VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
TIKIMYBIŲ TEORIJOS IR SKAIČIŲ TEORIJOS KATEDRA

Paulina Žvirblytė

Topologinis Abel – Ruffini teoremos įrodymas II

Magistro darbas

Leidžiu ginti ....

Darbo vadovas prof. Ramūnas Garunkštis

Vilnius 2016

Turinys

Įvadas

Abel-Ruffini teorema teigia, kad bendro pavidalo daugianarių, 5 ar didesnio laipsnio, neįmanoma išspręsti radikalais - neegzistuoja formulė, kurią naudojant būtų galima išreikšti tokios lygties šaknis jos koeficientus dauginant, dalinant, sudedant, atimant, keliant laipsniu ar traukiant šaknį.

1799 metais Paolo Ruffini pamėgino įrodyti penkto laipsnio lygčių neišsprendžiamumą, tačiau jo įrodymas buvo labai sudėtingas ir nebuvo pripažintas kitų matematikų (nors ir bandė publikuoti 6 skirtingas jo versijas 1799-1813). 1824 Niels Henrik Abel, remdamasis Ruffini darbais, pateikė aiškesnį ir tikslesnį neišsprendžiamumo įrodymą.

Bakalauro darbe buvo aprašyta simetrinės grupės ir jų išsprendžiamumas. Juo naudodamasi, šiame darbe nagrinėsiu penkto ir didesnio laipsnio lygčių neišsprendžiamumą. Pirmoje dalyje apibrėšiu sąvokas ir aprašysiu Rymano paviršių konstravimą. Antroje dalyje nagrinėsiu Abel-Ruffini teoremos įrodymą su pasirinktu penktojo laipsnio daugianariu.

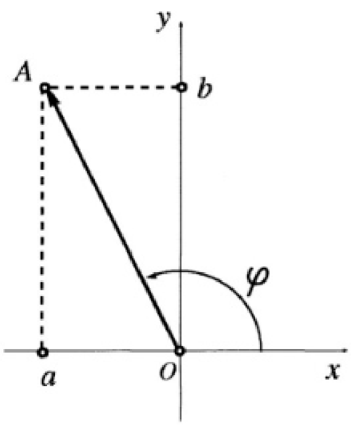
1 skyrius

Daugiareikšmės funkcijos

Apibrėžimas: Daugiareikšme funkcija vadinama tokia funkcija $f(z)$, kuri bent vienam skaičiui z apibrėžia dvi ar daugiau skirtingų reikšmių.

Toliau naudosime tokią kreivės parametrinę lygtį:
$z(t) = x(t) + i \cdot y(t), 0 \leqslant t \leqslant 1$
jei funkcijos $x(t)$ ir $y(t)$ yra tolydžios, kai $0 \leqslant t \leqslant 1$, tai, kai t kinta nuo 0 iki 1, taškas $z(t)$ apibrėžia tolydžią kreivę z plokštumoje. $z_0 = z(0)$ yra pradinis kreivės taškas, $z_1 = z(1)$ - galinis.

Apibrėžimas: Tegu O - koordinačių pradžios taškas ir tarkime, kad vektorius OA atitinka kompleksinį skaičių $z = a + ib$. Kompleksinio skaičiaus z argumentu vadinamas kampas tarp ašies Ox ir vektoriaus OA. Žymime $arg z$.



Tarkime, turime tolydžią kreivę C išreikštą parametrine lygtimi ir neinančią per tašką $z = 0$. Argumento reikšmę jos pradžios taške žymėsime $\varphi(0)$, pabaigos taške - $\varphi(1)$

Apibrėžimas: Skirtumas $\varphi(1)$ - $\varphi(0)$ yra vadinamas argumento pokyčiu palei kreivę C.

