutinė bei stipri. Vidutinė reiškia, kad dabarties kainos parodo visą šiuo momentu prieinamą viešą informaciją. Stipri forma reiškia, kad dabarties kainos parodo visą dabarties momentu prieinamą informaciją (ir viešai neatskleistą). Šiame darbe bus kalbama apie silpnos formos rinkos efektyvumo hipotezės tikrinimą. Silpnos formos rinkos efektyvumo sąvoka reiškia, kad dabarties kainos parodo visą informaciją apie praeities kainas. Tai reiškia, kad remiantis tik informacija apie praeities kainas, prognozuoti ateities kainų yra neįmanoma. Šio tipo efektyvumo hipotezė siejasi su atsitiktinio klaidžiojimo hipoteze, t.y. $p_t = p_{t-1} + x_t$ [1]. Šiame darbe būtent ir yra aprašomi plačiai naudojami dispersijų santykio testai, kurie skirti atsitiktinio klaidžiojimo hipotezei tikrinti, kai x_t yra vienodai ir nepriklausomai pasiskirstę arba tenkinantys sąlygas, kurios leidžia sąlyginį heteroskedastiškumą, atsitiktiniai dydžiai.

Pradedant Lo ir MacKinlay [9], dispersijų santykio testai yra įrankis, kuris plačiai naudojamas tikrinant silpnos formos rinkos efektyvumo hipotezę, t.y dispersijų santykio testai naudojami tikrinant atsitiktinio klaidžiojimo hipotezę su stacionarumo alternatyva. Jų metodologija remiasi tuo, kad jei akcijų grąžos yra visiškai atsitiktinės, tai grąžų dispersija yra tiesinė visuose laiko intervaluose, t.y. k periodų grąžos dispersija yra vieno periodo grąžos dispersija padauginta iš periodų skaičiaus k. Taigi, atsitiktinio klaidžiojimo procesui šių dispersijų santykis turi būti lygus 1 su visomis k reikšmėmis.

Campbell, Lo, MacKinlay [1] išskiria kelias nulines atsitiktinio klaidžiojimo hipotezes su skirtingomis prielaidomis apie $\{x_t\}_{t=1}^{T}$ procesą: pirma - x_t laikomi vienodai ir nepriklausomai pasiskirstę, antra - x_t pasižymi sąlyginiu heteroskedastiškumu (nepriklausomai, bet nevienodai pasiskirstę). Lo ir MacKinlay [9] pasiūlė du testus atitinkamoms nulinėms hipotezėms tikrinti. Tačiau, Lo ir MacKinlay testai statistikos skirstinius imtyje aproksimuoja asimptotiniu skirstiniu (normaliuoju). Todėl baigtinės imtys gali netenkinti normalumo prielaidos bei būti per mažos, kad pritaikytume asimptotines savybes [2, 13]. Tai gali vesti prie neteisingų statistinių išvadų. Spręsdamas šį testų trūkumą, Wright [13] pasiūlė neparametrinius ženklų bei ranginius testus.

Lo ir MacKinlay bei Wright testai nulinę hipotezę tikrina pasirinktam k. Tačiau, ji turi galioti visiems k periodams. Tuo tikslu, Chow ir Denning [3] pasiūlė statistines išvadas daryti remiantis maksimalia absoliučia Lo ir MacKinlay statistikos reikšme pasirinktiems k_i, čia $i = 2, \ldots, l$. Taip pat Whang ir Kim [12] pasiūlė testą, paremtą imčių perrinkimo procedūra, kurios pagalba yra aproksimuojamas imties statistikos skirstinys.

Šio darbo tikslai yra apžvelgti esamus dispersijų santykio testus, palyginti Monte Karlo modeliavimo metodo pagalba gautas jų galias skirtingiems imties dydžiams bei pritaikyti testus realiems duomenims (Baltijos šalių akcijų indeksams). Taip pat bus pasiūlytos Kim statistikos, kuri remiasi dalinių sumų santykiu, modifikacijos ir empiriškai išmatuoti testų, kurie remiasi statistikos modifikacijomis, dydžiai bei palygintos testų galios. Modifikuoti testai taip pat bus pritaikomi Baltijos šalių akcijų indeksams.

Darbas pateikiamas tokia tvarka. Pirmame skyriuje pateikiami apibrėžimai, antrame bei trečiame skyriuose aprašomi dispersijų santykiu paremti testai. Ketvirtame skyriuje pateikiama Kim statistika bei jos modifikacijos. Tiriamojoje dalyje (penktas skyrius) Monte Karlo modeliavimo metodo pagalba matuojama aprašytų testų galia prie skirtingų alternatyvų, taip pat testai yra pritaikomi Baltijos šalių akcijų indeksams. Penktas skyrius baigiamas Kim statistikos modifikacijų galios tyrimu (Monte Karlo modeliavimo metodo pagalba) prie skirtingų alternatyvų bei atitinkamų testų pritaikymu Baltijos šalių akcijų indeksams. Darbas baigiamas išvadomis, yra pateikiama papildoma informacija, literatūros sąrašas, R kodas.

1. Dispersijų santykio testai

1.1. Apibrėžimas

Tarkime, stebimas kintamasis yra P_t – akcijų kainos vertė laiko momentu t. Pažymėkime $p_t = \ln P_t$, tada $x_t = p_t - p_{t-1}$ yra vieno periodo logaritminė grąža momentu t. Tarkime turime T stebėjimų x_t. Apibrėžkime k periodų dispersijų santykį $V(k)$:

$$V(k) = \frac{\mathrm{Var}(x_t + x_{t-1} + ... + x_{t-k+1})/k}{\mathrm{Var}(x_t)} = \frac{\mathrm{Var}(p_t - p_{t-k})/k}{\mathrm{Var}(p_t - p_{t-1})},$$

čia $\mathrm{Var}(x_t + x_{t-1} + ... + x_{t-k+1})$ – k periodų grąžos dispersija, o $\mathrm{Var}(x_t)$ – vieno periodo grąžos dispersija.

Pagrindinė idėja, kuria remiasi dispersijų santykio testai, yra ta, kad jei grąžos laike yra nekoreliuotos, tai turime turėti:

$$\mathrm{Var}(x_t + x_{t-1} + ... + x_{t-k+1}) = k\,\mathrm{Var}(x_t).$$

Tai yra:

$$V(k) = 1.$$

Remiantis dispersijų santykiu, testai, kurie yra aprašomi šiame darbe, tikrina nulinę hipotezę, kad procesas $\{p_t\}_{t=1}^T$ yra:

$$H_0 : p_t = p_{t-1} + x_t.$$

Priklausomai nuo to, kokias sąlygas tenkina x_t, skiriamos kelios nulinės hipotezės:

1. x_t yra vienodai bei nepriklausomai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai. Literatūroje tai yra vadinama pirmąja atsitiktinio klaidžiojimo hiopoteze;

2. x_t yra nepriklausomai, bet nevienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai. Literatūroje tai yra vadinama antrąja atsitiktinio klaidžiojimo hipoteze (priedas Nr. 4.).

Prie šių prielaidų dispersijų santykis turi būti lygus vienam: $V(k) = 1$. Antrosios prielaidos atveju $V(k) = 1$ lygus tol, kol grąžų x_t dispersija yra baigtinė bei $\sum_{t=1}^{T} \mathrm{Var}(x_t)/T$ konverguoja į teigiamą baigtinį skaičių [1]. Alternatyvios hipotezės gali būti, kad procesas $\{p_t\}_{t=1}^T$ stacionarus, tai yra autoregresijos atveju $0 \leq \rho < 1$: $p_t = \rho p_{t-1} + x_t$.

2. Testai pasirinktam periodui

Šioje dalyje bus aptariami testai, kurie nulinę hipotezę tikrina pasirinktam k.

2.1. Lo ir MacKinlay testas

Testas yra konstruojamas remiantis empiriniu $V(k)$ įverčiu:

$$VR(x;k) = \frac{\hat{\sigma}^2(k)}{\hat{\sigma}^2(1)}, \tag{1}$$

čia $\hat{\sigma}^2(1)$ yra nepaslinktas vieno periodo grąžos dispersijos įvertis:

$$\hat{\sigma}^2(1) = T^{-1} \sum_{t=1}^{T} (x_t - \hat{\mu})^2,$$

o $\hat{\mu} = T^{-1} \sum_{t=1}^{T} x_t$ yra vidurkio įvertis.

Vertinant k periodų grąžos dispersiją, dėl mažo duomenų kiekio ir norint pagerinti testo galią Lo ir MacKinlay [9] pasiūlė naudoti dispersijos įvertį:

$$\hat{\sigma}^2(k) = m^{-1} \sum_{t=k}^{T} (x_t + x_{t-1} + ... + x_{t-k+1} - k\hat{\mu})^2 = m^{-1} \sum_{t=k}^{T} (p_t - p_{t-k} - k\hat{\mu})^2,$$

čia $m = k(T - k + 1)(1 - kT^{-1})$.

Lo ir MacKinlay [9] parodė, kad jei x_t yra nepriklausomai ir vienodai pasiskirstę (pirmoji atsitiktinio klaidžiojimo hipotezė), tai pagal nulinę hipotezę $V(k) = 1$, testo statistika yra:

$$M_1(x;k) = \frac{VR(x;k) - 1}{\phi(k)^{1/2}}, \tag{2}$$

čia $\phi(k) = \frac{2(2k-1)(k-1)}{3kT}$. Kai $T \to \infty$:

$$M_1(x,k) \sim \mathcal{N}(0,1);$$

čia ir toliau taip bus žymima, kad atsitiktinis dydis asimptotiškai pasiskirstęs pagal normalųjų skirstinį.

Kai x_t tenkina antrosios atsitiktinio klaidžiojimo hipotezė prielaidas (prielaidos pateiktos priede Nr. 4.), Lo ir MacKinlay [9] pasiūlė testo statistiką:

$$M_2(x;k) = (VR(x;k) - 1) \left(\sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{2(k-j)}{k} \right)^2 \delta_j \right)^{-1/2}, \tag{3}$$

čia $\delta_j = \sum_{t=j+1}^{T}(x_t - \hat{\mu})^2(x_{t-j} - \hat{\mu})^2 / \left(\sum_{t=1}^{T}(x_t - \hat{\mu})^2\right)^2$. Kai $T \to \infty$:

$$M_2(x,k) \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Statistinės išvados daromos remiantis standartinio normaliojo skirstinio kritinėmis reikšmėmis.

Lo ir MacKinlay testų statistikos skirstiniai baigtinėse imtyse yra aproksimuojami asimptotiniu skirstiniu, todėl jie yra paslinkti ir asimetriški [2, 6, 13]. Taip pat pažymima, kad jie prastai aproksimuoja mažas imtis bei baigtinėse imtyse testo statistikos pasiskirstymas prie nulinės hipotezės dažnai yra asimetriškas ir netenkina normalumo prielaidos. Be to, yra keletas problemų, kai k reikšmė didelė palyginus su laiko periodu T [1]. Tokiais atvejais, nepriklausomai nuo duomenų, nulinė hipotezė gali būti priimama visada.

