VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Magistro darbas

Antrojo reguliarumo grafų be ilgų ciklų skaičiaus asimptotinės formulės

Vaida Rokaitė

VILNIUS 2016

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

TIKIMYBIŲ TEORIJOS IR SKAIČIŲ TEORIJOS KATEDRA

Darbo vadovas prof. habil. dr. Eugenijus Manstavičius ____________________

Darbo recenzentas ____

Darbas apgintas (data) _________________________

Darbas įvertintas ______________________________

Registravimo NR. ______________________________

Atidavimo į katedrą data _______________________

Turinys

1 Įvadas

Darbe nagrinėjami paprastieji numeruoti grafai. Pagal apibrėžimą jie neturi kartotinių briaunų ir kilpų. *Numeruotoju grafu* vadinsime grafą $G = (V, E)$, kurio viršūnių aibė yra sunumeruota, $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Tegul k yra natūralusis skaičius, tada sakome, kad grafas $G = (V, E)$ yra k *reguliarusis*, jeigu kiekviena to grafo viršūnė iš V yra incidenti su k briaunų iš E. Grafai, kurių kiekvienos viršūnės laipsnis yra lygus 2, yra 2-ojo reguliarumo. Tai atskira numeruotųjų kombinatorinių struktūrų klasė. Jungūs 2-ojo reguliarumo grafai yra bekrypčiai ciklai, kurių ilgiai $j \geqslant 3$. Darbo tikslas yra rasti n-osios eilės antrojo reguliarumo grafų be ilgų ciklų skaičiaus asimptotines formules, kai $n \to \infty$.

2014 m. E. Manstavičius ir R. Petuchovas [5] rado asimptotines formules n-osios eilės keitinių digrafams, kurių ciklų ilgiai neviršija r, kai $1 \leqslant r \leqslant n$ ir $n \to \infty$. Jie pritaikė balno taško metodą, kuris yra panaudotas ir šiame darbe sprendžiant analogišką uždavinį 2-ojo reguliarumo grafų klasėje. Gautas rezultatas yra išreikštas per balno taško lygties

$$\sum_{j=3}^{r} x^j = 2n$$

sprendinį $x = x(u)$, čia $u := 2n/(r-2)$, ir funkcijas

$$Q(y) := \frac{1}{y^n} \exp\left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=3}^{r} \frac{y^j}{j} \right\}, \qquad \lambda(y) := \frac{1}{2} \sum_{j=3}^{r} j y^j.$$

Trumpumo dėlei įverčiuose vietoje simbolio $O(1)$ darbe vartosime dydį B, kuris skirtingose vietose nevisada tas pats, bet visada yra aprėžtas absoliučia konstanta. Be to, tegul $a \wedge b = \min\{a, b\}$, jei $a, b \in \mathbb{R}$. Darbo pagrindinis rezultatas yra žemiau suformuluota teorema.

1 Teorema. *Tegul $N(n, r)$ yra n-osios eilės 2-reguliarumo grafų, kurių ciklų ilgiai j tenkina nelygybes $3 \leqslant j \leqslant r$, skaičius. Jei c yra pakankamai maža konstanta, o*

$3 \leqslant r \leqslant cn/\log^2 n$, *tai*

$$\frac{N(n,r)}{n!} = \frac{Q(x)}{\sqrt{2\pi\lambda(x)}}\left(1+\frac{Br}{n}\right),$$

čia $x = x\big(2n/(r-2)\big)$.

Teorema įrodyta kitame skyrelyje. Darbe taip pat yra gautos $x = x(u)$ ir $\lambda(x)$ asimptotikos:

1. Jeigu $u \geqslant 2$ ir x apibrėžtas aukščiau balno taško lygtimi, tai

$$x = \exp\left\{\frac{\log\big(u((r-2)\wedge\log u)\big)}{r}\right\}\left(1+\frac{B}{r}\right),$$

2. Jeigu $2 \leqslant u \leqslant e^{r-2}$, tuomet

$$x \quad = \quad \exp\left\{\frac{\log(u\log u)}{r}\right\}\left(1+\frac{B\log\log u}{r\log u}+\frac{B\log u}{r^2}\right),$$

3. Be to,

$$\frac{2\lambda(x)}{r(r-2)u} = 1+\frac{B}{\log u}, \quad u \geqslant 2.$$

Jų įrodymai pateikti 5 lemoje.

Reikia pažymėti, kad nagrinėtam uždaviniui spręsti, kai r yra fiksuotas parametras, buvo galima panaudoti jau žinomas bendras formules, išvestas, pavyzdžiui, B. Harris'o ir L. Schoenfeld'o straipsnyje [2]. Tačiau tada liekamojo nario priklausomybė nuo r liktų neišaiškinta.