Apibrėžimas: Muavro formulė:

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Tarkime, turime kompleksinį skaičių išreikštą trigonometrine forma

$$z = r(cos\varphi + isin\varphi).$$

Raskime visus kompleksinius skaičius w , tenkinančius lygtį

$$w^n = z,\ n \in \mathbb{N}.$$

Kai $z = 0$ turime, kad $w = 0$. Tarkime $z \neq 0$. Užrašome w trignonometrine forma:

$$w = \rho(cos\phi + isin\phi).$$

Tada, pagal Muavro formulę gauname

$$w^n = \rho^n(cosn\psi + isinn\psi)$$

$$w^n = \rho^n(cosn\psi + isinn\psi = r(cos\varphi + isin\varphi)$$

Gavome, kad $\rho^n = r$ ir $n\psi = \varphi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Vadinasi,

$$w = \sqrt[n]{r}(cos\tfrac{\varphi+2\pi k}{n} + isin\tfrac{\varphi+2\pi k}{n}).\ (1)$$

imkime $0 \leqslant k_1 < n$ ir k_2 tokį, kad $k_2 = k_1 + an$, $a \in \mathbb{Z}$. Tada

$$\tfrac{\varphi+2\pi k_2}{n} = \tfrac{\varphi+2\pi(k_1+an)}{n} = \tfrac{\varphi+2\pi k_1+2\pi an}{n} = \tfrac{\varphi+2\pi k_1}{n} + 2\pi a = \tfrac{\varphi+2\pi k_1}{n} + 2\pi a$$

Kadangi sin ir cos periodas yra 2π, w reikšmės kartosis ir sutaps su tomis, kurios gaunamos, kai $k = 0, 1, .., n-1$. Todėl egzistuoja n skirtingų funkcijos w reikšmių.

Įveskime žymėjimą:

$$\xi_n = cos\tfrac{2\pi}{n} + isin\tfrac{2\pi}{n}.$$

1.0.1 lema. *:*

$\sqrt[n]{1}$ įgija reikšmes 1, $\xi_n, \xi_n^2, \xi_n^{n-1}$

Įrodymas:

1 išreiškiame trigonometrine forma:

$1 = 1(cos0 + isin0)$

iš (1) lygties gauname:

$\sqrt[n]{1} = 1(cos\frac{0+2\pi k}{n} + isin\frac{0+2\pi k}{n}) = cos\frac{2\pi k}{n} + isin\frac{2\pi k}{n} = \xi_n^k, \quad k = 1, ..., n-1. \quad \square$

$\xi_n^n = cos(2\pi) + isin(2\pi) = 1$ ir elementai $1, \xi_n, \xi_n^n, ..., \xi_n^{n-1}$ sudaro ciklinę grupę sandaugos atžvilgiu.

Tarkime, z_1 yra kuri nors iš $\sqrt[n]{z_0}$ reikšmių. Raskime visas $\sqrt[n]{z_0}$ reikšmes:

jei $z_1 = \sqrt[n]{z_0}$, tai $z_1^n = z_0$. Bet kuriai kitai reikšmei z_2 taip pat galios $z_2^n = z_0$. $1 = \frac{z_0}{z_0} = \frac{z_2^n}{z_1^n} = (\frac{z_2}{z_1})^n$.

Vadinasi,

$\frac{z_2}{z_1} = \sqrt[n]{1}$.