2.2. Wright testas

Kaip jau minėta, Lo ir MacKinlay testai imties statistikos pasiskirstymą aproksimuoja ribiniu skirstiniu. Dėl to testo statistikos pasiskirstymas imtyje gali būti toli nuo normaliojo [9]. Tai baigtinėse imtyse gali vesti prie testo galios iškraipymo ar mažos galios ir neteisingų statistinių išvadų. Tuo tikslu Wright [13] pasiūlė neparametrinį testą naudojant ženklus ir rangus. Šis testas turi keletą pranašumų prieš Lo ir MacKinlay [9]. Visų pirma, jis turi tikslų imties skirstinį, nereikia jo aproksimuoti asimptotiniu skirstiniu. Taip pat šie testai turi daugiau galios nei tradiciniai Lo ir MacKinlay testai, kai pažeista normalumo prielaida [13]. Taip pat Wrigth savo darbe parodė, kad jų siūlomas testas turi daugiau galios nei Lo ir MacKinlay, kai grąžos tenkina antrosios atsitiktinio klaidžiojimo hipotezės sąlygas.

Aprašysime, kaip yra formuojamas rangais paremtas testas, kai tikriname pirmąją nulinę hipotezę. Tarkime, turime grąžas $\{x_t\}_{t=1}^{T}$. Tegul $r(x)$ yra x_t rangas. Apibrėžiamas standartizuotas rangas $r_{1,t} = (r(x_t) - (T+1)/2)/((T-1)(T+1)/12)^{1/2}$. Pagal nulinę hipotezę, kai x_t yra nepriklausomai ir vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, $r(x_t)$ yra atsitiktinės skaičių 1,...,T kombinacijos su vienodomis tikimybėmis. Wright [13] pasiūlė R_1 ir R_2 statistikas:

$$R_1(k) = \left(\frac{(Tk)^{-1}\sum_{t=k}^{T}(r_{1,t} + ... + r_{1,t-k+1})^2}{T^{-1}\sum_{t=k}^{T} r_{1,t}^2} - 1\right)\phi(k)^{-1/2},$$

kurie turi tikslų imties skirstinį, čia

$$\phi(k) = \frac{2(2k-1)(k-1)}{3kT}.$$

Taip pat Wright pasiūlė apibrėžti standartizuotus rangus $r_{2,t} = \Phi^{-1}(\frac{r(x_t)}{T+1})$, kur Φ^{-1} yra atvirkštinė standartinio normaliojo atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija.

$$R_2(k) = \left(\frac{(Tk)^{-1} \sum_{t=k}^{T} (r_{2,t} + ... + r_{2,t-k+1})^2}{T^{-1} \sum_{t=k}^{T} r_{2,t}^2} - 1 \right) \phi(k)^{-1/2},$$

$$\phi(k) = \frac{2(2k-1)(k-1)}{3kT}.$$

Esant teisingai pirmąjai atsitiktinio klaidžiojimo hipotezei, testo statistikos R_1 bei R_2 yra pasiskirsčiusios pagal tą patį skirstinį. Kritinės reikšmės yra gaunamos Monte Karlo modeliavimo metodu. Wright savo darbe parodė, kad prie teisingos antrosios atsitiktinio klaidžiojimo hipotezės, kai x_t pasižymi sąlyginiu heteroskedastiškumu (priedas Nr. 4.), atitinkamų statistikų skirstiniai nėra tiksliai tokios išraiškos, bet testo galios iškraipymai yra maži.

Analogiškai, Wright apibrėžė statistiką, kuri yra paremta ženklais. Tarkime $s_t = 2u(x_t,0)$ ir $u(x_t,0) = \begin{cases} 0{,}5, & x_t > 0, \\ -0{,}5, & x_t \leq 0. \end{cases}$

Kai x_t tenkina antrosios nulinės hipotezės sąlygas (papildomos prielaidos priede Nr. 4.), s_t yra vienodai bei nepriklausomai pasiskirsčiusių dydžių seka su vidurkiu 0 bei dispersija 1, kuri įgyja reikšmes 1 arba -1 su tikimybe 0,5. Tuo remiantis, Wright [13] pasiūlė ženklais paremtą testo statistiką:

$$S_1(k) = \left(\frac{(Tk)^{-1} \sum_{t=k}^{T} (s_t + ... + s_{t-k+1})^2}{T^{-1} \sum_{t=k}^{T} s_t^2} - 1 \right) \phi(k)^{-1/2}.$$

Kritinės reikšmės gaunamos Monte Karlo modeliavimo metodo pagalba.

3. Kartotiniai testai

Aptarti Lo ir MacKinlay bei Wright testai nulinę hipotezę tikrina pasirinktam k periodui. Tačiau, nulinė hipotezė turi galioti visiems k. Šioje dalyje bus aprašomi dispersijų santykio testai, kai nulinė hipotezė yra tikrinama kelioms pasirinktoms k reikšmėms.

3.1. Chow ir Denning testas

Chow ir Denning [3] pažymi, kad taikant individualius testus kelioms pasirinktoms k reikšmėms, didėja I tipo klaidos tikimybės, t.y. tikimybė atmesti teisingą nulinę hipotezę gali būti didesnė nei pasirinktas reikšmingumo lygmuo. Todėl, Chow ir Denning pasiūlė tikrinti nulinę hipotezę $V(k_i) = 1$ su $i = 1,...,l$ su alternatyva, kad $V(k_i) \neq 1$ kokiam nors i, remiantis statistika:

$$MV_1 = \sqrt{T} \max_i |M_1(x; k_i)|,$$

čia $M_1(x; k_i)$ yra apibrėžta (2). Heteroskedastiškumo prielaidai (antroji atsitiktinio klaidžiojimo hipotezė) buvo pasiūlyta statistikos versija:

$$MV_2 = \sqrt{T} \max_i |M_2(x; k_i)|,$$

kuri turi tokią pat kritinę sritį kaip ir MV_1. Čia $M_2(x; k_i)$ apibrėžta (3). Chow ir Denning savo darbe parodė, kad nors ir statistikos ribinis skirstinys yra sudėtingas, bet statistines išvadas galime daryti remiantis normaliuoju skirstiniu. Nulinė hipotezė atmetama su α reikšmingumo lygmeniu, jei pagal imties duomenis paskaičiuota MV_1 ar MV_2 statistikos reikšmė yra didesnė nei $[1 - (\alpha^*/2)]$ eilės standartinio normaliojo skirstinio kvantilis, čia $\alpha^* = 1 - (1 - \alpha)^{1/l}$.

3.2. Whang ir Kim testas

Whang ir Kim [12] testas naudoja imčių perrinkimo techniką, kuri aproksimuoja imties statistikos skirstinį. Kai imtys yra mažos, šis testas rodo geresnes savybes nei kiti dispersijų santykiu paremti testai [2]. Tikrinant pirmąją ir antrąją nulinę hipotezes, Whang ir Kim siūlo taikyti statistiką:

$$MV_3 = \sqrt{T} g_N(x_1,...,x_T),$$

čia

$$g_t(x_1,...,x_T) = \max_{1 \leq i \leq l} |M_r(k_i)|,$$

kai $M_r(k_i) = VR(x; k_i) - 1$, ir $VR(x; k)$ yra apibrėžta (1). Statistikos MV_3 pasiskirstymo funkcija yra:

$$G_T(x) = \mathrm{P}(\sqrt{T} g_t(x_1,...,x_T) < x).$$

Ši pasiskirstymo funkcija nėra žinoma ir analitiškai neišreiškiama, todėl Whang ir Kim ją aproksimavo imčių perrinkimo procedūra. Renkamas b dydžio poimtis $(x_t,...,x_{t-b+1})$, čia $t = 1,...,T - b + 1$. Statistika MV_3 paskaičiuota šiam poimčiui yra $g_{T,b,t} = g_b(x_t,...,x_{t-b+1})$. Tada $g_{T,b,t}$ yra paskaičiuojama visiems b dydžio poimčiams iš turimos pradinės x_t imties, kai $t = 1, \dots ,T$ bei $G_T(x)$ yra aproksimuojama:

$$\hat{G}_{T,b}(x) = (T - b + 2)^{-1} \sum_{t=1}^{T-b+1} I(\sqrt{b} g_{T,b,t} \leq x).$$

Kritinės testo reikšmės $100(1-\alpha)$ yra $(1-\alpha)$ $\hat{G}_{T,b}$ kvantilis. Testo p-reikšmė yra įvertinama $1 - \hat{G}_{T,b}(MV_3)$. Nulinė hipotezė $V(k_i) = 1, (i = 1,...,l)$ yra atmetama su reikšmingumo lygmeniu α, kai MV_3 reikšmė yra didesnė nei kritinė reikšmė ar p-reikšmė yra mažesnė nei α. Prieš naudojant imčių perinkimo procedūrą, reikia pasirinkti „blokų“ ilgį b. Whang ir Kim rekomendavo rinktis iš intervalo $[2{,}5T^{0{,}3}, 3{,}5T^{0{,}6}]$. Šiame darbe empirinio tyrimo metu b ilgiai bus parenkami iš autorių pasiūlyto intervalo.

4. Kim statistika paremtas testas ir modifikacija

Savo darbe Kim [7] pasiūlė statistiką, kuri remiasi dalinių x_t sumų santykiu. Šioje dalyje bus aprašomos galimos Kim statistikos modifikacijos.

4.1. Kim statistika

Tarkime, turime laiko eilutę $x_1, x_2, \ldots$, kurios dalinių sumų procesas tenkina sąlygą:

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{i=1}^{[T\tau]} x_i \xrightarrow{d} \sigma W(\tau), \quad T \to \infty, \quad \tau \in [0,1]. \tag{4}$$

čia $\sigma > 0$ ir $[\tau T]$ – sveikoji skaičiaus τT dalis, $\{W(\tau), \tau \in [0,\infty)\}$ – Wiener'io procesas.

Šis rezultatas vadinamas funkcine centrine ribine teorema (FCRT) arba invariantiškumo principu [11]. Jis teigia, kad atsitiktinių dydžių dalinių sumų procesas silpnai konverguoja į Wiener'io procesą intervale [0,1]. Čia $\xrightarrow{d}$ žymi konvergavimą pagal pasiskirstymą Skorochodo erdvėje D[0,1], kai $T \to \infty$. Skorochodo erdvė D[0,1] yra visų funkcijų apibrėžtų intervale [0,1] ir tolydžių iš dešinės bei kurios turi baigtinę ribą iš kairės intervale [0,1], erdvė (žr. [11]), kurioje apibrėžta norma $\|f - g\| = \sup_t |f(t) - g(t)|$, $\forall f,g \in$ D[0,1].

Procesai, kuriems galioja (4), turi tenkinti [11] aprašytas sąlygas: $x_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \epsilon_{k-j}$, kur $\sum_j a_j^2 < \infty$ ir $\sum_j |a_j| < \infty$, bei ϵ_j yra vienodai bei nepriklausomai pasiskirstę su nuliniu vidurkiu ir vienetine dispersija, ir baigtiniu ketvirtuoju momentu $\mathrm{E}\epsilon_0^4 < \infty$. Tokias salygas tenkina tiesiniai procesai, pavyzdžiui, autoregresijos–slenkamojo vidurkio sekos.