2 Bendros sąvokos ir pagalbinės lemos

Antrojo reguliarumo grafai sudaro atskirą numeruotųjų kombinatorinių struktūrų klasę, todėl galime pasinaudoti bendra teorija. Priminsime keletą sąvokų. Paprastai, n-osios, $n \in \mathbb{N}$, eilės numeruotosios kombinatorinės struktūros apibrėžiamos turint n numeruotų atomų (viršūnių, taškų ir kt.) įvedant kokius nors sąryšius tarp jų ir prisilaikant sąlygos - koks bebūtų $n \in \mathbb{N}$ yra tik baigtinis skaičius n-osios eilės struktūrų. Dėl patogumo, kai kada į klasę įtraukiama viena tuščioji struktūra, kurią žymėsime ε. Kombinatorines numeruotų struktūrų klases žymėsime $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots, \mathcal{Z}$, o n-osios eilės struktūrų poklasius – raidėmis su indeksu: $\mathcal{A}_n, \mathcal{B}_n, \ldots, \mathcal{Z}_n$. Klasės $\mathcal{A}$ *eksponentine generuojančiąja funkcija* (e.g.f.) vadiname eilutę

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n!} x^n, \tag{2.1}$$

čia $A_0 = 1$, jei $\varepsilon \in \mathcal{A}$, ir $A_0 = 0$ - priešingu atveju, $A_n = |\mathcal{A}_n|$.

Turėdami dvi numeruotųjų struktūrų klases $\mathcal{U}$ ir $\mathcal{V}$, apibrėžiame trečiąją $\mathcal{W}$, kurią vadiname *žymėtąja sandauga.* Ją sudaro visos nesutvarkytosios poros $w = \{u, v\}$, čia $u \in \mathcal{U}$ ir $v \in \mathcal{V}$ su visais galimais toliau aprašytais natūraliaisiais atomų numeravimais. Jei $u \in \mathcal{U}$ atomai yra sunumeruoti skaičiais $\{1, \ldots, m\}$, o $v \in \mathcal{V}$ - skaičiais $\{1, \ldots, n\}$, tai w numeracijai yra naudojami skaičiai $\{1, \ldots, m + n\}$. Žymėtosios sandaugos w numeraciją apibrėžia bet kokios dvi monotoniškai didėjančios funkcijos

$$\theta_1 : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, m + n\}$$

ir

$$\theta_2 : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m + n\},$$

kurių reikšmių sritys nesikerta, o šių sričių sąjunga yra visa aibė $\{1, \ldots, m + n\}$. Peržymint u atomai numeruojami reikšmėmis $\theta_1(i), i = 1, \ldots, m$, o v atomai - reikšmėmis $\theta_2(i), i = 1, \ldots, n$. Porą $w = \{u, v\}$ su pakeista numeracija pažymėkime $u \circ v$, o jų visumą - $\{u \circ v\}$. Joje porų bus $|\{u \circ v\}| = \binom{m+n}{n}$ ir jos skirsis tik atomų numeriais. Visos poros $w = u \circ v, u \in \mathcal{U}, v \in \mathcal{V}$, sudaro klasių $\mathcal{U}$ ir $\mathcal{V}$ *žymėtąją sandaugą*

$$\mathcal{W} := \mathcal{U} \circ \mathcal{V}.$$

Tegul $\mathcal{U}^{\circ 0} = \{\varepsilon\}$ - aibė iš vienos tuščiosios struktūros, $\mathcal{U}^{\circ 1} = \mathcal{U}$, $\mathcal{U}^{\circ 2} = \mathcal{U} \circ \mathcal{U}, \ldots$. Tada pagal matematinę indukciją $\mathcal{U}^{\circ m} = (\mathcal{U}^{(m-1)}) \circ \mathcal{U}$. Dabar bet kuris elementas iš $\mathcal{U}^{\circ m}$ yra pradinių struktūrų m-osios galios poaibis, o visi jo struktūrose esantys atomai yra natūraliai sunumeruoti. Todėl tokį elementą irgi galime laikyti numeruotąja struktūra.

1 Apibrėžimas. *Tiesioginė sąjunga*

$$\mathcal{U}^{\circ} := \mathcal{U}^{\circ 0} \cup \mathcal{U}^{\circ 1} \cup \mathcal{U}^{\circ 2} \cdots \cup \mathcal{U}^{\circ m} \cdots \tag{2.2}$$

vadinama struktūrų klasės $\mathcal{U}$ *generuotąja ansamblių klase, o bet kuri struktūra iš* $\mathcal{U}^{\circ}$ *- ansambliu.*

Plačiau apie ansamblius galime rasti [3] knygos 8 skyriuje. Mes naudosime keletą matematinių teiginių, paimtų iš jos.

