VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
TIKIMYBIŲ TEORIJOS IR SKAIČIŲ TEORIJOS KATEDRA

Adelė Vaiginytė

DISKRETUS SUDĖTINIŲ FUNKCIJŲ UNIVERSALUMAS

Magistro baigiamasis darbas

Leidžiu ginti ....
Darbo vadovas **prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas**

VILNIUS 2016

Turinys

1 Įvadas

Tegul $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis. Hurvico (Hurwitz) dzeta funkcija $\zeta(s,\alpha)$ su parametru $\alpha \in (0,1]$ vadinsime funkciją, pusplokštumėje $\sigma > 1$ apibrėžiamą Dirichlė eilute

$$\zeta(s,\alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+\alpha)^s}$$

ir analiziškai pratęsiamą į visą kompleksinių skaičių plokštumą, išskyrus tašką $s = 1$, kuris yra paprastasis polius su reziduumu 1. Kai $\alpha = 1$, $\zeta(s,\alpha)$ sutampa su Rymano dzeta funkcija $\zeta(s)$. Nuo parametro α (jo aritmetinės prigimties) priklauso ir dauguma šios funkcijos savybių.

Hurvico dzeta funkcija (kaip ir kitos dzeta funkcijos) su tam tikromis parametro α reikšmėmis yra universali, t.y., kiekvieną analizinę funkciją tam tikroje srityje galima tolygiai aproksimuoti funkcijos $\zeta(s,\alpha)$ postūmiais. Suformuluosime šį teiginį griežčiau. Tegul $D = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$, $\mathcal{K}$ – klasė kompaktinių srities D poaibių su jungiais papildiniais, o $H(K)$, $K \in \mathcal{K}$, – klasė tolydžių srityje D funkcijų, analizinių K viduje. Be to, $meas A$ žymėsime mačios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matą. Tuomet teorema formuluojama taip (įrodymą galima rasti, pavyzdžiui, [7]).

1.1 teorema. *Tegul α yra racionalusis arba transcendentusis skaičius, ir $\alpha \neq \frac{1}{2}, 1$. Be to, $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H(K)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\Big\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau,\alpha) - f(s)| < \varepsilon\Big\} > 0.$$

Pastaroji nelygybė rodo, jog postūmių $\zeta(s+i\tau,\alpha)$, kuriais galima aproksimuoti pasirinktą funkciją $f(s)$, yra ne tik be galo daug – ši aibė netgi turi teigiamą apatinį tankį. Atvejai $\alpha = \frac{1}{2}$ ir $\alpha = 1$ į teoremą neįtraukti, nes $\zeta(s,1) = \zeta(s)$ ir $\zeta(s,\frac{1}{2}) = (2^s - 1)\zeta(s)$. Šiais atvejais $\zeta(s,\alpha)$ taip pat yra universali, bet aproksimuojamų funkcijų klasė papildomai turi tenkinti sąlygą, jog srityje K jos atstovai neįgyja reišmės 0.

Teorema 1.1 yra vadinama tolydžiąja universalumo teorema, nes analizinių funkcijų aproksimacijai yra naudojami postūmiai $\zeta(s+i\tau,\alpha)$, kai τ intervale $[0,T]$ kinta tolydžiai. Tačiau yra įrodyta [3] analogiška teorema ir diskrečiu atveju, t.y., kai naudojami diskretūs postūmiai $\zeta(s+imh,\alpha)$, $m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \le N$, ir $h > 0$ yra fiksuotas skaičius.

1.2 teorema. *Tegul α, K ir $f(s)$ yra tokie pat kaip 1.1 teoremoje. Kai α racionalusis, $h > 0$ parenkamas laisvai, o transcendenčiojo α atveju h papildomai tenkina sąlygą*

$\exp\{\frac{2\pi}{h}\} \in \mathbb{Q}$. *Tada su kiekvienu $\varepsilon > 0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \#\Big\{0 \le m \le N : \sup_{s\in K} |\zeta(s+imh,\alpha) - f(s)| < \varepsilon\Big\} > 0.$$

Racionaliojo α atvejis yra ištirtas, pavyzdžiui, [6], o transcendenčiojo α atveju sąryšis išplaukia iš diskretaus universalumo įrodymo periodinei Hurvico dzeta funkcijai [4]. Iracionaliojo algebrinio α atvejis dar nėra iki galo išnagrinėtas, bet rezultatus mėginama plėsti. Pavyzdžiui, teorema 1.1 jau yra įrodyta atveju, kai α tenkina savybę, jog aibė $L(\alpha) = \{\log(m+\alpha) : m \in \mathbb{N}_0\}$ yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių kūno. Iš tiesų, ši α savybė yra platesnė už transcendentumą, o Kaselsas netgi įrodė [2], jog iracionaliojo algebrinio α atveju bent 51% aibės $L(\alpha)$ elementų yra tiesiškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$. Taigi, pastarasis teiginys bent iš dalies apima ir šį klausimą. Analogiškas diskrečiosios teoremos praplėtimas atrodo taip.