Tegul nulinė hipotezė $H_0 : x_1, \ldots, x_T$ tenkina (4) sąlyga. Alternatyvos gali būti įvairios, kai seka x_t netenkina nurodytos sąlygos. Šiame darbe (tiriamojoje dalyje) bus tiriamos testo galios prie kelių alternatyvų. Pirmoji, kad $x_t = x_{t-1} + u_t$, kur $u_t \sim \mathcal{N}(0,1)$, t.y. x_t atitinka atsitiktinio klaidžiojimo procesą. Antroji alternatyva – perėjimo modelis, kai seka x_t iki tam tikro momento k tenkina nurodytą sąlygą, tačiau nuo periodo $k+1$ ji tampa atsitiktiniu klaidžiojimu.

Apibrėšime imties „pradžios“ bei „pabaigos“ dalines sumas:

$$S_k = S_k(x) = \sum_{j=1}^{k} x_j,$$

$$S_{T-k}^* = S_{T-k}^*(x) = \sum_{j=k+1}^{T} x_j.$$

Atitinkamai apibrėžiamos sumos:

$$U_k(x) := \frac{1}{k^2} \sum_{j=1}^{k} (S_j - \frac{j}{k} \cdot S_k)^2,$$

$$U^*_{T-k}(x) := \frac{1}{(T-k)^2}\sum_{j=k+1}^{T}(S^*_{T-j+1} - \frac{T-j+1}{T-k}\cdot S^*_{T-k})^2.$$

Kim [7, 8] pasiūlė statistiką, kuri yra paremta santykiu:

$$\Theta_T(\tau) := \frac{U^*_{T-[T\tau]}(x)}{U_{[T\tau]}(x)}, \quad \tau \in [0,1].$$

Statistika $\Theta_T(\tau)$ konverguoja į:

$$\Theta_T(\tau) \xrightarrow{d} \frac{Q_{1-\tau}(W)}{Q_\tau(W)}, \quad T \to \infty \quad \tau \in [0,1],$$

$$Q_{1-\tau}(W) := \frac{1}{(1-\tau)^2}\left(\int_\tau^1 \Big(W(1) - W(u) - \frac{1-u}{1-\tau}(W(1) - W(\tau))\Big)^2 \mathrm{d}u\right),$$

$$Q_\tau(W) := \frac{1}{\tau^2}\left[\int_0^\tau \Big((W(u) - \frac{u}{\tau}W(\tau)\Big)^2 \mathrm{d}u\right].$$

Šiame darbe testo statistika modifikuojama imant $\beta = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Bendru atveju statistika yra apibrėžiama sumomis:

$$U^{*\beta}_{T-k}(x) := \frac{1}{(T-k)^{(2+\beta)/2}}\sum_{j=k+1}^{T}|S^*_{T-j+1} - \frac{T-j+1}{T-k}\cdot S^*_{T-k}|^\beta,$$

$$U^\beta_k(x) := \frac{1}{k^{(2+\beta)/2}}\sum_{j=1}^{k}|S_j - \frac{j}{k}\cdot S_k|^\beta.$$

Imamas santykis:

$$\Theta^\beta_T(\tau) := \frac{U^{*\beta}_{T-[T\tau]}(x)}{U^\beta_{[T\tau]}(x)}, \quad \tau \in [0,1]. \tag{5}$$

Taip apibrėžta statistika, kai $T \to \infty$, konverguoja (detaliau pateikta priede $Nr.1.$):

$$\Theta^\beta_T(\tau) \xrightarrow{d} \frac{Q^\beta_{1-\tau}(W)}{Q^\beta_\tau(W)}, \quad \tau \in [0,1],$$

$$Q^\beta_{1-\tau}(W) := \frac{1}{(1-\tau)^{(2+\beta)/2}}\left[\int_\tau^1 \Big|W(1) - W(u) - \frac{1-u}{1-\tau}(W(1) - W(\tau))\Big|^\beta \mathrm{d}u\right],$$

$$Q^\beta_\tau(W) := \frac{1}{\tau^{(2+\beta)/2}}\left[\int_0^\tau \Big|W(u) - \frac{u}{\tau}W(\tau)\Big|^\beta \mathrm{d}u\right].$$

Taigi, pasirinkus testavimo intervalą $\Lambda = [\underline{\tau},\bar{\tau}] \subset (0,1)$ (arti intervalo galų statistikos reikšmės yra neapibrėžtos) galima sukonstruoti testą, kuris paremtas statistika (5) sumuojant per visas τ reikšmes iš testavimo intervalo:

$$Y_T(x) := \int_{\tau \in \Lambda} \Theta_T^{\beta}(\tau) \mathrm{d}\tau.$$

Naudojantis tolydaus atvaizdžio teorema bei integralo tolydumu, $Y_T(x) \to Y(W)$, kai $T \to \infty$, kur $Y(W) := \int_{\tau \in \Lambda} \frac{Q_{1-\tau}^{\beta}(W)}{Q_{\tau}^{\beta}(W)} \mathrm{d}\tau$.

Statistinės išvados apie nulinę hipotezę remiasi $(1-\alpha)$ kvantiliu $q_Y(\alpha)$. Kritinės reikšmės yra gaunamos Monte Karlo modeliavimo metodu. H_0 hipotezė atmetama alternatyvos naudai, jei gauta statistikos reikšmės realizacija yra didesnė už kritinę reikšmę su α reikšmingumo lygmeniu, t.y. didesnė už statistikos skirstinio $(1-\alpha)$ kvantilį:

$$Y_T(x) > q_Y(\alpha),$$

$$q_Y(\alpha) := \inf\{x : P(Y_T(x) \leq x) \geq 1 - \alpha\}.$$

Ribinė statistika buvo aproksimuota suskaičiavus 10000 jos reikšmių, kai $x_t \sim \mathcal{N}(0,1)$. Priede $Nr.2.$ yra pateikiamos Monte Karlo modeliavimo metodo pagalba gautos atitinkamų kvantilių reikšmės, kai imties dydis $T = \{25, 50, 100, 200, 500\}$ bei $\beta = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

5. Tiriamoji dalis

Šioje dalyje Monte Karlo modeliavimo metodo pagalba bus palyginamos aprašytų statistinių kriterijų galios, t.y. tikimybės atmesti nulinę hipotezę, kai ji yra klaidinga. Taip pat patikrinama silpnos formos rinkos efektyvumo hipotezė trims Baltijos šalių akcijų kainų indeksams.

5.1. Statistinių kriterijų galių empirinis tyrimas

Statistinio kriterijaus galia tiriama, kai $p_t = 0{,}9p_{t-1}+x_t$, kur $x_t \sim \mathcal{N}(0{,}1)$. Atliekama 10000 pakartojimų, pasirinktas reikšmingumo lygmuo $\alpha = 0{,}05$.

	k	LoMac M1	LoMac M2	Wright ranginis R1	Wright ranginis R2	Wright ženklų S1
Imties dydis:	2	6,90	7,40	4,60	5,00	5,80
$T = 50$	5	3,90	5,80	4,50	4,80	4,40
	10	0,00	0,40	4,20	4,40	4,90
	30	0,00	0,00	1,30	1,30	1,80
Imties dydis:	2	8,20	8,50	6,30	6,40	6,20
$T = 100$	5	9,30	10,50	8,30	8,00	6,70
	10	6,80	8,70	10,40	12,20	7,40
	30	0,00	0,00	11,30	11,10	6,60
Imties dydis:	2	11,30	11,50	8,30	8,90	7,30
$T = 200$	5	19,40	20,10	16,90	18,10	10,80
	10	27,00	28,40	25,40	27,50	14,10
	30	4,40	10,10	41,00	48,00	15,80
Imties dydis:	2	20,70	20,60	17,80	18,70	9,30
$T = 500$	5	49,00	49,20	41,60	45,10	22,80
	10	76,20	76,60	69,90	75,00	35,30
	30	97,90	98,20	96,90	98,50	46,30

1 lentelė: Testų galios (išreikštos procentais) pasirinktam k, kai $p_t = 0{,}9p_{t-1}+x_t$, kur $x_t \sim \mathcal{N}(0{,}1)$.

Iš gautų rezultatų matome, kad Lo ir MacKinlay testų atveju, kai pasirinktas k periodas yra santykinai didelis palyginus su visu imties dydžiu T, testai nesugeba atmesti klaidingos nulinės hipotezės. Visiems imties dydžiams, išskyrus, kai $T = 50$, galingiausi yra Wright pasiūlyti statistiniai kriterijai. Kai $T = 50$, galingesni yra Lo ir MacKinlay testai, tačiau visais atvejais galia nesiekia 8%, todėl tokio dydžio imtyse Lo ir MacKinlay bei Wright testai nėra galingi. Lyginant galias, kai $T = 500$, matome, kad galingiausi yra Wright testai, kurie paremti rangais bei Lo ir MacKinlay testai, kai $k = 30$. Ženklais paremtas statistinis kriterijus nebuvo toks galingas, kaip ranginis.

Tokia pat testų galios palyginimo procedūra yra taikoma kartotiniams Chow ir Denning bei Whang-Kim testams. Pagal gautus rezultatus matome, kad Chow ir Denning testas, kol imties dydis $T = 50, 100, 200$, nėra galingas, tačiau imties dydžiui 500 jo galia padidėjo iki 71%. Whang-Kim testo galios rezultatai parodo, kad kuo b poimčių dydis yra mažesnis, tuo testas yra galingesnis. Matome, kad kartotiniai testai turi žymiai didesnę galią, kai imties dydis nėra didelis, palyginus su Lo ir MacKinlay bei Wright siūlomais testais.

Imties dydis	b	Whang–Kim	Chow–Denning MV1	Imties dydis	b	Whang–Kim	Chow–Denning MV1
	12	57,47			15	61,43	
$T = 50$	16	48,04		$T = 100$	21	52,09	
	20	41,18	1,85		27	45,95	3,27
	24	36,16			33	41,72	
	28	33,95			39	39,03	
	32	30,18			45	36,05	
Imties dydis:	22	71,5			34	92,9	
$T = 200$	32	63,9		$T = 500$	52	90,4	
	42	59,2	9,58		70	88,3	
	52	54,7			88	85,7	71
	62	51,6			106	83	
	72	50,6			124	81,3	

2 lentelė: Testų galios (išreikštos procentais) keliems pasirinktiems $k = (2,5,10,30)$, kai $p_t = 0{,}9p_{t-1}+x_t$, čia $x_t \sim \mathcal{N}(0{,}1)$. Atitinkamai kiekvienam imties dydžiui buvo parinkta po šešias b reikšmes taip, kad jos būtų išsidėsčiusios vienodu atstumu intervale $2{,}5T^{0{,}3} < b < 3{,}5T^{0{,}6}$.