1 Lema. *Jei* $\mathcal{U}$ *yra numeruotųjų struktūrų klasė,* $\epsilon \notin \mathcal{U}$ *ir* $U(z)$ *- jos e.g.f., tai jos generuotosios ansamblių klasės e.g.f. yra*

$$U^{\circ}(z) = e^{U(z)} \tag{2.3}$$

Įrodymas. Įrodymas yra [3, 146 p.].

2 Lema. *2-ojo reguliarumo grafų klasės e.g.f. yra*

$$R(z) = \exp\{-z/2 - z^2/4\}(1 - z)^{-1/2}. \tag{2.4}$$

Įrodymas. Lema išplaukia iš [3] 8 skyriaus ir 1 lemos. Iš tiesų, šie grafai yra ciklų klasės generuoti ansambliai, o ciklų klaės e.g.f. yra

$$C(z) = \sum_{j=3}^{\infty} \frac{(j-1)!}{2j!} z^j = \frac{1}{2}[\ln(1 - z)^{-1} - z - z^2/2]. \tag{2.5}$$

Toliau pakanka pritaikyti 1 lemą su $U(z) = C(z)$.

3 Lema. *Tegul* $\bar{s} = (s_1, \ldots, s_r) \in \mathbb{N}_0^r$ *ir* $\ell(\bar{s}) = 1s_1 + \cdots + rs_r$, *čia* $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, *tada visų 2-ojo reguliarumo grafų, kurių eilė lygi* n*, skaičius*

$$p(n) = n! \sum_{\substack{\ell(\bar{s})=n \\ s_1=s_2=0}} \prod_{j=3}^{r} \left(\frac{1}{2j}\right)^{s_j} \frac{1}{s_j!}, \tag{2.6}$$

čia sumuojama pagal $\bar{s} \in \mathbb{N}_0^r$*, kai* $s_1 = s_2 = 0$ *ir* $\ell(\bar{s}) = n$*.*

Įrodymas. Pakanka formaliai apskaičiuoti r-ąjį $R(z)$ koeficientą.

4 Lema. *Tegul* $N(n, r)$ *yra 2-ojo reguliarumo grafų, kurių eilė lygi* n *ir, kurie neturi ciklų ilgesnių nei* r*, skaičius, tuomet teisinga lygybė*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{N(n,r)}{n!} z^n = \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{j=3}^{r} \frac{z^j}{j}\right\}, \tag{2.7}$$

čia $z \in \mathbb{C}$*.*

Įrodymas. Pastebime, kad 2-ojo reguliarumo grafai, kurių ciklų ilgiai neviršija r, irgi sudaro ansamblių klasę ir pritaikome 1 lemą su

$$U(z) = \frac{1}{2}\sum_{j=3}^{r} \frac{(j-1)!}{j!} z^j = \frac{1}{2}\sum_{j=3}^{r} \frac{z^j}{j}. \tag{2.8}$$

Lema 4 įrodyta.

3 Teorema ir jos įrodymas

Iš Koši formulės ir 4 lemos turime lygybę

$$\frac{N(n,r)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\alpha} \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{j=3}^{r}\frac{z^j}{j}\right\}\frac{dz}{z^{n+1}}, \tag{3.1}$$

čia $\alpha > 0$ ir $3 \leqslant r \leqslant n$.

Taikydami balno taško metodą, imame $\alpha = x := x\Big(2n/(r-2)\Big) := x(u)$, kas yra vienintelis teigiamas sprendinys lygties

$$\sum_{j=3}^{r} x(u)^j = 2n := u(r-2), \tag{3.2}$$

čia $u \geqslant 2$.

1 Teorema. *Tegul*

$$Q(x) := \frac{1}{x^n}\exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{j=3}^{r}\frac{x^j}{j}\right\}, \qquad \lambda(x) := \frac{1}{2}\sum_{j=3}^{r} jx^j.$$

Jei c yra pakankamai maža konstanta, o $3 \leqslant r \leqslant cn/\log^2 n$, tai teisinga lygybė

$$\frac{N(n,r)}{n!} = \frac{Q(x)}{\sqrt{2\pi\lambda(x)}}\left(1 + \frac{Br}{n}\right), \tag{3.3}$$

čia $x = x\Big(2n/(r-2)\Big)$.

Iš pradžių ištiriame balno taško (3.2) lygties sprendinį ir pointegrinę funkciją integrale (3.1).

5 Lema. *Jeigu $u \geqslant 2$ ir x apibrėžtas (3.2), tai*

$$x = \exp\left\{\frac{\log\Big(u((r-2)\wedge\log u)\Big)}{r}\right\}\left(1 + \frac{B}{r}\right), \tag{3.4}$$

Jeigu $2 \leqslant u \leqslant e^{r-2}$, tuomet

$$x \;=\; \exp\left\{\frac{\log(u\log u)}{r}\right\}\left(1 + \frac{B\log\log u}{r\log u} + \frac{B\log u}{r^2}\right). \tag{3.5}$$

Be to,

$$\frac{2\lambda(x)}{r(r-2)u} = 1 + \frac{B}{\log u}, \quad u \geqslant 2. \tag{3.6}$$

Įrodymas.