1.3 teorema. *Tegul aibė*

$$L(\alpha, h) = L(\alpha) \cup \left\{\frac{\pi}{h}\right\}$$

yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$, o K ir $f(s)$ yra tokie pat kaip 1.1 teoremoje. Tuomet yra teisingas 1.2 teoremos tvirtinimas.

Pravartu yra plėsti universalių (tiek tolydžiai, tiek diskrečiai) funkcijų klasę, o taip pat ir gauti kiek įmanoma įvairesnių bei lengviau patikrinamų tokių funkcijų nusakymo būdų. Žinodami, jog funkcija $\zeta(s,\alpha)$ su tam tikromis α reikšmėmis yra universali, ją galime naudoti kaip atskaitos tašką kitoms universalioms funkcijoms konstruoti. Straipsnyje [3] yra pasiekti tokie rezultatai.

$H(D)$ pažymėkime analizinių srityje D funkcijų erdvę su tolygaus konvergavimo kompakte topologija.

1.4 teorema. *Tegul aibė $L(\alpha, h)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$, K ir $f(s)$ yra tokie pat kaip 1.1 teoremoje, o tolydus operatorius $F : H(D) \to H(D)$ tenkina sąlygą, jog kiekvienam daugianariui $p = p(s)$ aibė $F^{-1}\{p\}$ yra netuščia. Tada su kiekvienu $\varepsilon > 0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \#\Big\{0 \le m \le N : \sup_{s\in K} |F(\zeta(s+imh,\alpha)) - f(s)| < \varepsilon\Big\} > 0.$$

1.5 teorema. *Tegul aibė $L(\alpha, h)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$, K ir $f(s)$ yra tokie pat kaip 1.1 teoremoje, o tolydus operatorius $F : H(D) \to H(D)$ tenkina sąlygą, jog kiekvienai atvirai aibei $G \subset H(D)$ aibė $F^{-1}G$ yra netuščia. Tuomet yra teisingas 1.4 teoremos tvirtinimas.*

Kaip matyti, 1.5 teorema yra 1.4 teoremos apibendrinimas.

Šio magistrinio darbo tikslas yra įrodyti panašius rezultatus štai tokiais atvejais.

Sakysime, jog operatorius $F : H(D) \to H(D)$ priklauso klasei $Lip(\beta)$, $\beta > 0$, jei tenkinamos šios sąlygos:

1. kiekvienam daugianariui $p = p(s)$ aibė $F^{-1}(p)$ yra netuščia;

2. kiekvienai aibei $K \in \mathcal{K}$ egzistuoja konstanta $c > 0$ bei aibė $K_1 \in \mathcal{K}$, kad

$$\sup_{s\in K}|F(g_1(s)) - F(g_2(s))| \leq c \sup_{s\in K_1}|g_1(s) - g_2(s)|^{\beta}$$

   su visomis $g_1, g_2 \in H(D)$.

1.6 teorema. *Tegul operatorius $F \in Lip(\beta)$, aibė $K \in \mathcal{K}$, o $f(s) \in H(K)$. Tegul, be to, aibė $L(\alpha, h)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$. Tada su kiekvienu $\varepsilon > 0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \#\{0 \leq m \leq N : \sup_{s\in K}|F(\zeta(s + imh, \alpha)) - f(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

Tegul $a_1, ..., a_r \in \mathbb{C}$. Apibrėžkime aibę

$$H_{a_1,...,a_r}(D) = \Big\{g \in H(D) : (g(s) - a_j)^{-1} \in H(D), j = 1, ..., r\Big\}.$$

1.7 teorema. *Tegul aibė $L(\alpha, h)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$, o tolydus operatorius $F : H(D) \to H(D)$ tenkina sąlygą $F(H(D)) \supset H_{a_1,...,a_r}(D)$. Jei $r = 1$, tegul aibė $K \in \mathcal{K}$, o $f(s) \in H(K)$, $f(s) \neq a_1$, kai $s \in K$. Jei $r \geq 2$, $K \subset D$ – bet koks kompaktinis poaibis, o $f(s) \in H_{a_1,...,a_r}(D)$. Tada yra teisingas 1.6 teoremos tvirtinimas.*

1.8 teorema. *Tegul aibė $L(\alpha, h)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$, $F : H(D) \to H(D)$ – tolydus operatorius, $K \subset D$ – kompaktinė aibė, o $f(s) \in F(H(D))$. Tuomet yra teisingas 1.6 teoremos tvirtinimas.*

2 Pagalbinės lemos

Šiame skyrelyje prisiminsime keletą teiginių, kurių prireiks įrodinėjant darbe nagrinėjamas teoremas.