$z_2 = z_1 \cdot \sqrt[n]{1}$

Gavome, kad kitos reikšmės bus lygios

$z_1 \cdot \xi_n, z_1 \cdot \xi_n^2, ..., z_1 \cdot \xi_n^{n-1}$

2 skyrius

Rymano paviršiai

2.1 Rymano paviršius funkcijai $w = \sqrt{z}$

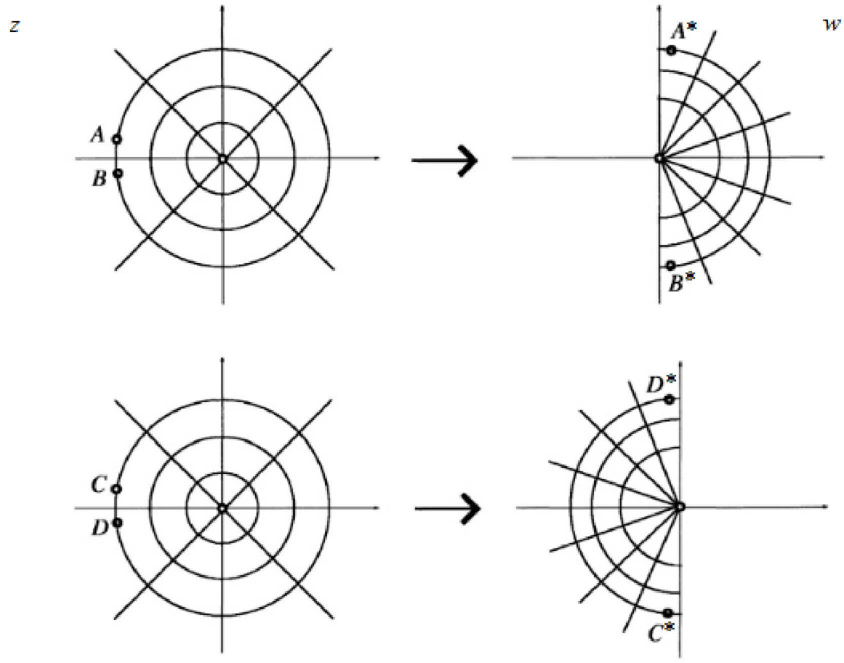
Daugiareikšmė funkcija $w = \sqrt{z}$ turi vieną reikšmę $w = 0$, kai $z = 0$ ir dvi reikšmes kai $z \neq 0$. Jei taške z_0 viena funkcijos w reikšmė lygi w_0, tai antroji reikšmė tame taške yra lygi $-w_0$.

Iš Muavro formulės gauname, kad traukiant kvadratinę šaknį funkcijos argumentas $argz$ sumažėja 2 kartus. Tada $-\pi < argz < \pi$ ir $-\pi/2 < argw < \pi/2$. Perkirpkime z plokštumą nuo 0 iki $-\infty$. Kiekvienam z toje plokštumoje, išskyrus taškus ant perkirpimo pasirinkime vieną iš reikšmių $w_1 =_1 \sqrt{z}$. Funkcija z plokštumoje yra tolydi visur išskyrus perkirpimą, tačiau w plokštumoje ji tolydi tik dešinėje pusėje. Imant funkcijos w reikšmes kairėje plokštumos pusėje, gauname antrąją vienareikšmę funkciją $w_2 = -_1\sqrt{z}$.

Funkcijos w_1 ir w_2 yra vadinamos funkcijos w tolydžiomis vienareikšmėmis šakomis.

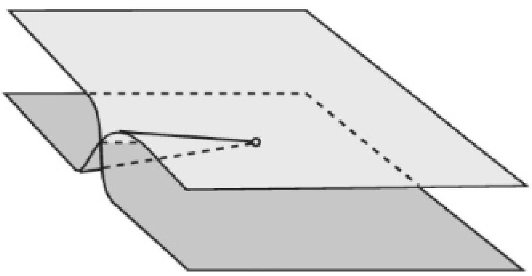
Imkime dvi z plokštumas, perkirptas nuo 0 iki $-\infty$. Tegu funkcija $w_1 =_1 \sqrt{z}$ bus vienoje iš plokštumų, o $w_2 = -_1\sqrt{z}$ - antroje. Jei taškas z judės kuria nors iš plokštumų tolydžiai nekirsdamas perkirpimų, funkcijos w reikšmė kis tolydžiai.

Nagrinėkime pirmąją reikšmę $w_1 =_1 \sqrt{z}$. Iš brėžinio matome, kad jei taškas eis per perkirpimą, tarkime, iš taško A į z plokštumoje greta esantį B, atitinkami taškai w plokštumoje nebebus arti vienas kito. Tačiau matome, kad taškas A^* bus greta taško D^*, kuris priklauso antrajai reikšmei.