5.2. Testų taikymas Baltijos šalių akcijų rinkų indeksams

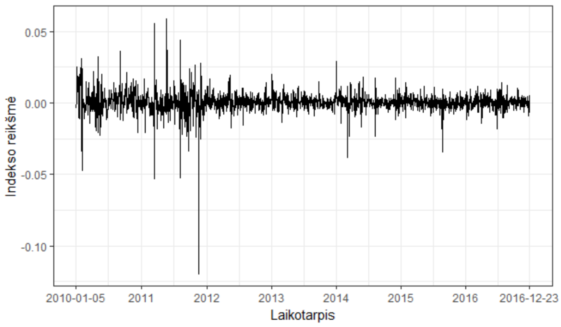
Šioje dalyje silpnos formos efektyvios rinkos hipotezė tikrinama trims Baltijos šalims - Lietuvai, Latvijai, Estijai. Imamas 1766 dienų laikotarpis nuo 2010.01.04 iki 2016.12.23.

(a) Vilniaus biržos indekso vertės.

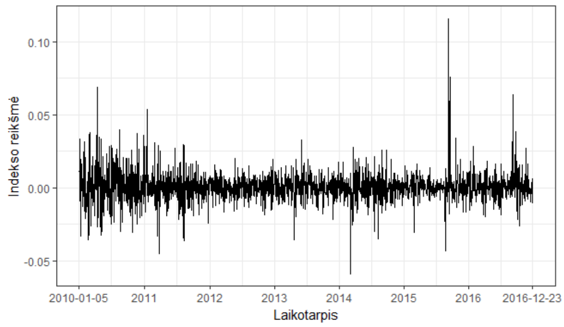
(b) Rygos biržos indekso vertės.

(c) Talino biržos indekso vertės.

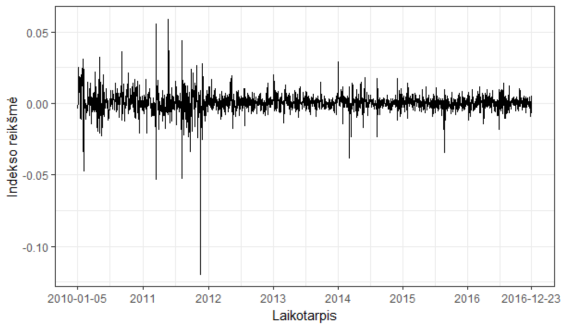
1 pav.: NASDAQ Baltijos šalių akcijų indeksai laikotarpiu 2010.01.04 - 2016.12.23



(a) Vilniaus biržos indekso logaritminių verčių skirtumai.



(b) Rygos biržos indekso logaritminių verčių skirtumai.



(c) Talino biržos indekso logaritminių verčių skirtumai.

2 pav.: NASDAQ Baltijos šalių akcijų indeksų logaritminės grąžos laikotarpiu 2010.01.05 - 2016.12.23

Baltijos šalių indeksams silpnos formos efektyvios rinkos H_0 hipotezė tikrinama su $\alpha = 0{,}05$ reikšmingumo lygmeniu. Lo ir MacKinlay testas, kai paklaidos laikomos nepriklausomai ir vienodai pasiskirsčiusios nebus aptariamas. Vilniaus bei Talino atveju, Lo ir MacKinlay bei Wright testai beveik visiems pasirinktiems k nulinės hipotezės neatmeta, tačiau Rygos atveju nulinė hipotezė yra atmetama alternatyvos naudai. Taigi galime sakyti, kad testai, kurie tikrina nulinę hipotezę pasirinktam k, Rygos atveju ją siūlo atmesti, Vilniaus bei Talino atveju nėra pagrindo atmesti H_0. Kartotinių testų rezultatai skirtingi. Remiantis Chow-Denning statistiniu kriterijumi, Rygos atveju H_0 atmetama, tačiau Vilniaus ir Talino atveju nėra pagrindo atmesti H_0. Kitokie rezultatai gaunami remiantis Whang-Kim testu. Remiantis gautomis p-reikšmėmis galime teigti, kad Vilniaus bei Rygos atveju nėra pagrindo atmesti H_0, tačiau Talino atveju H_0 yra atmetama.

5.3. Kim statistikos modifikacija paremto statistinio kriterijaus empirinis tyrimas

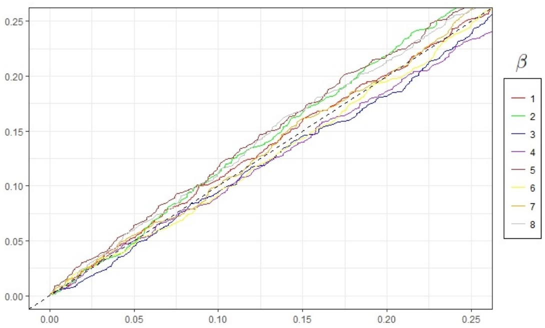
Priede $Nr.2$. yra pateikiamos Monte Karlo modeliavimo metodo pagalba gautos kritinės reikšmės, kai imties dydis $T = \{25{,}50{,}100{,}200{,}500\}$ bei $\beta = \{1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}6{,}7{,}8\}$. Ribinė statistika aproksimuota suskaičiavus 10000 jos reikšmių, kai $x_t \sim \mathcal{N}(0{,}1)$. Visame darbe yra pasirinktas testavimo intervalas $\tau \in [0{,}1, 0{,}9]$.

Testo dydis pasirinktoms β, T, α reikšmėms, kai $x_t \sim \mathcal{N}(0{,}1)$, nustatytas Monte Karlo modeliavimo metodo pagalba atlikus 1000 pakartojimų (žr. 3 lentelę). Galime matyti iš pateiktų rezultatų, kad didelių nuokrypių nuo pasirinkto reikšmingumo lygmens α nėra. Tik keliais atvejais buvo nustatytas statistiškai reikšmingas testo dydžio skirtumas nuo pasirinkto α lygmens. Tai yra, kai $\alpha = 0{,}1$, testo dydis su $\beta = 5$ bei $T = 25$ ir $\beta = 4$ bei $T = 200$ statistiškai reikšmingai skyrėsi nuo 0,1.

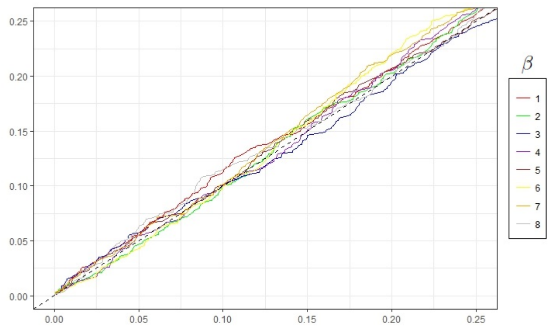
β \ T	25	50	100	200	500	25	50	100	200	500
	$\alpha = 0{,}01$					$\alpha = 0{,}05$				
1	0,008	0,014	0,012	0,015	0,013	0,052	0,055	0,055	0,048	0,048
2	0,009	0,011	0,010	0,005	0,008	0,047	0,046	0,044	0,038	0,052
3	0,006	0,016	0,012	0,007	0,009	0,045	0,057	0,053	0,042	0,046
4	0,007	0,009	0,007	0,007	0,012	0,049	0,054	0,052	0,056	0,049
5	0,014	0,011	0,005	0,008	0,005	0,064	0,057	0,048	0,055	0,051
6	0,010	0,008	0,010	0,008	0,014	0,047	0,042	0,052	0,043	0,056
7	0,013	0,014	0,015	0,008	0,012	0,055	0,055	0,049	0,057	0,055
8	0,010	0,010	0,009	0,005	0,012	0,059	0,062	0,042	0,049	0,048
	$\alpha = 0{,}1$									
1	0,105	0,112	0,109	0,096	0,102					
2	0,111	0,099	0,092	0,092	0,094					
3	0,094	0,100	0,115	0,085	0,097					
4	0,090	0,101	0,116	0,123*	0,105					
5	0,117*	0,100	0,102	0,112	0,093					
6	0,093	0,098	0,100	0,096	0,098					
7	0,100	0,101	0,099	0,100	0,102					
8	0,112	0,115	0,084	0,101	0,089					

3 lentelė: Testo dydis su skirtingais imties T ir β dydžiais, kai $x_t \sim \mathcal{N}(0{,}1)$. Kiekvienu atveju atliekama po 1 tūkst. pakartojimų. Pažymėta *, jei dydis statistiškai reikšmingai skiriasi nuo pasirinkto α lygmens su 5% reikšmingumo lygmeniu.

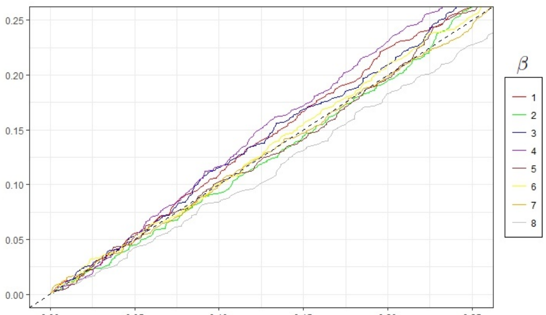
Paveiksle 3 yra pateikiami empiriniai p-reikšmių pasiskirstymo grafikai, skirti testo dydžio tyrimui.



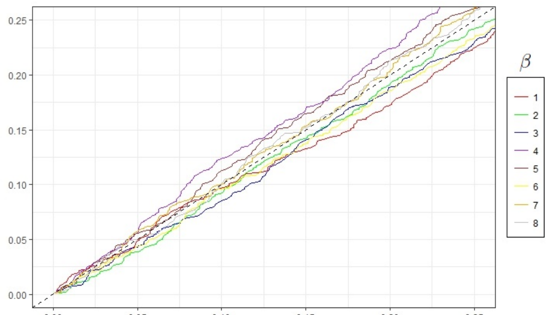
(a) $T = 25$



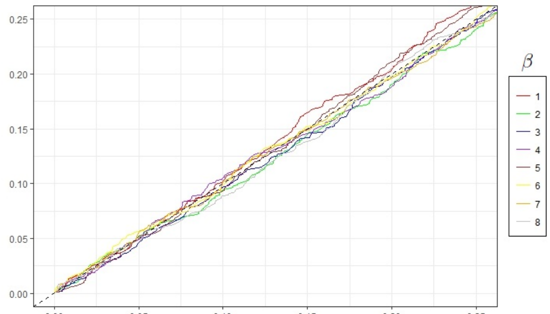
(b) $T = 50$



(c) $T = 100$



(d) $T = 200$



(e) $T = 500$

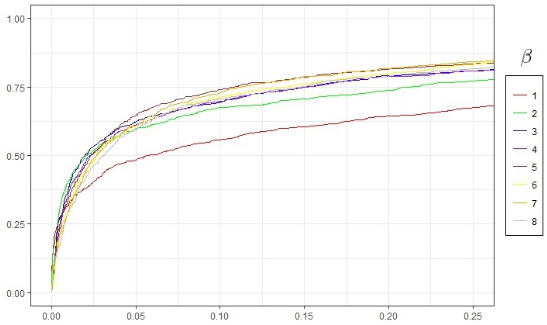
3 pav.: Testo dydis su skirtingais imties T ir β dydžiais, kai $x_t \sim \mathcal{N}(0,1)$. Kiekvienu atveju atliekama po 1 tūkst. pakartojimų.