Tegul $\mathcal{B}(X)$ yra erdvės X Borelio σ kūnas, o P ir $P_n, n \in \mathbb{N}$, – erdvėje $(X, \mathcal{B}(X))$ apibrėžti tikimybiniai matai. Sakoma, kad matas P_n silpnai konverguoja į matą P, kai $n \to \infty$, jei kiekvienai realiai aprėžtai tolydžiai funkcijai f erdvėje X

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f dP_n = \int_X f dP.$$

Naudosime šio apibrėžimo ekvivalentą atvirųjų aibių terminais. Ši lema – tai dalis 2.1 teiginio iš [1] šaltinio.

2.1 lema. *Tikimybinis matas P_n silpnai konverguoja į matą P, kai $n \to \infty$, tada ir tik tada, kai kiekvienai atvirajai aibei $G \subset X$ galioja nelygybė*

$$\liminf_{n\to\infty} P_n(G) \geq P(G).$$

Taip pat naudosime ir indukuotųjų matų savybes. Tegul X_1, X_2 yra dvi metrinės erdvės, o $h : X_1 \to X_2$ – $(\mathcal{B}(X_1), \mathcal{B}(X_2))$ mati funkcija, t.y., $h^{-1}\mathcal{B}(X_2) \subset \mathcal{B}(X_1)$. Tada kiekvienas tikimybinis matas P erdvėje $(X_1, \mathcal{B}(X_1))$ indukuoja vienintelį tikimybinį matą Ph^{-1} erdvėje $(X_2, \mathcal{B}(X_2))$, apibrėžiamą formule $Ph^{-1}(A) = P(h^{-1}A), A \in \mathcal{B}(X_2)$. Be to, jei funkcija h yra tolydi, tai ji yra ir $(\mathcal{B}(X_1), \mathcal{B}(X_2))$ mati.

2.2 lema. *Tegul P ir P_n, $n \in \mathbb{N}$, yra tikimybiniai matai erdvėje $(X_1, \mathcal{B}(X_1))$, o atvaizdis $h : X_1 \to X_2$ yra tolydus. Jei P_n silpnai konverguoja į P, kai $n \to \infty$, tai ir $P_n h^{-1}$ silpnai konverguoja į Ph^{-1}, kai $n \to \infty$.*

Šis teiginys tiesiogiai išplaukia iš bendresnio teiginio 5.1 [1] šaltinyje.

Paskutinis iš bendrųjų teiginių, kuriuos naudosime šiame darbe, yra susijęs su kompleksinių funkcijų aproksimavimu daugianariais.

2.3 lema (Mergelyan'o teorema). *Tegul turime $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H(K)$. Tuomet kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja polinomas $p = p(s)$, kad*

$$\sup_{s\in K} |f(s) - p(s)| < \varepsilon.$$

Šio teiginio įrodymą galima rasti [5].

3 Ribinės teoremos

Simboliu $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s|= 1\}$ pažymėkime kompleksinės plokštumos vienetinį apskritimą, o

$$\Omega = \prod_{m=0}^{\infty} \gamma_m;$$

čia $\gamma_m = \gamma$, $m \in \mathbb{N}_0$. Iš Tikhonovo teoremos turime, jog toras Ω su sandaugos topologija ir pataške daugyba yra kompaktinė topologinė Abelio grupė. Todėl erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ galime apibrėžti tikimybinį Haro matą m_H. Tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ apibrėžkime $H(D)$ reikšmį atsitiktinį elementą $\zeta(s, \alpha, \omega)$ formule

$$\zeta(s, \alpha, \omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\omega(m)}{(m+\alpha)^s};$$

čia $\omega(m)$ žymi elemento $\omega \in \Omega$ projekciją į koordinatinę erdvę γ_m, $m \in \mathbb{N}_0$. Iš tiesų, ši begalinė eilutė tolygiai konverguoja kompaktiniuose srities D poaibiuose beveik visiems $\omega \in \Omega$ dėl atsitiktinių elementų $\omega(m)$ ortogonalumo. P_ζ pažymėkime $\zeta(s, \alpha, \omega)$ pasiskirstymą, t.y.,

$$P_\zeta(A) = m_H\Big(\omega \in \Omega : \zeta(s, \alpha, \omega) \in A\Big), \quad A \in \mathcal{B}\left(H(D)\right).$$

Straipsnyje [3] yra įrodyta štai tokia teorema, kuria remsimės nagrinėdami sudėtinių funkcijų atvejus.