Iš apibrėžimo $x > 1$, $u \geqslant 2$ ir

$$x^3(r-2) \leqslant u(r-2) \leqslant x^r(r-2).$$

Todėl

$$x^3 \leqslant u \leqslant x^r,$$

jei $r \geqslant 3$. Tada pritaikę geometrinio ir aritmetinio vidurkio nelygybę, gauname

$$x^{\frac{r+3}{2}} = (x^3x^4\cdots x^r)^{1/(r-2)} \leqslant \frac{1}{(r-2)}\sum_{j=3}^{r} x^j = u.$$

Taip pat turime

$$u^{1/r} \leqslant x \leqslant u^{2/(r+3)} \leqslant u^{\frac{1}{3}} \leqslant u, \tag{3.7}$$

Iš apibrėžimo gauname

$$x^r = x^2 + u(r-2)(1-x^{-1}). \tag{3.8}$$

Iš (3.7) ir $1 - e^{-t} \geqslant te^{-t}$, kai $t \geqslant 0$, turime, kad

$$\begin{aligned} x^r &> (r-2)u\Big(1 - \exp\{-(\log u)/r\}\Big) \\ &\geqslant \frac{r-2}{r}u\log u\exp\{-(\log u)/r\} \\ &\geqslant \frac{1}{3}u\log u\exp\{-(\log u)/r\} \\ &\geqslant \frac{1}{3e}u\log u, \end{aligned} \tag{3.9}$$

jei $r \geqslant \log u$.

Panašiai, $1 - e^{-t} \leqslant t$, jei $t \geqslant 0$, ir todėl

$$\begin{aligned} x^r &\leqslant x^2 + (r-2)u(1 - \exp\{-2(\log u)/r\}) \\ &\leqslant x^2 + \frac{r-2}{r}2u\log u \\ &\leqslant x^2 + 2u\log u. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Remdamiesi (3.7) formule, gauname

$$x^2 \leqslant u^{2/3} \leqslant \max_{u\geqslant 2}\Big(\frac{1}{u^{\frac{1}{3}}\log u}\Big)u\log u =: Cu\log u,$$

jei $u \geqslant 2$, su absoliučia konstanta $C > 0$. Toliau

$$x^r \leqslant (2+C)u\log u.$$

Iš (3.9) ir (3.10) nelygybių išplaukia

$$r \log x = \log(u \log u) + B, \tag{3.11}$$

čia $r \geqslant \log u$.

Jeigu $r \leqslant \log u$, turime

$$x^r > (r-2)u\Big(1 - \exp\{-(\log u)/r\}\Big) \geqslant \Big(1 - e^{-1}\Big)(r-2)u$$

ir

$$x^r \leqslant x^2 + (r-2)u \leqslant 2(r-2)u.$$

Dabar

$$r \log x = \log(u(r-2)) + B.$$

Iš pastarosios lygybės ir (3.11) gauname (3.4).

Norėdami patikslinti (3.4), kai $2 \leqslant u \leqslant e^r$, kartojame dar kartą su dideliu $r \geqslant r_0$, nes baigtiniams r asimptotikos yra trivialios. Taip pat galime tarti, kad u yra didelis; priešingu atveju, (3.4) netiksliname. Gauname

$$\begin{aligned} r \log x &= \log\Big[x^2 + (r-2)u\Big(1 - x^{-1}\Big)\Big] \\ &= \log\Big[(r-2)u\Big(1 - x^{-1}\Big)\Big] + \log\left[1 + \frac{x^2}{(r-2)u\Big(1 - x^{-1}\Big)}\right] \\ &= U_1 + U_2. \end{aligned}$$

Skaičiuojame U_1 ir U_2 atskirai. Iš pradžių pastebime, kad

$$\begin{aligned} U_1 &= \log\left[(r-2)u\left(1 - \exp\left\{\frac{-\log(u \log u)}{r}\right\}\left(1 + \frac{B}{r}\right)\right)\right] \\ &= \log\left[(r-2)u\left(\frac{\log(u\log u)}{r} + \frac{B\log^2(u\log u)}{r^2}\right)\left(1 + \frac{B}{r}\right)\right] \\ &= \log\left[u \log u\left(1 + \frac{\log(\log u)}{\log u} + \frac{B \log u}{r}\right)\right] + \frac{B}{r}. \end{aligned}$$