Toliau tiriama testo galia su skirtingomis β reikšmėmis $\beta \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ atmesti klaidingą nulinę hipotezę, kai x_t=$x_{t-1} + \epsilon_t$, čia $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0,1)$.

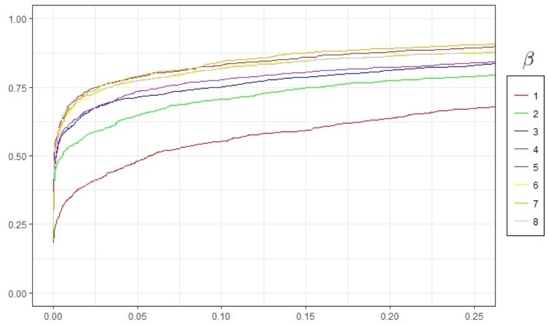
β \ T	25	50	100	200	500	25	50	100	200	500
	$\alpha = 0{,}01$					$\alpha = 0{,}05$				
1	0,318	0,347	0,412	0,414	0,413	0,482	0,479	0,534	0,541	0,534
2	0,403	0,535	0,600	0,611	0,594	0,594	0,647	0,698	0,700	0,694
3	0,373	0,602	0,666	0,663	0,688	0,623	0,713	0,769	0,752	0,770
4	0,360	0,617	0,680	0,722	0,718	0,612	0,734	0,771	0,819	0,801
5	0,341	0,684	0,704	0,749	0,765	0,645	0,787	0,808	0,825	0,837
6	0,300	0,658	0,726	0,754	0,748	0,609	0,774	0,815	0,823	0,824
7	0,296	0,672	0,725	0,780	0,786	0,608	0,789	0,794	0,846	0,863
8	0,294	0,691	0,752	0,785	0,817	0,598	0,774	0,824	0,866	0,875
	$\alpha = 0{,}1$									
1	0,558	0,552	0,595	0,596	0,597					
2	0,675	0,706	0,752	0,749	0,744					
3	0,695	0,750	0,815	0,793	0,817					
4	0,696	0,776	0,818	0,862	0,840					
5	0,740	0,831	0,848	0,854	0,866					
6	0,712	0,822	0,854	0,867	0,851					
7	0,728	0,843	0,825	0,878	0,888					
8	0,707	0,817	0,859	0,899	0,900					

4 lentelė: Testo galia, kai $x_t = x_{t-1} + \epsilon_t$, čia $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0{,}1)$ su skirtingais imties ir β dydžiais. Kiekvienu atveju atliekama po 1 tūkst. pakartojimų.

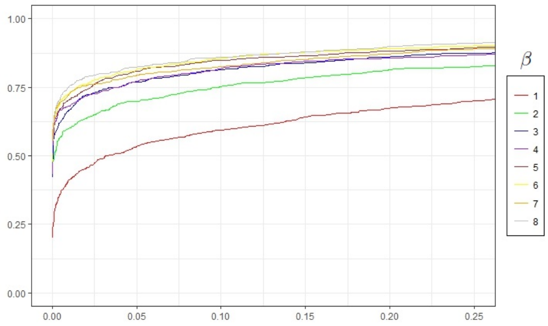
Iš gautų rezultatų matyti, kad didėjant β, testo galia taip pat didėja. Mažiausią galią testai rodo, kai imties dydis yra 25.



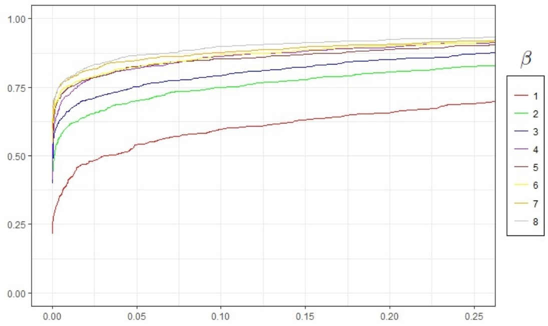
(a) $T = 25$



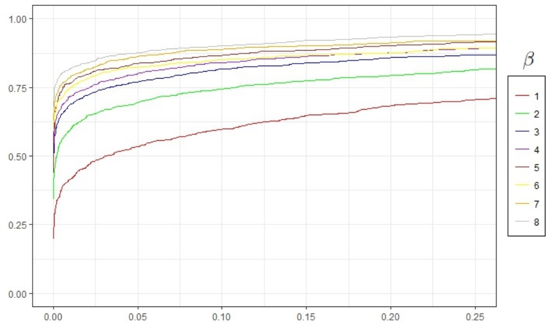
(b) $T = 50$



(c) $T = 100$



(d) $T = 200$



(e) $T = 500$

4 pav.: Testo galia, kai $x_t = x_{t-1} + \epsilon_t$, čia $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0{,}1)$ su skirtingais imties ir β dydžiais. Kiekvienu atveju atliekama po 1 tūkst. pakartojimų.

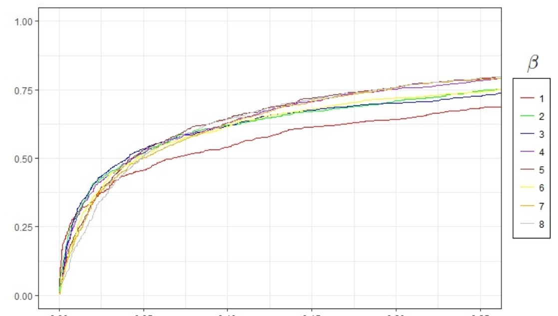
Iš grafikų matome, kad kuo didesnis β, tuo galia didesnė.

Tiriama testo galia su skirtingomis β reikšmėmis atmesti klaidingą nulinę hipotezę, kai x_t iki periodo k yra $x_t = 0{,}6x_{t-1} + \epsilon_t$, o nuo $k+1$ tampa $x_t = x_{t-1} + \epsilon_t$ procesu, kur $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0{,}1)$. Reikšmė k yra parenkama taip, kad perėjimo momentas būtų imties viduryje, t.y. $0{,}5T$, čia T – imties dydis.

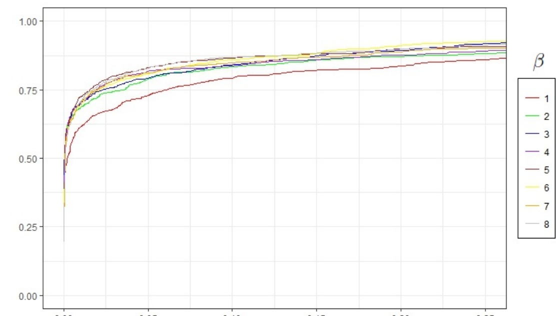
β \ T	25	50	100	200	500	25	50	100	200	500
	$\alpha = 0{,}01$					$\alpha = 0{,}05$				
1	0,291	0,613	0,829	0,954	0,998	0,455	0,728	0,896	0,981	1,000
2	0,280	0,684	0,868	0,959	0,997	0,519	0,788	0,926	0,976	1,000
3	0,297	0,698	0,860	0,965	0,999	0,534	0,792	0,922	0,986	1,000
4	0,272	0,703	0,883	0,975	0,999	0,518	0,818	0,930	0,992	1,000
5	0,226	0,723	0,888	0,966	0,998	0,529	0,831	0,938	0,984	1,000
6	0,222	0,690	0,875	0,967	0,999	0,512	0,810	0,937	0,991	1,000
7	0,212	0,706	0,889	0,981	0,999	0,501	0,811	0,929	0,992	1,000
8	0,178	0,707	0,894	0,968	0,998	0,507	0,828	0,941	0,984	1,000
	$\alpha = 0{,}1$									
1	0,540	0,792	0,929	0,992	1,000					
2	0,620	0,832	0,944	0,985	1,000					
3	0,616	0,841	0,946	0,993	1,000					
4	0,629	0,836	0,947	0,995	1,000					
5	0,644	0,865	0,963	0,991	1,000					
6	0,615	0,859	0,952	0,996	1,000					
7	0,627	0,849	0,951	0,995	1,000					
8	0,642	0,869	0,964	0,991	1,000					

5 lentelė: Testo galia su skirtingomis β, kai x_t iki periodo k yra $x_t = 0{,}6x_{t-1} + \epsilon_t$, o nuo $k+1$ tampa $x_t = x_{t-1} + \epsilon_t$ procesu, kur $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0{,}1)$. Perėjimo momento reikšmė k yra parenkama $0{,}5T$. Kiekvienu atveju atliekama 1 tūkst. pakartojimų.

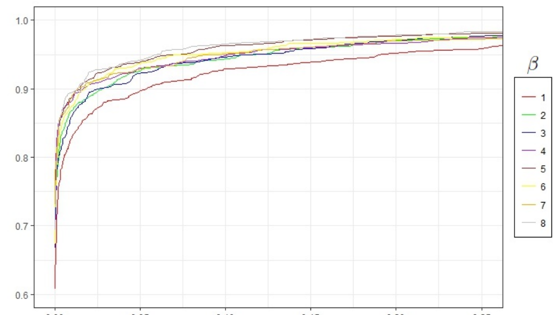
Šios alternatyvos atveju, testai yra galingesni, nei pirmosios, kai x_t atitinka atsitiktinio klaidžiojimo procesą. Iš empirinių p-reikšmių pasiskirstymo grafikų matome, kad kai imties dydis $T = 500$, galingiausias yra testas su $\beta = 6$.



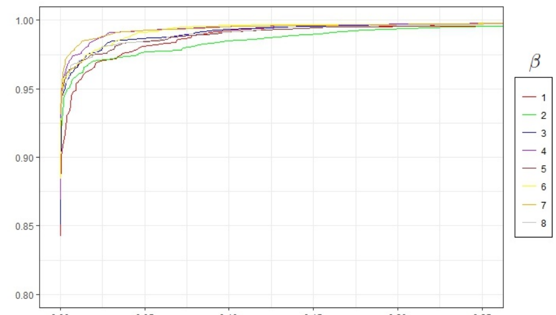
(a) $T = 25$



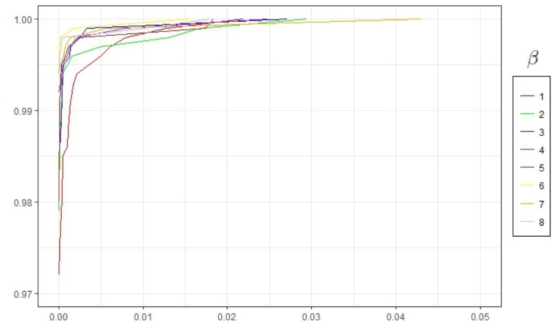
(b) $T = 50$



(c) $T = 100$



(d) $T = 200$



(e) $T = 500$

5 pav.: Testo galia su skirtingomis β, kai x_t iki periodo k yra $x_t = 0{,}6x_{t-1} + \epsilon_t$, o nuo $k+1$ tampa $x_t = x_{t-1} + \epsilon_t$ procesu, kur $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0{,}1)$. Perėjimo momento reikšmė k yra parenkama $0{,}5T$. Kiekvienu atveju atliekama 1 tūkst. pakartojimų.