3.1 teorema. *Tegul aibė $L(\alpha, h)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$. Tuomet tikimybinis matas*

$$P_N(A) := \frac{1}{N+1} \# \Big\{0 \le m \le N : \zeta(s + imh, \alpha) \in A\Big\}, \quad A \in \mathcal{B}\left(H(D)\right),$$

silpnai konverguoja į matą P_ζ, kai $N \to \infty$.

Prisiminkime, jog Borelio aibėms $A \in \mathcal{B}\left(H(D)\right)$ matas $P_\zeta F^{-1}$ yra apibrėžiamas lygybe $P_\zeta F^{-1}(A) = P_\zeta(F^{-1}(A))$.

3.2 teorema. *Tegul aibė $L(\alpha, h)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$, o $F : H(D) \to H(D)$ – tolydus operatorius. Tuomet tikimybinis matas*

$$P_{N,F}(A) := \frac{1}{N+1} \# \Big\{0 \le m \le N : F(\zeta(s + imh, \alpha)) \in A\Big\}, \quad A \in \mathcal{B}\left(H(D)\right),$$

silpnai konverguoja į matą $P_\zeta F^{-1}$, kai $N \to \infty$.

Įrodymas. Imkime $A \in \mathcal{B}\left(H(D)\right)$. Tuomet iš P_N ir $P_{N,F}$ apibrėžimų turime, jog

$$
\begin{aligned}
P_{N,F}(A) &= \frac{1}{N+1}\#\Big\{0 \le m \le N : F(\zeta(s+imh,\alpha)) \in A\Big\}\\
&= \frac{1}{N+1}\#\Big\{0 \le m \le N : \zeta(s+imh,\alpha) \in F^{-1}A\Big\}\\
&= P_N\left(F^{-1}(A)\right) = P_N F^{-1}(A).
\end{aligned}
$$

Taigi, $P_{N,F} = P_N F^{-1}$. Pagal 3.1 teoremą, P_N silpnai konverguoja į P_ζ, kai $N \to \infty$, o atvaizdis F yra tolydus, todėl iš 2.2 lemos išplaukia, jog $P_N F^{-1}$ silpnai konverguoja į $P_\zeta F^{-1}$, kai $N \to \infty$, taigi, ir $P_{N,F}$ silpnai konverguoja į $P_\zeta F^{-1}$, kai $N \to \infty$. $\square$

4 Atramos

Mūsų nagrinėjamoms teoremoms įrodyti panaudosime žinias apie matų P_ζ ir $P_\zeta F^{-1}$ atramas. Tegul turime tikimybinę erdvę $(H(D), \mathcal{B}(H(D)), P)$. Erdvė $H(D)$ yra separabili, todėl mato P atrama yra minimali uždara aibė $S \subset H(D)$, tenkinanti sąryšį $P(S) = 1$. Ši aibė S yra sudaryta iš visų tokių elementų $g \in H(D)$, kurių kiekvienai atvirajai aplinkai G yra teisinga nelygybė $P(G) > 0$.

4.1 teorema. *Tegul aibė $L(\alpha, h)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$. Tuomet mato P_ζ atrama yra visa aibė H(D).*

Šio teiginio įrodymą galima rasti [3].