Panašiai, paimdami pakankamai mažas konstantas C_1 ir C_2 bei pakankamai didelį u, vertiname

$$\begin{aligned} U_2 &\leqslant \log\left[1 + \frac{x^2}{x^r - u^{2/3}}\right] \leqslant \log\left[1 + \frac{x^2}{C_1 u \log u - u^{2/3}}\right] \\ &\leqslant \log\left[1 + \frac{u^{2/3}}{C_2 u \log u}\right] = \log\left[1 + \frac{B}{u^{1/3}\log u}\right] = \frac{B}{u^{1/3}\log u}. \end{aligned}$$

Sudėję gauname

$$\begin{aligned} r\log x &= U_1+U_2 \\ &= \log\left[u\log u\left(1+\frac{\log(\log u)}{\log u}+\frac{B\log u}{r}\right)+\frac{B}{r}+\frac{B}{u^{1/3}\log u}\right]. \end{aligned}$$

Vadinasi,

$$\begin{aligned} x^r &= u\log u\exp\left\{\frac{B\log(\log u)}{\log u}+\frac{B\log u}{r}\right\} \\ &= u\log u\left(1+\frac{B\log(\log u)}{\log u}+\frac{B\log u}{r}\right). \end{aligned}$$

ir

$$x = \exp\left\{\frac{\log(\log u)}{r}\right\}\left(1+\frac{B\log(\log u)}{\log u}+\frac{B\log u}{r}\right)^{1/r}.$$

Pritaikę įverčius

$$(1+p)^{1/r}=\exp\left\{\frac{1}{r}\log(1+p)\right\}=\exp\left\{\frac{1}{r}Bp\right\}=1+\frac{Bp}{r},$$

kai $|p|\leqslant 1/2$, gauname

$$x = \exp\left\{\frac{\log(\log u)}{r}\right\}\left(1+\frac{B\log(\log u)}{r\log u}+\frac{B\log u}{r^2}\right).$$

Taigi turime

$$\begin{aligned} r\log x &= \log\left[x^2+(r-2)u\left(1-x^{-1}\right)\right] \\ &= \log\left[x^2+(r-2)u\left(1-\exp\left\{\frac{-\log(u\log u)}{r}\right\}\left(1+\frac{B}{r}\right)\right)\right] \\ &= \log\left(u\log(u\log u)+Bu+B(u/r)\log^2 u\right) \\ &= \log(u\log u)+\frac{B\log\log u}{\log u}+\frac{B\log u}{r}. \end{aligned}$$

Taip gauname (3.5) lygybę.

Norėdami įrodyti (3.6), pirmiausia atsižvelgiame į

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= \frac{x(rx^{r+1}-x^r(r+1)-2x^3+3x^2)}{2(x-1)^2} \\ &= \frac{(rx^{r+2}-x^{r+1}(r+1)-2x^4+3x^3)}{2(x-1)^2} \\ &= \frac{rx^{r+1}(x-1)}{2(x-1)^2}-\frac{x^{r+1}+2x^4-3x^3}{2(x-1)^2} \\ &= \frac{rx^{r+1}}{2(x-1)}-\frac{x^{r+1}+2x^4-3x^3}{2(x-1)^2} \\ &= \frac{r(r-2)u}{2}+\frac{x^3r}{2(x-1)}-\frac{x^{r+1}+2x^4-3x^3}{2(x-1)^2} \\ &= \frac{r(r-2)u}{2}+\frac{x^3r(x-1)-x^{r+1}-2x^4+3x^3}{2(x-1)^2}. \end{aligned}$$

Toliau

$$
\begin{aligned}
0 &\leqslant \frac{r(r-2)u}{2} - \lambda(x) \\
&= -\frac{x^3 r}{2(x-1)} + \frac{x^{r+1} + 2x^4 - 3x^3}{2(x-1)^2} \\
&\leqslant \frac{x^{r+1}}{2(x-1)^2} + \frac{x^4}{(x-1)^2} \\
&= \frac{(r-2)u}{2(x-1)} + \frac{x^3}{2(x-1)^2} + \frac{x^4}{(x-1)^2} \\
&= \frac{r(r-2)u}{2} \cdot \frac{1}{r(x-1)} + \frac{x^3}{2(x-1)^2} + \frac{x^4}{(x-1)^2} \\
&\leqslant \frac{r(r-2)u}{2\log u} + \frac{r^2 x^3}{2\log^2 u} + \frac{r^2 x^4}{\log^2 u} \\
&\leqslant \frac{r(r-2)u}{2\log u} + \frac{2r^2 x^4}{\log^2 u} = \frac{Br^2 u}{\log u},
\end{aligned}
$$

nes $r(x-1) \geqslant r(e^{(\log u)/r} - 1) \geqslant \log u$. Be to, vertindami antrąją trupmeną dešinėje pusėje pasinaudojome (3.7) nelygybe, kurioje $x \leqslant u^{2/r+3}$, ir gavome

$$
\frac{2r^2 x^4}{\log^2 u} = \frac{Br^2 u}{\log^2 u},
$$

jei $r \geqslant 5$. Kai $r = 3, 4$, suma $\lambda(x)$ vertinama trivialiai.