Taigi, jei kirsdamas perkirpimą taškas z judės iš viršutinės vienos plokštumos pusės į apatinę antros plokštumos pusę, funkcija kis tolydžiai. Nuo 0 iki $-\infty$ sujungiame viršutinį vienos plokštumos kraštą su apatiniu kitos. Taip funkcija $w = \sqrt{z}$ (kuri turėjo dvi reikšmes plokštumoje z) transformuojama į vienareikšmę funkciją naujame paviršiuje, sudarytame iš dviejų sujungtų z plokštumų.

Toks paviršius vadinamas Rymano paviršiumi funkcijai $w = \sqrt{z}$.



Norint sukonstruoti Rymano paviršių daugiareikšmei funkcijai pirmiausia reikia atskirti tolydžias vienareikšmes funkcijos šakas atskiriant taškus perkirpime. Tada reikia sujungti gautas šakas taip, kad gautume vienareikšmę funkciją visame paviršiuje.

Tarkime, $w(z)$ - daugiareikšmė funkcija. Taške z_0 fiksuokime vieną jos reikšmių w_0. Tegu $w^*(z)$ - tolydi vienareikšmė funkcijos $w(z)$ šaka, apibrėžta kurioje nors z plokštumos dalyje (pavyzdžiui, visoje plokštumoje, išskyrus perkirpimus) ir $w^*(z_0) = w_0$. Tarkime,

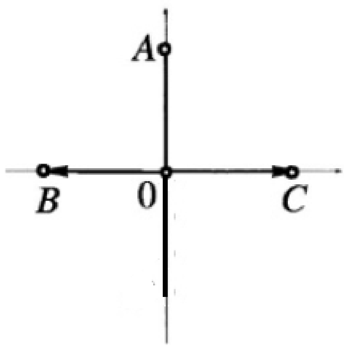
toje plokštumos dalyje egzistuoja tolydi kreivė C, jungianti tašką z_0 su tašku z_1. Taigi, taškui z tolygiai judant kreive C nuo taško z_0 iki z_1, funkcija $w^*(z)$ kinta tolydžiai nuo $w^*(z_0)$ iki $w^*(z_1)$ (judant kreive C, kiekvienam ant jos esančiam taškui z parenkame vieną iš funkcijos $w(z)$ reikšmių taip, kad ji kistų tolygiai taškui judant kreive nuo pradinės reikšmės w_0. Pasiekus tašką z_1, reikšmė jame bus apibrėžta.
Sakome, kad $w_1 = w(z_1)$ yra reikšmė apibrėžta tolydumu palei kreivę, su sąlyga $w(z_0) = w_0$

Jei funkcijos $w(z)$ reikšmės, parinktos visiems kreivės C taškams, bus atvaizduotos w plokštumoje, tai gausime tolydžią kreivę einančią nuo taško w_0 iki w_1. Ši kreivė bus vienas iš tolydžių kreivės C vaizdu, gaunamu naudojant atvaizdį $w = \sqrt{z}$. Tačiau fiksuojant pradinio kreivės C taško vaizdą ir nuo jo brėžiant kreivės vaizdą, gauta kreivė nebūtinai bus vienareikšmiškai apibrėžta.

Pavyzdys:
tarkime, turime kreivę C su parametrine lygtimi $z(t) = 2t - 1$ ir atvaizdį $w = \sqrt{z}$. Raskime visus kreivės C vaizdus $w_0(t)$, prasidedančius taške i:

kai $t \in [0; \frac{1}{2}]$, tai $w_0(t)$ gali įgyti dvi reikšmes:
$w_0(t) = \pm i\sqrt{1-2t}; \quad 1 - 2t \geq 0.$
kai $t \in [\frac{1}{2}; 1]$:
$w_0(t) = \pm\sqrt{2t-1}; \quad 2t - 1 \geq 0.$
kai $t = \frac{1}{2}; 1$, gaunama viena reikšmė $w(\frac{1}{2}) = 0$.