4.2 teorema. *Tegul aibė $L(\alpha, h)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$, o operatorius $F : H(D) \to H(D)$ tenkina 1.7 teoremos sąlygas. Tuomet į mato $P_\zeta F^{-1}$ atramą įeina aibės $H_{a_1,\ldots,a_r}(D)$ uždarinys.*

Įrodymas. Iš sąlygos $F(H(D)) \supset H_{a_1,\ldots,a_r}(D)$ išplaukia, jog kiekvienam $g \in H_{a_1,\ldots,a_r}(D)$ egzistuoja $g_1 \in H(D)$, kad $F(g_1) = g$. Imkime bet kokią elemento g atvirąją aplinką G. Dėl F tolydumo aibė $F^{-1}G$ bus elemento $g_1 \in F^{-1}(g)$ atviroji aplinka. Iš 4.1 teoremos žinome, jog g_1 priklauso mato P_ζ atramai, todėl

$$P_\zeta F^{-1}(G) = P_\zeta(F^{-1}G) > 0.$$

Kitaip sakant, elementas g priklauso mato $P_\zeta F^{-1}$ atramai. Kadangi $g \in H_{a_1,\ldots,a_r}(D)$ buvo parinktas laisvai, tai aibė $H_{a_1,\ldots,a_r}(D)$ priklauso $P_\zeta F^{-1}$ atramai, o taip pat jai priklauso ir šios aibės uždarinys. $\square$

5 Pagrindinių teoremų įrodymai

1.6 teoremos įrodymas. Tegul aibė $L(\alpha, h)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$, o operatorius F, aibė K bei funkcija f – kaip nurodyta teoremos sąlygoje. Iš Mergelyan'o teoremos (2.3 lemos) turime, jog egzistuoja daugianaris $p = p(s)$:

$$\sup_{s\in K}|f(s) - p(s)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

Iš Lipšico klasės apibrėžimo 1. dalies išplaukia, jog egzistuoja $g \in F^{-1}(p) \subset H(D)$. Tegul $m \in \mathbb{N}_0$ yra toks, kad

$$\sup_{s\in K_1}|\zeta(s + imh, \alpha) - g(s)| < c^{-\frac{1}{\beta}} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{\beta}}; \tag{2}$$

čia $K_1 \in \mathcal{K}$ yra aibė, atitinkanti aibę K, kaip minėta Lipšico klasės apibrėžimo 2. punkte. Iš tiesų, galime parinkti tokią m reikšmę, nes funkcija $\zeta(s, \alpha)$ yra diskrečiai universali (žr. 1.2 teoremą). Be to, taip parinktam m galioja sąryšis

$$\sup_{s\in K}|F(\zeta(s + imh, \alpha)) - p(s)| \le c \sup_{s\in K_1}|\zeta(s + imh, \alpha) - g(s)|^{\beta} < c\left(c^{-\frac{1}{\beta}}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\beta} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Iš 1.2 teoremos išplaukia, jog (2) nelygybę tenkinančių m apatinis tankis yra teigiamas, todėl ir pastarajai nelygybei teisinga

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{0 \le m \le N : \sup_{s\in K}|F(\zeta(s + imh, \alpha)) - p(s)| < \frac{\varepsilon}{2}\right\} > 0.$$

Atsižvelgę į (1) nelygybę, gauname:

$$\sup_{s\in K}|F(\zeta(s+imh, \alpha)) - f(s)| \le \sup_{s\in K}|F(\zeta(s+imh, \alpha)) - p(s)| + \sup_{s\in K}|f(s) - p(s)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Kitaip sakant,

$$\begin{aligned}&\{0 \le m \le N : \sup_{s\in K}|F(\zeta(s + imh, \alpha)) - f(s)| < \varepsilon\}\\ &\supset \left\{0 \le m \le N : \sup_{s\in K}|F(\zeta(s + imh, \alpha)) - p(s)| < \frac{\varepsilon}{2}\right\},\end{aligned}$$

t.y., teisingas teoremos tvirtinimas. □

1.7 teoremos įrodymas. Pirma, tegul $r \ge 2$, $K \subset D$ yra bet koks kompaktinis poaibis, o $f(s) \in H_{a_1,\dots,a_r}(D)$. Apibrėžkime aibę

$$G_1 = \{g \in H(D) : \sup_{s\in K}|g(s) - f(s)| < \varepsilon\}.$$

Iš 4.2 teoremos žinome, jog f priklauso mato $P_\zeta F^{-1}$ atramai, o G_1 pagal savo apibrėžimą yra f atviroji aplinka, todėl $P_\zeta F^{-1}(G_1) > 0$. Iš 3.2 teoremos ir silpnojo matų konvergavimo apibrėžimo atvirųjų aibių terminais (2.1 lema) gauname, jog

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \#\left\{0 \le m \le N : \sup_{s\in K} |F(\zeta(s+imh,\alpha)) - f(s)| < \varepsilon\right\}$$
$$= \liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \#\left\{0 \le m \le N : F(\zeta(s+imh,\alpha)) \in G_1\right\}$$
$$= \liminf_{N\to\infty} P_{N,F}(G_1) \ge P_\zeta F^{-1}(G_1) > 0.$$