Lema 5 įrodyta.

Apibrėžiame

$$
g_r(t, y) := \sum_{j=3}^{r} \frac{y^j (e^{itj} - 1)}{j},
$$

čia $t \in [-\pi, \pi]$ ir $y > 1$.

6 Lema. *Jeigu $t \in [-\pi, \pi]$ ir $y > 1$, tuomet*

$$
\Re g_r(t, y) \leqslant -\frac{2}{\pi^2} \frac{y^{r+1}}{r(y-1)} \frac{t^2}{(y-1)^2 + t^2} + \frac{2y}{r(y-1)} + \frac{4y^2}{r}. \tag{3.12}
$$

Jeigu $1/r \leqslant |t| \leqslant \pi$, $x = x(u)$ ir $u := 2n/(r-2) \geqslant 2$, tuomet

$$
\Re g_r(t) := \Re g_r(t, x) \leqslant -\frac{1}{4\pi^2} \frac{u^{1-4/(r+3)}}{\log^2 u} + \frac{2}{r} + \frac{2}{\log u} + \frac{4u^{4/(r+3)}}{r}. \tag{3.13}
$$

Įrodymas. Pastebėkime, kad

$$\begin{aligned}
\Re \quad & \sum_{j=3}^{r} \frac{y^j(e^{itj}-1)}{j} \leqslant \frac{1}{r}\Re\sum_{j=3}^{r} y^j(e^{itj}-1) \\
= \quad & \frac{1}{r}\Re\sum_{j=1}^{r} y^j(e^{itj}-1) - \frac{1}{r}\Re\Big(y(e^{it}-1)+y^2(e^{2it}-1)\Big) \\
\leqslant \quad & \frac{y^{r+1}}{r(y-1)}\left(\Re\frac{e^{it(r+1)}(y-1)}{ye^{it}-1}-1\right) \\
+ \quad & \frac{y}{r(y-1)}\left(1-\Re\frac{e^{it}(y-1)}{ye^{it}-1}\right)+\frac{4y^2}{r} \\
\leqslant \quad & \frac{y^{r+1}}{r(y-1)}\left(\frac{y-1}{|ye^{it}-1|}-1\right)+\frac{2y}{r(y-1)}+\frac{4y^2}{r}. \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

Šioje nelygybėje naudojami įverčiai, kurie yra gauti pilnai sumai pagal $1 \leqslant j \leqslant r$ E. Manstavičiaus ir R. Petuchovo [5] darbe.

Jeigu $|t| \leqslant \pi$, tuomet

$$\frac{|ye^{it}-1|}{y-1} = \left(1+\frac{2y(1-\cos t)}{(y-1)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant \frac{((y-1)^2+(4/\pi^2)t^2)^{\frac{1}{2}}}{y-1},$$

nes

$$2t^2/\pi^2 \leqslant 1-\cos t \leqslant t^2/2. \qquad (3.15)$$

Pasinaudoję

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+v^2}}-1 \leqslant -\frac{1}{2}\frac{v^2}{\alpha^2+v^2}, \quad \alpha \geqslant 0,\ v \in \mathbb{R},$$

čia $\alpha = y-1$ ir $v = (2/\pi)t$, gauname

$$\frac{y-1}{|ye^{it}-1|}-1 \leqslant -\frac{2}{\pi^2}\frac{t^2}{(y-1)^2+t^2}.$$

Gautą nelygybę įstatome į (3.14) ir įrodymą pabaigiame (3.12) nelygybe.

Tegul $y = x$, $1/r \leqslant |t| \leqslant \pi$, $u \geqslant 2$ ir pagal (3.7) nelygybę

$$u^{1/r} \leqslant x \leqslant u^{2/(r+3)} \leqslant u^{\frac{1}{3}} \leqslant u.$$

Be to,

$$\frac{x^{r+1}}{x-1} = 2n + \frac{x^3}{x-1} \geqslant u(r-2)$$

ir

$$1 < \log u \leqslant r(x-1) \leqslant r(u^{2/(r+3)}-1) \leqslant \frac{2r}{r+3}u^{2/(r+3)}\log u. \qquad (3.16)$$

Pasinaudooję šiomis nelygybėmis iš (3.12) gauname

$$\begin{aligned}\Re g_r(t) &\leqslant -\frac{1}{\pi^2}\frac{u}{r^2(x-1)^2}+\frac{2}{r}\Big(1+\frac{1}{x-1}\Big)\\ &\leqslant -\Big(\frac{r+3}{2\pi r}\Big)^2\frac{u^{1-4/(r+3)}}{\log^2 u}+\frac{2}{r}+\frac{2}{\log u}+\frac{4u^{4/(r+3)}}{r}\\ &\leqslant -\frac{1}{4\pi^2}\frac{u^{1-4/(r+3)}}{\log^2 u}+\frac{2}{r}+\frac{2}{\log u}+\frac{4u^{4/(r+3)}}{r}.\end{aligned}$$

Lema 6 įrodyta.