Iš grafiko matome, kad kai $\beta = 6$, galia yra didžiausia.

5.4. Kim statistikos modifikacija paremto statistinio kriterijaus taikymas Baltijos šalių akcijų rinkų indeksams

Šioje dalyje testai, paremti Kim statistikos modifikacijomis, pritaikomi Vilniaus, Rygos, Talino akcijų indeksų vertėms. Imamas 1766 dienų laikotarpis nuo 2010.01.04 iki 2016.12.23. Tarkime, kad P_t yra akcijų biržos indekso vertė laiko momentu t ir $p_t = \ln P_t$, o $x_t = p_t - p_{t-1}$ yra logaritminis akcijų indekso verčių skirtumas (grąžos) momentu t. Yra tikrinama nulinė hipotezė, kad atitinkamų indeksų verčių logaritminės grąžos tenkina (4) sąlygą su alternatyva, kad taip nėra.

Pagal gautas testų reikšmes, pasirinkus reikšmingumo lygmenį $\alpha = 0{,}05$, nulinė hipotezė $H_0 : p_t = p_{t-1} + x_t$, čia x_t tenkina sąlygą (4), nėra atmetama. Tai reiškia, kad visų trijų Baltijos šalių atveju, indeksų logaritminių grąžų sekos $x_1, \ldots, x_T$ tenkina sąlygą (4).

β	Vilniaus atveju	Rygos atveju	Talino atveju
1	0,31	0,79	0,28
2	0,15	0,96	0,11
3	0,10	1,24	0,04
4	0,09	1,67	0,02
5	0,08	2,27	0,01
6	0,07	3,14	0,00
7	0,06	4,39	0,00
8	0,06	6,16	0,00

6 lentelė: Kim statistikos modifikacijomis paremtų testų, pritaikytų atitinkamo miesto akcijų biržos indekso verčių logaritminiams skirtumams, reikšmės.

Tikrinama hipotezė, kad akcijų indeksų logaritminės vertės $\{p_t\}_{t=1}^T$ yra stacionarus procesas, kuris tenkina (4) sąlygą, su alternatyva, kad tai yra nestacionarus procesas.

β	Vilniaus atveju	Rygos atveju	Talino atveju
1	1,68	2,59	1,58
2	6,28	9,12	7,00
3	42,28	34,19	53,31
4	486,32	135,08	527,96
5	7169,97	561,88	5697,81
6	116237,63	2468,01	63292,43
7	1971695,28	11484,46	712777,86
8	34365714,79	56691,94	8101287,91

7 lentelė: Kim statistikos modifikacijomis paremtų testų, pritaikytų atitinkamo miesto akcijų biržos indekso logaritminėms vertėms, reikšmės.

Pagal gautas testų reikšmes, pasirinkus reikšmingumo lygmenį $\alpha = 0{,}05$, nulinė hipotezė $H_0 : \{p_t\}_{t=1}^T$ tenkina sąlygą (4), yra atmetama alternatyvos naudai. Tai reiškia, kad visų trijų Baltijos šalių atveju, indeksų logaritminių verčių procesai nėra stacionarūs. Tačiau, pasižiūrėjus į Talino grafiką (1c), matome, kad kai kuriais laiko intervalais proceso trajektorijos atitinka stacionaraus proceso trajektorijas. Todėl patikrinsime nulinę hipotezę, kad $H_0 : \{p_t\}_{t=1}^T$ tenkina sąlygą (4) su alternatyva, kad akcijų indeksų verčių procesas iki 2013 m. sausio 8 d. tenkina (4) sąlygą, tačiau nuo 2013 m. sausio 9 d. tampa procesu, kuris tos sąlygos netenkina, t.y. nestacionariu procesu.

β	Laikotarpis nuo 2010.01.04 iki 2013.01.08	Laikotarpis nuo 2013.01.09 iki 2016.12.23
1	0,84	4,19*
2	1,46	28,45*
3	3,83	210,17*
4	12,24	1616,72*
5	42,39	12696,68*
6	152,44*	100933,19*
7	559,11*	809213,96*
8	2075,48*	6531053,47*

8 lentelė: Testų, pritaikytų Talino akcijų biržos indekso vertėms atitinkamais laiko intervalais, reikšmės. Pasirinktas periodas iki 2013 m. sausio 8 d. imtinai ir nuo 2013 m. sausio 9 d. Ženklu * pažymėta su kuriomis testo reikšmėms yra atmetama nulinė hipotezė. Reikšmingumo lygmuo $\alpha = 0{,}05$.

Taigi, Talino atveju, remiantis gautomis testų reikšmėmis, kai $\beta = 6{,}7{,}8$, imčiai nuo 2010 m. sausio 4 d. iki 2013 m. sausio 8 d. galime atmesti nulinę hipotezę, kad tai yra seka, kuri tenkina (4). Kitais atvejais nulinė hipotezė nėra atmetama, kai imamas laikotarpis nuo 2010 m. sausio 4 d. iki 2013 m. sausio 8 d. Tačiau imčiai nuo 2013 m. sausio 9 d. iki 2016 m. gruodžio 23 d. nulinė hipotezė yra atmetama, t.y. seka netenkina (4) sąlygos. Galime daryti išvadą, kad Talino atveju, akcijų indeksų vertės turimu laikotarpiu nuo 2010 m. iki 2013 m. tenkina salygą (4), tačiau nuo 2013 m. nebetenkina, t.y. procesas atitinka perėjimo procesą, kai šiuo atveju, perėjimo momentu laikome 2013 m. sausio 8 dieną. Taigi nulinė hipotezė atmeta alternatyvos naudai, kad tai perėjimo procesas.

Analogiška nulinė hipotezė yra tikrinama Rygos akcijų indekso atveju. Gautos testo reikšmės leidžia daryti tokias pat išvadas kaip Talino akcijų indekso atveju - akcijų indeksų vertės turimu laikotarpiu nuo 2010 m. iki 2013 m. tenkina salygą (4), tačiau nuo 2013 m. nebetenkina, t.y. procesas atitinka perėjimo procesą, kai šiuo atveju, perėjimo momentu laikome 2013 m. sausio 8 dieną.

β	Laikotarpis nuo 2010.01.04 iki 2013.01.08	Laikotarpis nuo 2013.01.09 iki 2016.12.23
1	0,35	7,16*
2	0,39	118,24*
3	0,61	3778,98*
4	1,08	171383,55*
5	2,12	8565870,07*
6	4,47	440163473,54*
7	10,10	22925765479,12*
8	24,09	1206239972430,19*

9 lentelė: Testų, pritaikytų Rygos akcijų biržos indekso vertėms atitinkamais laiko intervalais, reikšmės. Pasirinktas periodas iki 2013 m. sausio 8 d. imtinai ir nuo 2013 m. sausio 9 d. Ženklu * pažymėta su kuriomis testo reikšmėms yra atmetama nulinė hipotezė. Reikšmingumo lygmuo $\alpha = 0{,}05$.

Testai taip pat yra pritaikomi Vilniaus akcijų indekso reikšmėms, kai perėjimo momentas imamas toks pat, kaip ir Rygos bei Talino akcijų indeksų atveju. Nulinė hipotezė imčiai laikotarpiu nuo 2010 m. sausio 4 d. iki 2013 m. sausio 8 d. yra atmetama visais atvejais, išskyrus, kai $\beta = 1$. Kitais atvejais galime daryti išvadą, kad atitinkamu laikotarpiu Vilniaus akcijų indekso verčių sekos netenkina (4) sąlygos, t.y. sekos nėra stacionarios.

β	Laikotarpis nuo 2010.01.04 iki 2013.01.08	Laikotarpis nuo 2013.01.09 iki 2016.12.23
1	1,08	1,36
2	5,70*	5,72*
3	40,80*	35,38*
4	315,83*	254,63*
5	2532,93*	1970,31*
6	20737,13*	15867,35*
7	172092,18*	130989,78*
8	1441747,87*	1100137,94*

10 lentelė: Testų, pritaikytų Vilniaus akcijų biržos indekso vertėms atitinkamais laiko intervalais, reikšmės. Pasirinktas periodas iki 2013 m. sausio 8 d. imtinai ir nuo 2013 m. sausio 9 d. Ženklu * pažymėta su kuriomis testo reikšmėms yra atmetama nulinė hipotezė. Reikšmingumo lygmuo $\alpha = 0{,}05$.

Išvados

Šiame darbe aprašyti keturi plačiai naudojami dispersijų santykio testai. Monte Karlo modeliavimo metodo pagalba nustatyta, kad Wright ranginis testas yra galingiausias, o Lo ir MacKinlay testai, kai pasirenkama k reikšmė, kuri yra didelė palyginus su imties dydžiu, netenka galios. Be šių testų aptarti dar du testai, kurie nulinę hipotezę tikrina keliems k periodams. Iš jų didžiausią galią parodė Whang-Kim testas.

Pritaikius aprašytus testus Baltijos šalių akcijų indeksams gautos skirtingos statistinės išvados. Naudojantis testais, kurie H_0 tikrina pasirinktam k periodui, Vilniaus bei Talino atveju buvo nustatyta, kad pagrindo atmesti nulinę hipotezę nėra. Tai reiškia, kad akcijų rinkos pasižymi silpnos formos efektyvumu, tačiau Rygos atveju H_0 yra atmetama. Šiek tiek kitokias statistines išvadas siūlo daryti Chow-Denning bei Whang-Kim testai. Whang-Kim testas H_0 hipotezę Talino atveju siūlo atmesti, Rygos bei Vilniaus atvejais remiantis gautais rezultatais nėra pagrindo atmesti nulinės hipotezės. Tačiau Chow-Denning Rygos atveju nulinę hipotezę siūlo atmesti.

Taip pat pasiūlytos Kim statistikos modifikacijos bei Monte Karlo modeliavimo metodo pagalba parodyta, kad didėjant β, didėja ir statistinio kriterijaus galia. Pateiktos kritinės reikšmės bei Monte Karlo modeliavimo metodo pagalba apskaičiuotas testo dydis. Testai taip pat buvo pritaikyti Baltijos šalių akcijų indeksams.

Literatūros sąrašas

[1] J.Y. Campbell, A.W. Lo, A.C. MacKinlay. *The Econometrics of Financial Markets.* Princeton, NJ: Princeton University Press, 1997.

[2] A. Charles, O. Darné. Variance ratio tests of random walk: An overview. *Journal of Economic Surveys*, 23:503–527, 2009.

[3] K.C. Chow, K.V. Denning. A simple multiple variance ratio test. *Journal of Econometrics*, 58:385–401, 1993.

[4] E.F. Fama. Efficient capital markets: II. *Journal of Finance*, 46:1575–1617, 1991.

[5] E.F. Fama. Efficient capital markets: A review of theory and empirical work. *Journal of Finance*, 18:383–417, 1997.

[6] H.A.A.B. Hoque, J.H. Kim, C.S. Pyun. A comparison of variance ratio tests of random walk: A case of Asian emerging stock markets. *International Review of Economics and Finance*, 16:488–502, 2007.