Tolydus kreivės vaizdas yra kreivės AOB ir AOC:



Šiuo atveju kreivės vaizdas tampa nevienareikšmiškai apibrėžtu, kai ji eina per tašką

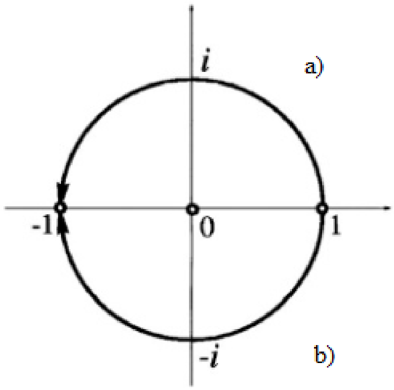
$z = 0$. Norint to išvengti, reikia imti kreives, kurios neina per tą tašką.

2 pavyzdys:

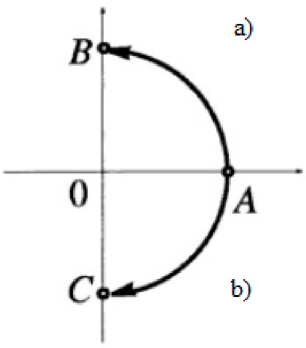
Funkcijai $w = \sqrt{z}$ parinkime reikšmę $w(1) = \sqrt{1} = 1$. Reikšmę $w(-1) = \sqrt{-1}$ apibrėžkime tolydumu palei kreives:

a) viršutinę vienetinio apskritimo pusę

b) apatinę vienetinio apskritimo pusę



Kadangi funkcija $w = \sqrt{z}$ argumentą sumažina du kartus (pagal Muavro formulę, iš a) kreivės $0 < argz < \pi$ gausime $0 < argw < \pi/2$ ir kreivės b) $0 < argz < -\pi$ gausime $0 < argw < -\pi/2$:



Iš brėžinio matome, kad kreivės a) galinis taškas yra i, kreivės b) $-i$. Nors abi kreivės baigėsi taške -1, jų vaizdų, gautų naudojant funkciją $w = \sqrt{z}$, galiniai taškai skiriasi.

2.1.1 teiginys. *Jei kreivė C yra uždara plokštumoje z, tai funkcijos $w = \sqrt{z}$ reikšmė galiniame kreivės taške, apibrėžtame tolydumu palei kreivę, sutampa su reikšme pradiniame kreivės C taške tada ir tik tada, kai kreivė C apsisuka aplink tašką $z = 0$ lyginį skaičių* *kartų.*

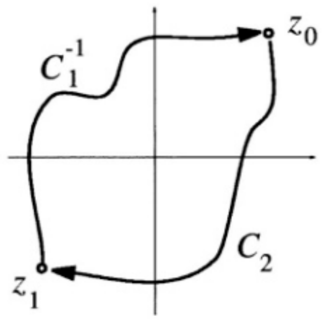
Įrodymas:

Tarkime, $w_0(t)$ - tolydus kreivės C vaizdas. Jei kreivė $z(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ uždara, tai $z(0) = z(1)$. Tada arba $w_0(1) = w_0(0)$, arba $w_0(1) = -w_0(0)$. Tam, kad būtų teisinga lygybė $w_0(1) = w_0(0)$, reikia kad $w_0(t)$ būtų uždara - $arg w_0(t) = 2\pi k$. Vadinasi, (pagal Muavro formulę), $arg z(t) = 2 \cdot 2\pi k = 4\pi k$- t.y., kreivė C turi apsisukti aplink tašką $z = 0$ $2k$ kartų. $\square$

Apibrėžimas: Turime kreivę C su parametrine lygtimi $z(t)$. Kreive C^{-1} vadinsime kreivę, identišką C, tik nukreiptą į priešingą pusę. Jos parametrinė lygtis bus lygi $z_1(t) = z(1-t)$.

Apibrėžimas: Tarkime, kad pradinis kreivės C_2 taškas sutampa su galiniu kreivės C_1 tašku. Kreive $C_1^{-1}C_2$ vadinsime kreivę, gautą sujungus galinį kreivės C_1 tašką su pradiniu kreivės C_2 tašku.