Teoremos įrodymas.

Pasižymime

$$\lambda_k := \frac{1}{2}\sum_{j=3}^{r} j^{k-1}x^j, \qquad k \geqslant 1, \tag{3.17}$$

čia $x = x(\frac{2n}{r-2})$. Taip pat žinome, kad $\lambda_1 = u(r-2)$ ir $\lambda_2 = \lambda(x)$. Tegul $a \wedge b := \min\{a, b\}$, kai $a, b \in \mathbb{R}$.

Iš (3.1) pakeitę $z = xe^{it}$ ($x = x_r(n)$), $t \in \mathbb{R}$, $|t| \leqslant \pi$ turime lygybę

$$\begin{aligned}\frac{N(n,r)}{n!} &= \frac{Q(x)}{2\pi}\left(\int_{|t|\leqslant t_0}+\int_{t_0<|t|\leqslant\pi}\right)\exp\{g_r(t)\}\,e^{-itn}dt\\ &=: \frac{Q(x)}{2\pi}\Big(K_1(n)+K_2(n)\Big),\end{aligned} \tag{3.18}$$

čia $t_0 := r^{-7/12}n^{-5/12}$.

Toliau pritaikome $e^{it} = 1 + it - t^2/2 - it^3/6 + Bt^4$, jei $t \in \mathbb{R}$ ir $e^{\omega} = 1 + B|\omega|e^{|\omega|}$, jei $\omega \in \mathbb{C}$. Patikrinę, kad $\lambda_4 t_0^4 \leqslant (r^3 n)(r^{-7/3}n^{-5/3}) = (r/n)^{2/3} \leqslant 1$, pritaikę $\lambda := \lambda_2$, gauname:

$$\begin{aligned}&\exp\{g_r(t)\} = \exp\Big\{i\lambda_1 t - (\lambda/2)t^2 - i(\lambda_3/6)t^3 + B\lambda_4 t^4\Big\}\\ &= \exp\Big\{it\lambda_1 - (\lambda/2)t^2\Big\}\Big(1 - i(\lambda_3/6)t^3 + B\lambda_3^2 t^6\Big) + B\lambda_4 t^4 \exp\Big\{-(\lambda/2)t^2\Big\}\\ &= \exp\Big\{it\lambda_1 - (\lambda/2)t^2\Big\}\Big(1 - i(\lambda_3/6)t^3\Big) + B\Big(\lambda_4 t^4 + \lambda_3^2 t^6\Big)\exp\Big\{-(\lambda/2)t^2\Big\}.\end{aligned}$$

Tegul $u = 2n/(r-2)$, $\lambda_1 = n$, $\lambda_k \leqslant r^k u$, jeigu $k \geqslant 3$, ir pagal 5 lemą, $\lambda = \lambda(x) \sim nr$, kai $n \to \infty$, nes $u \to \infty$.

Dabar matome, kad

$$\begin{aligned}&K_1(n) = \int_{|t|\leqslant t_0} e^{-(\lambda/2)t^2}(1 - i(\lambda_3/6)t^3)dt + \frac{B}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{\lambda_4}{\lambda^2}+\frac{\lambda_3^2}{\lambda^3}\right)\\ &= \int_{|t|\leqslant t_0} e^{-(\lambda/2)t^2}dt + \frac{B}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{\lambda_4}{\lambda^2}+\frac{\lambda_3^2}{\lambda^3}\right)\\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_{|v|>t_0\sqrt{\lambda}} e^{-v^2/2}dv + \frac{B}{u\sqrt{\lambda}} = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} + \frac{B}{u\sqrt{\lambda}}.\end{aligned}$$

Skaičiuodami $K_2(n)$, pirmiausia atsižvelgiame į

$$\begin{aligned}\Re g_r(t) &= \sum_{j=3}^{r} \frac{x^j(\cos tj - 1)}{j} \leqslant -\frac{2}{\pi^2}\sum_{j=3}^{r}\frac{x^j t^2 j^2}{j} \\ &= -\frac{2}{\pi^2}t^2\sum_{j=3}^{r} jx^j = -\frac{2}{\pi^2}\lambda t^2,\end{aligned} \tag{3.19}$$

jeigu $t_0 \leqslant |t| \leqslant 1/r$.