[7] J.Y. Kim. Detection of change in persistence of a linear time series. *Journal of Econometrics*, 95:97–116, 2000.

[8] J.Y. Kim, J. Belaire-Franch, R.B. Amador. Corrigendum to "detection of change in persistence of a linear time series". *Journal of Econometrics*, 109:389–394, 2002.

[9] A.W. Lo, A.C. MacKinlay. Stock market prices do not follow random walk:evidence from a simple specification test. *Review of Financial Studies*, 1:41–66, 1988.

[10] P.C.B. Phillips. Time series regression with a unit root. *Econometrica*, 55:277–301, 1987.

[11] Q. Wang, Y.X. Lin, C.M. Gulati. The invariance principle for linear processes with applications. *Econometric Theory*, 18:119–139, 2002.

[12] Y.-J. Whang, J. Kim. A multiple variance ratio test using subsampling. *Economics Letters*, 79:225–230, 2003.

[13] J.H. Wright. Alternative variance-ratio tests using ranks and signs. *Journal of Business and Economic Statistics*, 18:1–9, 2000.

Priedas Nr. 1.
Papildomi priedai

Konvergavimas

$$\Theta_T^\beta(\tau) \xrightarrow{d} \frac{Q_{1-\tau}^\beta(W)}{Q_\tau^\beta(W)}, \quad \tau \in [0,1], \quad T \to \infty,$$

gaunamas naudojantis įrodymais [7, 8, 10], FCRT bei tolydaus atvaizdžio teorema. Taip pat pažymėkime:

- $u = j/T$, $[uT] = j$ ir $u \in [0,1]$, $[\tau T] \in [j,j+1)$;
- $\tau = k/T$, $[\tau T] = \tau$ ir $\tau \in [0,1]$, $[\tau T] \in [k, k+1)$;
- $[n\tau]/n \to \tau$, kai $n \to \infty$. Tai gaunama pasinaudojus nelygybėmis $(n\tau - 1)/n < [n\tau]/n \leq \tau$, kur $(n\tau - 1)/n \to \tau$, kai $n \to \infty$;
- $S_{T-k}^* = S_T - S_k$.

Šiame darbe yra naudojamasi tolydaus atvaizdžio teorema, kurios formuluotė darbe [10] pateikiama tokia:

Jei $y_T \xrightarrow{d} W$, kai $T \to \infty$ ir h yra bet koks tolydus funkcionalas erdvėje $\mathrm{D}[0,1]$ (jei $\mathrm{D}_h \subset \mathrm{D}$ yra taškų rinkinys, kuriuose h yra netolydi, bet $\mathrm{P}(W \in \mathrm{D}_h) = 0$), tai $h(y_T) \xrightarrow{d} h(W)$.

Pasinaudojus aukščiau išvardintais punktais bei [7, 8, 10] esančiais įrodymais, parodoma, kad:

$$\frac{U_{T-k}^{*\beta}(x)}{U_k^\beta(x)} \xrightarrow{d} \frac{Q_{1-\tau}^\beta(W)}{Q_\tau^\beta(W)}, \quad \tau \in [0,1],$$

$$\begin{aligned}
U_k^\beta(x) &= \frac{1}{k^{(2+\beta)/2}} \sum_{j=1}^{k} |S_j - \frac{j}{k} S_k|^\beta = \frac{1}{k^{(2+\beta)/2}} \sum_{j=1}^{k} \int_{(j-1)/T}^{j/T} T \Big| S_{[uT]} - \frac{[uT]}{[\tau T]} S_{[\tau T]} \Big|^\beta \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{[\tau T]^{(2+\beta)/2}} \sum_{j=1}^{k} \int_{(j-1)/T}^{j/T} T^{(2+\beta)/2} \Big| T^{-1/2} S_{[uT]} - \frac{[uT]}{[\tau T]} T^{-1/2} S_{[\tau T]} \Big|^\beta \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{[\tau T]^{(2+\beta)/2}} \int_0^\tau T^{(2+\beta)/2} \Big| T^{-1/2} S_{[uT]} - \frac{[uT]}{[\tau T]} T^{-1/2} S_{[\tau T]} \Big|^\beta \mathrm{d}u \\
&\xrightarrow{d} \frac{1}{\tau^{(2+\beta)/2}} \sigma^\beta \int_0^\tau \Big| W(u) - \frac{u}{\tau} W(\tau) \Big|^\beta \mathrm{d}u,
\end{aligned}$$

$$U^{*\beta}_{T-k}(x) = \frac{1}{(T-k)^{(2+\beta)/2}} \sum_{j=k+1}^{T} \left| S^*_{T-j+1} - \frac{T-j+1}{T-k} S^*_{T-k} \right|^{\beta} = \frac{1}{(T-k)^{(2+\beta)/2}}$$

$$\sum_{j=k+1}^{T} \int_{(j-1)/T}^{j/T} T \left| (S_T - S_{[uT]}) - \frac{T-[uT]}{T-[\tau T]} (S_T - S_{[\tau T]}) \right|^{\beta} \mathrm{d}u = \frac{1}{(T-[\tau T])^{(2+\beta)/2}}$$

$$\sum_{j=[\tau T]+1}^{T} \int_{(j-1)/T}^{j/T} T^{(2+\beta)/2} \left| T^{-1/2} (S_T - S_{[uT]}) - \frac{T-[uT]}{T-[\tau T]} T^{-1/2} (S_T - S_{[\tau T]}) \right|^{\beta} \mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{(T-[\tau T])^{(2+\beta)/2}} \int_{\tau}^{1} T^{(2+\beta)/2} \left| T^{-1/2} (S_T - S_{[uT]}) - \frac{T-[uT]}{T-[\tau T]} T^{-1/2} (S_T - S_{[\tau T]}) \right|^{\beta} \mathrm{d}u$$

$$\xrightarrow{d} \frac{1}{(1-\tau)^{(2+\beta)/2}} \sigma^{\beta} \int_{\tau}^{1} \left| W(1) - W(u) - \frac{1-u}{1-\tau} \big(W(1) - W(\tau) \big) \right|^{\beta} \mathrm{d}u$$

Taigi,

$$\frac{U^{*\beta}_{T-k}(x)}{U^{\beta}_{k}(x)} \xrightarrow{d} \frac{Q^{\beta}_{1-\tau}(W)}{Q^{\beta}_{\tau}(W)}, \quad \tau \in [0,1],$$

$$\Big(U^{\beta}_{[T\tau]}(x), U^{*\beta}_{T-[T\tau]}(x) \Big) \xrightarrow{d} \Big(Q^{\beta}_{\tau}(W), Q^{\beta}_{1-\tau}(W) \Big).$$

Priedas Nr. 2.
Kim testo statistikos modifikacijų skirstinių empiriniai kvantiliai

T / $1-\alpha$	25	50	100	200	500	25	50	100	200	500
	$\beta = 1$					$\beta = 2$				
1%	0,37	0,39	0,39	0,39	0,40	0,22	0,24	0,23	0,24	0,24
5%	0,49	0,50	0,51	0,51	0,51	0,39	0,39	0,39	0,40	0,40
10%	0,57	0,57	0,58	0,58	0,58	0,51	0,50	0,50	0,50	0,51
90%	1,52	1,38	1,37	1,37	1,37	3,51	2,83	2,67	2,71	2,67
95%	1,76	1,58	1,57	1,55	1,55	4,97	3,67	3,40	3,46	3,41
99%	2,40	2,02	2,00	1,99	1,99	11,56	5,97	5,53	5,28	5,43
	$\beta = 3$					$\beta = 4$				
1%	0,14	0,17	0,17	0,17	0,17	0,11	0,11	0,12	0,12	0,14
5%	0,32	0,35	0,34	0,34	0,35	0,29	0,31	0,32	0,32	0,33
10%	0,49	0,50	0,49	0,50	0,50	0,52	0,50	0,52	0,51	0,53
90%	10,02	6,28	5,68	5,66	5,64	33,41	15,66	13,38	12,52	12,40
95%	18,16	9,20	8,34	8,18	8,35	77,86	25,36	22,21	20,12	20,49
99%	82,76	19,23	16,99	17,07	16,58	743,70	71,58	58,21	51,32	50,87
	$\beta = 5$					$\beta = 6$				
1%	0,07	0,09	0,09	0,10	0,10	0,07	0,07	0,08	0,08	0,09
5%	0,29	0,30	0,29	0,32	0,33	0,31	0,29	0,33	0,34	0,32
10%	0,58	0,55	0,55	0,56	0,59	0,68	0,63	0,69	0,66	0,64
90%	120,14	40,43	32,63	30,52	31,80	504,83	110,18	86,22	78,61	73,12
95%	393,86	76,56	63,56	54,58	57,88	2067,86	244,08	181,04	170,62	145,97
99%	9904,51	276,67	212,69	167,58	166,46	117510,40	1530,73	708,65	715,94	589,16
	$\beta = 7$					$\beta = 8$				
1%	0,05	0,05	0,07	0,08	0,07	0,04	0,05	0,06	0,06	0,06
5%	0,32	0,31	0,32	0,35	0,34	0,32	0,32	0,36	0,38	0,40
10%	0,83	0,74	0,77	0,81	0,73	0,95	0,95	0,94	0,95	0,99
90%	2008,32	322,79	229,78	194,94	190,41	8347,69	961,03	613,67	519,46	476,52
95%	12093,40	820,23	556,18	433,07	411,05	72253,27	2864,17	1712,16	1403,37	1209,31
99%	1675841,53	6492,92	2656,67	1904,24	1968,38	32840237,66	29550,30	11498,82	9158,05	6760,86

11 lentelė: Kim statistikos modifikacijos su skirtingomis β reikšmėmis skirstinio kvantiliai atitinkamo dydžio imtims.

Priedas Nr. 3.
Testų statistikų reikšmės Baltijos šalių indeksams

Lo ir MacKinlay, kai $\alpha = 0{,}05$, kritinė sritis yra $(-1{,}96; 1{,}96)$.

	k	LoMac M1	LoMac M2	Wright rangų R1	Wright rangų R2	Wright ženklų S1
Vilnius	2	3,36*	1,57	1,40	2,24*	0,83
	5	3,16*	1,63	1,74	2,33*	1,55
	10	2,78*	1,54	1,42	1,94	1,65
	30	0,48	0,30	1,27	1,12	0,90
Ryga	2	-6,05*	-4,85*	-6,86*	-7,00*	-4,59*
	5	-3,35*	-2,32*	-4,82*	-4,74*	-3,46*
	10	-1,27	-0,87	-3,21*	-3,01*	-2,40*
	30	-0,64	-0,48	-2,54*	-2,21*	-2,29*
Talinas	2	3,36*	1,57	1,40	2,24	0,83
	5	3,16*	1,63	1,74	2,33*	1,55
	10	2,78*	1,54	1,42	1,94*	1,65
	30	0,48	0,30	1,27	1,12	0,90

12 lentelė: Lo ir MacKinlay bei Wright testų reikšmės (*žymi, jei H_0 atmetama, kai $\alpha = 0{,}05$).