Dabar tegul $r = 1$. Šiuo atveju imsime $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H(K)$ tokį, kad $f(s) \ne a_1$, kai $s \in K$. Tuomet iš Mergelyan'o teoremos (lema 2.3) išplaukia, jog egzistuoja polinomas $p = p(s)$, kad

$$\sup_{s\in K} |f(s) - p(s)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Kadangi $f(s) \ne a_1, s \in K$, tai, su pakankamai mažu ε, ir $p(s) \ne a_1, s \in K$. Todėl galime pasirinkti tolydžią logaritmo $\log(p(s) - a_1)$ šaką, kuri bus analizinė funkcija kompakto K viduje. Todėl vėl pasinaudoję Mergelyan'o teorema (2.3 lema) bei eksponentinės funkcijos tolydumu gauname, jog egzistuoja polinomas $p_1 = p_1(s)$, kad

$$\sup_{s\in K} |p(s) - a_1 - e^{p_1(s)}| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Pažymėkime $h_{a_1}(s) = e^{p_1(s)} + a_1$. Tuomet $h_{a_1}(s) \in H(D)$ ir $h_{a_1}(s) \ne a_1$. Kitaip sakant, $h_{a_1}(s) \in H_{a_1}(D)$, ir, pagal 4.2 teoremą, ji priklauso $P_\zeta F^{-1}$ atramai. Be to,

$$\begin{aligned} &\sup_{s\in K} |f(s) - h_{a_1}(s)| \le \sup_{s\in K} |f(s) - p(s)| + \sup_{s\in K} |p(s) - h_{a_1}(s)| \\ &= \sup_{s\in K} |f(s) - p(s)| + \sup_{s\in K} |p(s) - a_1 - e^{p(s)}| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Apibrėžkime $h_{a_1}(s)$ atvirąją $\varepsilon/2$ aplinką

$$G_2 = \left\{g \in H(D) : \sup_{s\in K} |g(s) - h_{a_1}(s)| < \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Tuomet iš 4.2 teoremos gauname, jog $P_\zeta F^{-1}(G_2) > 0$. Todėl, remiantis 2.1 lema,

$$\begin{aligned} &\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \#\left\{0 \le m \le N : \sup_{s\in K} |F(\zeta(s+imh,\alpha)) - h_{a_1}(s)| < \frac{\varepsilon}{2}\right\} \\ &= \liminf_{N\to\infty} P_{N,F}(G_2) \ge P_\zeta F^{-1}(G_2) > 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Prisiminę (3) nelygybę gauname, jog kiekvienam $m \in \mathbb{N}_0$, $0 \le m \le N$, tenkinančiam (4), yra teisinga

$$\sup_{s\in K}|F(\zeta(s+imh,\alpha))-f(s)|\leq \sup_{s\in K}|F(\zeta(s+imh,\alpha))-h_{a_1}(s)|$$
$$+\sup_{s\in K}|h_{a_1}(s)-f(s)|< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Todėl, kaip ir 1.6 teoremos įrodyme, gauname teoremos tvirtinimą. $\square$

1.8 teoremos įrodymas. Tegul yra tenkinamos 1.8 teoremos sąlygos. Pirmiausia pastebėsime, jog mato $P_\zeta F^{-1}$ atrama yra aibės $F(H(D))$ uždarinys. Iš tiesų, jei $g\in F(H(D))$ yra laisvai pasirinktas elementas, o G yra bet kuri jo atviroji aplinka, tai iš 4.1 teoremos išplaukia, jog
$$P_\zeta F^{-1}(G)=P_\zeta(F^{-1}G)>0,$$
t.y., g priklauso mato $P_\zeta F^{-1}$ atramai, nes, dėl F tolydumo, $F^{-1}G$ yra atviroji aplinka elemento $g_1\in F^{-1}\{g\}\subset H(D)$, kuris savo ruožtu priklauso mato P_ζ atramai. Be to,
$$P_\zeta F^{-1}\Big(F(H(D))\Big)=P_\zeta(H(D))=1.$$

Taigi, mato $P_\zeta F^{-1}$ atrama iš tiesų yra aibės $F(H(D))$ uždarinys. Toliau samprotaujame kaip 1.7 teoremos atveju. Imame elemento $f(s)\in F(H(D))$ atvirąją aplinką
$$G_1=\Big\{g\in H(D):\sup_{s\in K}|g(s)-f(s)|<\varepsilon\Big\}.$$