2.1.2 teiginys. *Tegu C_1 ir C_2 - dvi kreivės, jungiančios taškus z_0 ir z_1. Kuriame nors taške fiksuokime reikšmę $\sqrt{z_0} = w_0$. Reikšmės taške $\sqrt{z_1}$, tolydžiai apibrėžtos palei kreives C_1 ir C_2 bus lygios tada ir tik tada, kai kreivė $C_1^{-1}C_2$ apsisuks aplink tašką $z = 0$ lyginį skaičių kartų.*



Įrodymas:

Tarkime, funkcija $\sqrt{z}$ kreives C_1 ir C_2 atvaizduoja į L_1 ir L_2. Jos turi prasidėti tame pačiame taške $w_0 = \sqrt{z_0}$, nes kreivės C_1 ir C_2 prasideda taške z_0. Kreivė $L_1^{-1}L_2$ yra tolydus kreivės $C_1^{-1}C_2$ vaizdas. Kreivė $C_1^{-1}C_2$ yra uždara, todėl remiantis anksčiau įrodytu teiginiu gauname, kad kreivės $L_1^{-1}L_2$ pradžios ir galo reikšmės sutaps tada ir tik tada, kai kreivė $C_1^{-1}C_2$ apsisuks aplink tašką 0 lyginį skaičių kartų. $\square$

Vadinasi, jeigu kreivė $C_1^{-1}C_2$ apsisuks 0 kartų aplink tašką $z = 0$, funkcijos $\sqrt{z}$ reikšmės galiniuose kreivių C_1 ir C_2 taškuose sutaps, kai sutampa reikšmės pradiniuose jų taškuose.

Taigi, norint atskirti tolydžias vienareikšmes funkcijos $\sqrt{z}$ šakas, pakanka parinkti kreives C_1 ir C_2 taip, kad kreivė $C_1^{-1}C_2$ būtų tokia, kuri neapsisuka aplink tašką $z = 0$. Tai padaryti galima plokštumą perkerpant nuo taško 0 iki $-\infty$.

Jei perkirpus plokštumą nuo taško 0 iki $-\infty$ ir kuriame nors taške z_0 parenkame vieną iš reikšmių $w_0^* = \sqrt{z}$, ir jei reikšmė kiekviename taške z_1 yra apibrėžta tolydžiai palei kreivę C, jungiančią taškus z_0 ir z_1 ir neinančią per perkirpimą, tada kiekviename plokštumos taške, išskyrus esančius ant perkirpimo, yra apibrėžta kuri nors vienareikšmė funkcijos $\sqrt{z}$ šaka ${}_1\sqrt{z}$. Jei taške z_0 fiksuojame kitą reikšmę, tai apibrėžiama kita funkcijos $\sqrt{z}$ šaka ${}_2\sqrt{z}$.

2.1.3 teiginys. *${}_1\sqrt{z} \neq {}_2\sqrt{z}$ visuose taškuose, išskyrus esančius ant perkirpimo.*

Įrodymas:

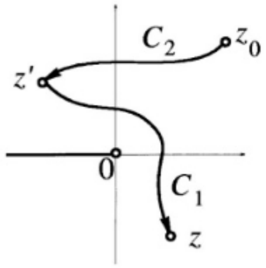
Imkime kreivę C, kuri neina per plokštumos perkirpimą ir jungia taškus z_0 ir z_1. Tarkime, kad pasirinkę dvi skirtingas reikšmes taške z_0 ir tolydžiai palei kreivę apibrėžę funkciją $\sqrt{z}$, taške z_1 gavome vienodas reikšmes. Imkime kreivę C^{-1}. Gauname, kad jos pradiniame taške z_1 reikšmė viena, o galiniame taške z_0 reikšmės skiriasi. Tai įmanoma tik tuo atveju, kai kreivė C eina per tašką $z = 0$, tačiau kreivę C parinkome tokią, kuri neina per plokštumos perkirpimą nuo 0 iki $-\infty$ - gavome prieštarą. $\square$