Toliau pasinaudojame 5 ir 6 lemomis ir gauname

$$\begin{aligned}&K_2(n) = B \max_{1/r\leqslant|t|\leqslant\pi} \Big| \exp\Big\{g_r(t)\Big\}\Big| + \frac{B}{u\sqrt{\lambda}} \\ &= \frac{B}{\sqrt{\lambda}} \exp\Bigg\{ -\frac{1}{4\pi^2}\frac{u^{1-4/(r+3)}}{\log^2 u} + \frac{1}{2}\log\lambda\Bigg\} \\ &= \frac{B}{\sqrt{\lambda}} \exp\Bigg\{ -\frac{1}{4\pi^2}\frac{u^{1-4/(r+3)}}{\log^2 u} + \frac{1}{2}\log u + \frac{\log(r(r-2))}{2} + B + \frac{4u^{4/(r+3)}}{r}\Bigg\} + \frac{B}{u\sqrt{\lambda}}.\end{aligned}$$

Jei $r \geqslant 5$, paskutinio nario eksponentėje rodiklis neviršija $(1-4/(r+3))$, todėl sumažinę pirmojo nario konstantą, paskutinį narį galime praleisti. Tada

$$K_2(n) = \frac{B}{\sqrt{\lambda}} \exp\Bigg\{ -\frac{1}{8\pi^2}\frac{u^{1-4/(r+3)}}{\log^2 u} + \frac{1}{2}\log u + \log r\Bigg\} + \frac{B}{u\sqrt{\lambda}}.$$

Taip pat turime

$$\log r \leqslant \frac{1}{16}\frac{1}{\pi^2}\frac{u^{1-4/(r+3)}}{\log^2 u},$$

nes pagal teoremos sąlygą $r \leqslant cn/\log^2 n$.

Panaudoję šituos įverčius, gauname norimą integralo $K_2(n)$ eilę. Kai $r = 3, 4$, mūsų rezultatas išplaukia iš [2].

Teorema įrodyta.

Asymptotic formulas for a number of 2-regular graphs without long cycles

Vaida Rokaitė

In this work, we explore labelled 2-regular graphs without long cycles. A regular graph is a graph where each vertex has the same degree. So, the connected components in a 2-regular graph are cycles of length $j \geqslant 3$. The goal of this study is to find asymptotic formulas for the number $N(n,r)$ of 2-regular graphs of order n missing cycles longer than r, where $3 \leqslant r \leqslant n$. Using the saddle-point method we proved the following theorem.

1 Teorema. *Denote*

$$Q(x) := \frac{1}{x^n} \exp\left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=3}^{r} \frac{x^j}{j} \right\}, \qquad \lambda(x) := \frac{1}{2} \sum_{j=3}^{r} j x^j.$$

If $3 \leqslant r \leqslant cn/\log^2 n$, *then*

$$\frac{N(n,r)}{n!} = \frac{Q(x)}{\sqrt{2\pi\lambda(x)}} \left(1 + \frac{Br}{n}\right),$$

where $x = x\Big(2n/(r-2)\Big) =: x(u)$ *and is the unique positive solution to the equation*

$$\sum_{j=3}^{r} x(u)^j = 2n.$$

The quantity B *is bounded by an absolute constant.*

In addition, it is proved that the involved quantities satisfy the following asymptotical relations.

1. If $u \geqslant 2$, then
$$x = \exp\left\{ \frac{\log\Big(u((r-2) \wedge \log u)\Big)}{r} \right\} \left(1 + \frac{B}{r}\right).$$
2. If $2 \leqslant u \leqslant e^{r-2}$, then
$$x \quad = \quad \exp\left\{ \frac{\log(u \log u)}{r} \right\} \left(1 + \frac{B \log\log u}{r \log u} + \frac{B \log u}{r^2}\right).$$
3. Moreover, for $u \geqslant 2$,
$$\frac{2\lambda(x)}{r(r-2)u} = 1 + \frac{B}{\log u}.$$

Literatūra

[1] Ph.Flajolet, R.Sedgewick, *Analytic combinatorics.* Cambridge university, (2009) Tinklapis: `http://algo.inria.fr/flajolet/Publications/book.pdf`

[2] B.Harris, L.Schoenfeld *Asymptotic expansions for the coefficients of analytic generating function.* Illinois J. Math.,12:264–277, 1968.

[3] E.Manstavičius, *Analizinė ir tikimybinė kombinatorika,* Vilniaus universitetas, 2007.

[4] E.Manstavičius, *Mappings on Decomposable Combinatorial Structures: Analytic Approach,* Combinatorics, Probability & Computing, **11**(01):61–78, 2002.

[5] E.Manstavičius, R.Petuchovas, *Local probabilities for random permutations without long cycles.* The Electronic Journal of Combinatorics, **23**(1), #P1.58, 2016.