Funkcija f priklauso $P_\zeta F^{-1}$ atramai, todėl $P_\zeta F^{-1}(G_1)>0$. Ir vėl iš silpnojo matų konvergavimo apibrėžimo atvirųjų aibių terminais (2.1 lemos) gauname
$$\liminf_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\#\Big\{0\leq m\leq N:\sup_{s\in K}|F(\zeta(s+imh,\alpha))-f(s)|<\varepsilon\Big\}$$
$$=\liminf_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\#\Big\{0\leq m\leq N:F(\zeta(s+imh,\alpha))\in G_1\Big\}$$
$$=\liminf_{N\to\infty}P_{N,F}(G_1)\geq P_\zeta F^{-1}(G_1)>0.$$

$\square$

6 Pavyzdžiai

Šiame skyrelyje pateiksime keletą pavyzdžių, iliustruojančių teoremų 1.6 – 1.8 pritaikymą.

Pirmiausia imkime operatorių $F : g \to g',\ g \in H(D)$. Įrodysime, jog jis priklauso klasei $Lip(1)$. Akivaizdu, jog kiekvienam polinomui šio operatoriaus pirmavaizdis yra netuščias, taigi, tenkinama 1. sąlyga. Imkime $K \in \mathcal{K}$, o atvirą aibę G bei aibę $K_1 \in \mathcal{K}$ parinkime tokius, kad galiotų sąryšis $K \subset G \subset K_1$. Dabar imkime paprastą uždarąjį kontūrą l, gulintį aibėje $K_1 \setminus G$ ir apimantį aibę K. Tuomet iš Koši integralinės formulės gauname, jog su visais $g_1, g_2 \in H(D)$ galioja lygybė

$$F(g_1(s)) - F(g_2(s)) = \frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{g_1(z) - g_2(z)}{(s-z)^2}dz.$$

Todėl, kai $s \in K$

$$|F(g_1(s)) - F(g_2(s))| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{g_1(z) - g_2(z)}{(s-z)^2}dz\right| \le \frac{1}{2\pi i}\int_l \left|\frac{g_1(z) - g_2(z)}{(s-z)^2}\right| dz$$

$$\le \sup_{z\in l}|g_1(z) - g_2(z)|\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{1}{|s-z|^2}dz \le c \sup_{z\in K_1}|g_1(z) - g_2(z)|,$$

t.y., galioja 2. sąlyga su $\alpha = 1$, ir $F \in Lip(1)$. Taigi, iš 1.6 teoremos gauname, jog funkcija $\zeta'(s,\alpha)$, kai $L(\alpha, h)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$, yra diskrečiai universali.

Dabar imkime $F(g) = e^g$. Akivaizdu, jog šis operatorius yra tolydus ir erdvės $H(D)$ funkcijas atvaizduoja į erdvę $H(D)$. Tegul $f = F(g)$. Tuomet $g = F^{-1}(f) = \log f$. Jei tik $f(s) \ne 0,\ s \in D$, galime parinkti tolydžią logaritmo šaką, kad galiotų $g \in H(D)$. Kitaip sakant, $F(H(D)) \supset H_0(D)$. Todėl iš 1.7 teoremos, kai $r = 1$, gauname, jog funkcijos $e^{\zeta(s,\alpha)}$ diskrečiais postūmiais galima tolygiai aproksimuoti funkcijas $f(s) \in H(K) : f(s) \ne 0$, kai $s \in K$, $K \in \mathcal{K}$, jei tik $L(\alpha, h)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$. Kita vertus, iš operatoriaus F tolydumo ir 1.8 teoremos išsyk galime gauti, jog $e^{\zeta(s,\alpha)}$ su atitinkamomis α reikšmėmis diskretūs postūmiai yra kiek norima artimi funkcijoms, išreiškiamoms pavidalu e^g, $g \in H(D)$, visuose kompaktiniuose srities D poaibiuose (nereikalaujant papildinio jungumo).

Taip pat galima įrodyti ir funkcijos $\sqrt{1 - e^{\zeta(s,\alpha)}}$ (konkretumo dėlei imsime vieną funkcijos šaką) diskretų universalumą tam tikro tipo funkcijoms. Iš tiesų, operatorius $F : g \to \sqrt{1 - e^g}$ yra tolydus. Taip pat matome, jog iš lygybės $f = \sqrt{1 - e^g}$ gauname

$$g = \log(1 - f^2).$$

Taigi, galime parinkti $g \in H(D)$, jei tik $f(s) \ne \pm 1, s \in D$. Kitaip sakant, $F(H(D)) \supset H_{-1,1}(D)$, t.y., tenkinamos 1.7 teoremos sąlygos su $r = 2$. Todėl, kai $L(\alpha, h)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$, funkcijos $\sqrt{1 - e^{\zeta(s,\alpha)}}$ diskrečiais postūmiais galime tolygiai aproksimuoti funkcijas $f \in H_{-1,1}(D)$ kompaktiniuose srities D poaibiuose.