2.1.4 teiginys. *Taške z^* fiksuokime reikšmę $w^* = {}_1\sqrt{z^*}$ ir pradedant nuo z^* ir neinant per perkirpimą apibrėžkime tolydžiai palei kreivę funkcijos $\sqrt{z}$ reikšmes kituose plokštumos z taškuose (išskyrus esančius ant perkirpimo). Taip gauta tolydi vienareikšmė šaka sutampa su funkcija ${}_1\sqrt{z}$ (apibrėžta pagal reikšmę taške z^*).*

Įrodymas:

Imkime tašką z, nesantį ant perkirpimo. Nuo taško z^* iki z brėžiame tolydžią ir perkirpimo nekertančią kreivę C_1. Imkime antrą kreivę C_2, kuri prasideda taške z_0 ir baigiasi z^*.

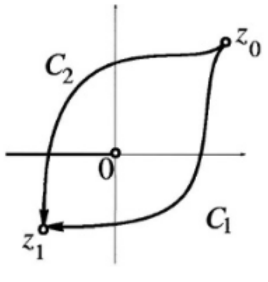
Fiksavome reikšmę $w^* =_1 \sqrt{z^*}$, vadinasi, jei pasirinksime reikšmę $\sqrt{z_0} = w_0^*$ ir apibrėšime $\sqrt{z^*}$ tolydžiai palei kreivę C, turime gauti w^*. Tačiau reikšmė $\sqrt{z}$ yra apibrėžta tolydžiai palei kreivę C_1 su sąlyga $\sqrt{z^*} = w^*$, sutampa su $\sqrt{z}$ reikšme apibrėžta tolydžiai palei kreivę C_2C_1 su sąlyga $\sqrt{z_0} = w_0^*$. Vadinasi, $\sqrt{z}$ reikšmė kiekviename taške z, nesančiame ant plokštumos perkirpimo, sutampa su reikšme ${}_1\sqrt{z}$. $\square$



2.1.5 teiginys. *Tarkime, taškai z_0 ir z_1 nėra ant perkirpimo ir juos jungianti kreivė C kerta perkirpimą vieną kartą. Jei pasirinksime reikšmę $w_0 = \sqrt{z_0}$ ir tolydžiai palei kreivę C apibrėšime reikšmę $w_1 = \sqrt{z_1}$, tai reikšmės w_0 ir w_1 atitiks skirtingas funkcijos $w = \sqrt{z}$ šakas.*

Įrodymas:

Tegu C_1 - tolydi kreivė jungianti taškus z_0 ir z_1 ir nekertanti plokštumos perkirpimo. Tegu $w_1^* = \sqrt{z_1}$ - funkcijos $\sqrt{z}$ reikšmė tolydžiai apibrėžta palei kreivę C_1 su sąlyga $\sqrt{z_0} = w_0$. Kreivė C_1 nekerta perkirpimo, todėl reikšmės w_0 ir w_1^* priklauso tai pačiai funkcijos $\sqrt{z}$ šakai. Kreivė $C_1^{-1}C_2$ vieną kartą apsisuka aplink tašką $z = 0$, vadinasi reikšmės w_1 ir w_1^* skiriasi (kad būtų vienodos, kreivė turi apsisukti aplink tašką $z = 0 \quad 2k$ kartų). Kadangi w_0 ir w_1^* priklauso tai pačiai funkcijos $\sqrt{z}$ šakai, w_0 ir w_1 priklauso skirtingoms šakoms: $\square$



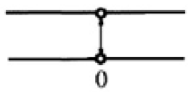
2.1.6 teiginys. *Sukantis aplink tašką $z_0 \neq 0$, Rymano paviršiaus plokštuma nepasikeičia,* *o sukantis aplink tašką $z_0 = 0$ pereinama iš vienos Rymano paviršiaus plokštumos į kitą.*

Įrodymas:

jei $z_0 \neq 0$, tai apskritimas su centru taške z_0 ir pakankamai mažu spinduliu nesisuka aplink tašką $z_0 = 0$, todėl argumento $argw_0(t)$ pokytis lygus nuliui ir funkcijos $\sqrt{z}$ reikšmė nesikeičia. Argumento $argz(t)$ pokytis aplink apskritimą su centru $z_0 = 0$ yra lygi 2π, vadinasi $argw_0(t) = \pi$ - šiuo atveju funkcijos reikšmė keičiasi - pereinama į kitą Rymano paviršiaus plokštumą. $\square$

Apibrėžimas: taškai, aplink kuriuos judant pereinama iš vienos Rymano paviršiaus plokštumos į kitą (keičiasi funkcijos reikšmė) yra vadinami daugiareikšmės funkcijos šakojimosi taškais.