	$k = 2$	$k = 5$	$k = 10$	$k = 30$
Rangų R1	(-1,95; 1,87)	(-1,94; 1,90)	(-1,96; 1,89)	(-1,97; 1,84)
Rangų R2	(-1,98; 1,91)	(-1,95; 1,93)	(-1,96; 1,91)	(-1,97; 1,86)
Ženklų S1	(-2,02; 1,88)	(-2,02; 1,93)	(-1,96; 1,96)	(-1,88; 1,98)

13 lentelė: Wright testo kritinės sritys, kai reikšmingumo lygmuo $\alpha = 0{,}05$, atitinkamoms k reikšmėms.

Chow ir Denning testo kritinės reikmės pasirinktam reikšmingumo lygmeniui $\alpha = 0{,}01, 0{,}05, 0{,}1$ atitinkmai yra 2,22, 2,49, 3,02.

Miestas	Chow–Denning MV1	Chow–Denning MV2
Vilnius	2,53*	1,29
Ryga	6,04*	4,84*
Talinas	3,36*	1,63

14 lentelė: Chow ir Denning testo statistikos reikšmės (*žymi, jei H_0 atmetama, kai $\alpha = 0{,}05$).

b	Vilnius	Ryga	Talinas
64	0,51	0,11	0,00
105	0,48	0,28	0,00
146	0,38	0,39	0,00
187	0,34	0,49	0,00
228	0,36	0,47	0,00
269	0,30	0,43	0,00

15 lentelė: Whang-Kim testo p-reikšmės.

Priedas Nr. 4.
Papildomos prielaidos

Lo ir MacKinlay [9] prielaidos:

- $\forall\ t\ \ \mathrm{E}(x_t) = 0$ ir $\mathrm{E}(x_t x_{t-k}) = 0$ bet kokiam $k \neq 0$;
- $\{x_t\}$ yra ϕ-mišinys su $\frac{r}{2r-1}$ dydžio koeficientais $\phi(m)$ arba α-mišinys su $\frac{r}{r-1}$ dydžio koeficientais $\alpha(m)$, kur $r > 1$, toks, kad visiems t ir kiekvienam $k \geq 0$ egzistuoja $\delta > 0$, su kuria:
$$\mathrm{E}|x_t x_{t-k}|^{2(r+\delta)}\triangle < \infty$$
- $\lim_{T\to\infty} T^{-1}\sum_{t=1}^{T} \mathrm{E}(x_t^2) < \infty$;
- $\forall\ t\ \ \mathrm{E}(x_t x_{t-j} x_t x_{t-i}) = 0$ bet kokiems teigiamiems j ir i, kur $j \neq i$.

Wright [13] testo prielaidos: $x_t = \mu + z_t$ ir $z_t = \sigma_t \epsilon_t$. Turimt informacijos aibę $I_t = \{x_t, x_{t-1}, \ldots\}$:

- z_t yra vienodai nepriklausomai pasiskirstę;
- σ_t ir ϵ_t yra nepriklausomi atsižvelgiant į I_{t-1};
- $\mathrm{E}(\epsilon_t|I_{t-1}) = 0$ ir $1(\epsilon_t > 0)$ yra vienodai nepriklausomai pasiskirstęs atsitktini dydis dydis, įgyjantis 1 su tikimybe 1/2 ir 0 kitu atveju.

Priedas Nr. 5.
R kodas

R kodas, susiję̨s su skaičiavimais. Yra pateikiamos esminės kodo dalys bei nuorodos, kaip pritaikyti.

```
###Apibrėžiama funkcija, kuris skaičiuoja KIM statistika (dalinių sumų santykis)
 pasirinktai imčiai, k periodui bei pasirinktai beta reikšmei. Ši funkcija bus naudojama visame kode.###

statistika<-function(x,tau,beta){
n<-length(x)
Sk<-sum(x[1:floor(n*tau)])
S1<-0
S2<-0
 for (i in 1:floor(n*tau)){
  S1<-abs(sum(x[1:i])-(i/floor(n*tau))*Sk)^beta + S1}
alfa<-(beta+2)/2
Sv<-((1/floor(n*tau))^alfa) * S1
if (floor(n*tau)==n){
  Snk<-sum(x[(floor(n*tau)):n])}
 else{
  Snk<-sum(x[(floor(n*tau)+1):n])}
   for(j in (floor(n*tau)+1):n){
    S2<-abs(sum(x[j:n])-((n-j+1)/(n-floor(n*tau)))* Snk)^beta+S2}
Ss<-1/((n-floor(n*tau))^alfa) * S2
st<-Ss/Sv
return(st) }

###Funkcija skirta testo statistikai testavimo intervale, t.y. sumuoja visas
aukščiau aprašytos statistikos reikšmes per visas tau reikšmes iš pasirinkto testavimo intervalo.###
###Ši funkcija bus naudojama visame kode.###

maks<-function(x,aa,beta){
 n<-length(x)
 ss<-numeric()
  for(k  in 1:n){
ss[k]<-statistika(x,k/n,beta)
  }
 suma<-sum(ss[(floor(n*aa/100)+1):((floor(n*(1-(aa/100)))))],na.rm=T)
 suma<-suma/n
return(suma)
}

###Modeliuojama Kim testo statistiskos pasiskirtymas su skirtingomis beta ir T reikšmėmis, kai
teisinga H_0. X~N(0,1)###
###Kodas visoms pasirinktoms beta reikšmėms, įstačius beta reikšmę ten kur parašyta 'beta'.###

Kim_stat_beta<-matrix(0,10000,5)
```

```
colnames(Kim_stat_beta) <- c(’T25’, ’T50’, ’T100’,’T200’,’T500’)
nn<-c(25,50,100,200,500)
for(k in 1:5){
n<-nn[k]
stat<-numeric()
z<-numeric()
pval<-numeric()
for( i in 1:10000){
x<-rnorm(n)
stat[i]<-maks(x,10,beta)
print(i)
}
Kim_sta_beta[,k]<-c(stat)
}

###Modeliuojamas Kim statistikos dydis ir atitinkamų p-reikšmės bei jų
empirinis pasiskirstymas, kai teisinga H_0.###

pval_v<-matrix(0,1000,40)
set.seed(3)
T<-c(25,50,100,200,500)

###Kodas yra įdėtas bendru atveju. Reikia įrašyti norimą beta reikšmę, kur parašyta beta.###

for (k in 1:5){
pval<-0
beta<-1
n<-T[k]
f<-ecdf(Kim_stat_beta[,k])
for( i in 1:1000){
y<-rnorm(n)
nob <- length(y)
a<-maks(y,10,beta)
pval[i] = (1-f(a))
}
print(i)
pval_v[,k]<-pval
}
```

.....ir taip visoms beta reikšmėms, tada priskiriame:

```
p_prie_H0<-pval_v

###Skaičiuojamas testo dydis atitinkama alfa lygmeniui###

library(xtable) #naudojamas paketas, kurio deka suformuojamos latex lentelės

a<-apply(pval_v<0.01,2,sum)/1000
```

```
b<-as.data.frame(split(a,1:5))
c<-apply(pval_v<0.05,2,sum)/1000
d<-as.data.frame(split(c,1:4))
xtable(cbind(b,d),digits=3)

###Braižomi empirimiai p-reikšmių pasiskirstymo grafikai###

library(ggplot2) #paketas, kuris skirtas grafikų braižymui
library(plyr) #paketas, kuris padeda atlikti veiksmus su duomenų lentelėmis

###Pateiktas pavyzdys, kai imties dydis T=100. Kitiems T dydžiams reikia
išrinkti iš duomenų lentelės pval_v, kurioje saugomos modeliuotos p reikšmės, atitinkamus stulpelius.###

df<-data.frame(pval_v[,c(3,7,11,15,19,23,27,31)])
names(df)<-c(1,2,3,4,5,6,7,8)
dff<-melt(df)
names(dff)<-c("beta", "value")
cc<-c('red', 'green', 'blue','purple','black','yellow','orange','gray')

ggplot(dff, aes(value, colour = beta)) +
stat_ecdf(geom = "line",pad=F)+ scale_colour_manual(values=cc)+
labs(x="",y="")+theme_bw()+coord_cartesian(
xlim = c(0, 0.25), ylim = c(0, 0.25))+
theme(legend.background = element_rect(colour = "black"),legend.title = element_blank())

###Funkcija skirta modeliuoti atsitiktinio klaidžiojimo procesą, kurio ilgis n.###
GetRandomWalk <- function() {
c(cumsum(rnorm(n)))
}

###Kim testo modifikacijų galios atmesti neteisingą hipotezę, kai modeliuojams atsitiktinis klaidžiojimas###

pval_v<-matrix(0,1000,40)
set.seed(3)
T<-c(25,50,100,200,500)

###Kodas yra įdėtas bendru atveju. Reikia įrašyti norimą beta reikšmę, kur parašyta beta.###
for (k in 1:5){
pval<-0
n<-T[k]
f<-ecdf(Kim_stat_beta[,k])
for( i in 1:1000){
y<-GetRandomWalk()
nob <- length(y)
a<-maks(y,10,beta)
pval[i] = (1-f(a))
}
```

```
print(i)
pval_v[,k]<-pval
}
.....ir taip visoms beta reikšmėms, tada priskiriame:
p_prie_H1<-pval_v

###galia ir p-reikšmių pasiskirstymo grafikai braižomi naudojantis atitinkamu kodu
kaip ir prie teisingos H_0, kai buvo tyriams testo dydis####

###Kim testo modifikacijos galia, kai alternatyva yra perėjimo modelis###
pval_v<-matrix(0,1000,40)
set.seed(3)
T<-c(25,50,100,200,500)

###Kodas yra įdėtas bendru atveju. Reikia įrašyti norimą beta reikšmę, kur parašyta beta.###

for (k in 1:5){
pval<-0
beta<-1
n<-T[k]
f<-ecdf(Kim_stat_beta[,k])
for( i in 1:1000){
y<-numeric(n)
y[1:(n/2)]<-arima.sim((n/2),model=list(ar=0.60))
y[((n/2)+1):n]<-GetRandomWalk()[1:(n/2)]
nob <- length(y)
a<-maks(y,10,beta)
pval[i] = (1-f(a))
}
print(i)
pval_v[,k]<-pval
}
.....ir taip visoms beta reikšmėms, tada priskiriame:
p_prie_H2<-pval_v
###galia ir p-reikšmių pasiskirstymo grafikai braižomi naudojantis atitinkamu kodu
kaip ir prie teisingos H_0, kai buvo tyriams testo dydis####

###Keturiems literatūros apžvalgoje aprašytiems testams yra R'e paketas vrtest###
library(vrtest)
y<-arima.sim(n,model=list(ar=0.9)) #generuoja atitinkamo dydžio ar procesą
kvec<-c(2,5,10,30) #pasirenkamos k reikšmės
Lo.Mac(y,kvec) #Lo ir MacKinlay testo rezultatai
Wright(y,kvec) #Wright testų rezultatai
Chow.Denning(y,kvec) #Chow ir Denning testų rezultatai
Subsample.test(y,kvec) #Whang ir Kim testų rezultatai
Wright.crit(n,k,10000) #Wright atveju reikia atsirai generuoti kritines reikšmes
```