Discrete universality of composite functions

A. Vaiginytė

(Summary)

Let $s = \sigma + it$ be a complex variable and $\alpha \in (0, 1]$ be a fixed parameter. The Hurwitz zeta-function $\zeta(s, \alpha)$ is defined, for $\sigma > 1$, by the series

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m + \alpha)^s},$$

and is continued analytically to the whole complex plane, except for a simple pole at the point $s = 1$. Denote by D a strip of the complex plane $\{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$, by $\mathcal{K}$ the class of compact subsets of D with connected complements and by $H(K)$, $K \in \mathcal{K}$, the class of continuous on D functions which are analytic in the interior of K. Let as well $H(D)$ be the space of analytic functions on D equipped with the topology of uniform convergence on compacta and let $L(\alpha, h) = \{\log(m + \alpha) : m \in \mathbb{N}_0\} \cup \left\{\frac{\pi}{h}\right\}$.

Let now $\beta > 0$. We say that an operator $F : H(D) \to H(D)$ belongs to the class $Lip(\beta)$ if the following conditions are satisfied:

1. for each polinomial $p = p(s)$ the set $F^{-1}(p)$ is not empty;

2. for each set $K \in \mathcal{K}$ there exists a constant $c > 0$ and a set $K_1 \in \mathcal{K}$ such that

$$\sup_{s \in K} |F(g_1(s)) - F(g_2(s))| \leq c \sup_{s \in K_1} |g_1(s) - g_2(s)|^{\beta}$$

   for all $g_1, g_2 \in H(D)$.

Finally, for $a_1, ..., a_r \in \mathbb{C}$, denote

$$H_{a_1,\dots,a_r}(D) = \{g \in H(D) : (g(s) - a_j)^{-1} \in H(D), j = 1, ..., r\}.$$

In the master work, we prove the following results. Suppose that the set $L(\alpha, h)$ is linearly independent over the field of rational numbers $\mathbb{Q}$. Then the following statements are true.

1 Theorem. *Let $F \in Lip(\beta)$, $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H(K)$. Then for all $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{N \to \infty} \frac{1}{N + 1} \#\{0 \leq m \leq N : \sup_{s \in K} |F(\zeta(s + imh, \alpha)) - f(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

2 Theorem. *Let a continuous operator $F : H(D) \to H(D)$ satisfy the condition $F(H(D)) \supset H_{a_1,\dots,a_r}(D)$. If $r = 1$, let $K \in \mathcal{K}$, and $f(s) \in H(K)$, $f(s) \neq a_1$, $s \in K$.*

If $r \geq 2$, let $K \subset D$ be an arbitrary compact subset and $f(s) \in H_{a_1,\ldots,a_r}(D)$. Then the assertion of Theorem 1 is true.

3 Theorem. *Let $F : H(D) \to H(D)$ be a continuous operator, $K \subset D$ be a compact subset and $f(s) \in F(H(D))$. Then the assertion of Theorem 1 is true.*

Literatūra

[1] P. Billingsley, *Convergence of Probability measures*, Wiley, New York (1968)

[2] J.W.S. Cassels, Footnote to a note of Davenport and Heilbronn, *J. London Math. Soc.*, **36**, 177-184 (1961)

[3] A. Laurinčikas, A discrete universality theorem for the Hurwitz zeta-function, *Journal of Number Theory*, **143**, 232–247, (2014)

[4] A. Laurinčikas, A. Macaitienė, The discrete universality of the periodic Hurwitz zeta-function, *Integral Transf. Spec. Funct.*, **20** (9-10), 673-686 (2005)

[5] S.N Mergelyan, Uniform approximations of functions of a complex variable, *Uspehi Matem. Nauk (N.S.)*, **7**, 31-122 (1952)

[6] J. Sander, J. Steuding, Joint universality for sums and products of Dirichlet L-functions, *Analysis(Munich)*, **26**(3), 295-312 (2006)

[7] S.M. Voronin, *Analytic Properties of Generating Function of Arithmetic Objects*, Diss. doctor fiz.-matem. nauk, Moskow (1977)