Rymano paviršiams galima nubraižyti schemas. Pavyzdžiui, funkcijos $\sqrt{z}$ schema yra



Ji parodo, kad paviršių sudaro dvi plokštumos ir kad $z = 0$ yra šakojimosi taškas, aplink kurį judant ir kertant perkirpimą nuo $z = 0$ iki begalybės yra pereinama iš vienos plokštumos į kitą.

2.2 Rymano paviršius funkcijai $\sqrt[n]{z}$

Raskime šakojimosi taškus funkcijai $\sqrt[n]{z}$:

$w_0(t)$ - tolydus kreivės $z(t)$ vaizdas, gautas naudojant atvaizdį $\sqrt[n]{z}$.

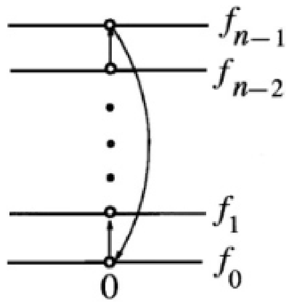
Jei $z_0 \neq 0$, tai apskritimas su centru taške z_0 ir pakankamai mažu spinduliu nesisuka aplink tašką $z_0 = 0$, todėl $argw_0(t)$ pokytis bus lygus 0. Vadinasi, taškai $z_0 \neq 0$ negali būti šakojimosi taškais.

Argumento $argz(t)$ pokytis aplink apskritimą su centru $z = 0$ yra lygus 2π. Vadinasi, pagal Muavro formulę, $argw_0(t)$ pokytis yra $\frac{2\pi}{n}$.

Funkcijos $\sqrt[n]{z}$ reikšmė, apsisukus vieną kartą aplink tašką $z = 0$ yra padauginama iš

$\xi_n = cos\frac{2\pi}{n} + isin\frac{2\pi}{n}$.
Gavome, kad funkcijos $\sqrt[n]{z}$ šakojimosi taškas yra $z_0 = 0$.
Tarkime, $w_0(t)$ - viena iš funkcijos $\sqrt[n]{z}$ reikšmių. Tada visos kitos jos reikšmės yra:
$w_1(t) = w_0(t) \cdot \xi_n$, $w_2(t) = w_0(t) \cdot \xi_n^2$, $w_{n-1}(t) = w_0(t) \cdot \xi_n^{n-1}$

Perkerpame plokštumą nuo taško $z = 0$ iki begalybės taip, kad nekirstume taško $z = 1$. Tegu $z(t)$ - kreivė, jungianti tašką $z = 1$ su kuriuo nors kitu tašku taip, kad ji nekirstų perkirpimo. Jei funkcijos reikšmė pradiniame kreivės taške yra padauginama iš ξ_n^k, tai reikšmės tolydžiai apibrėžtame galiniame taške taip pat bus padaugintos iš ξ_n^k. Jei viena funkcijos šaka lygi $f_0(z)$, tai kitos šakos bus lygios $f_i(z) = f_0(z) \cdot \xi_n^k$. Rymano paviršiaus schema atrodys taip:



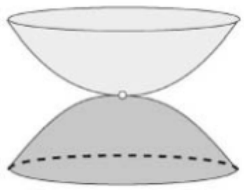
(šakojimosi taškas yra 0 ir kaskart aplink jį apsisukdant pereinama iš $f_i(z)$ reikšmės į reikšmę $f_i(z) = f_0(z) \cdot \xi_n^i$).

Jei daugiaureikšmė funkcija turi keletą šakojimosi taškų, norint atskirti vienareikšmes šakas reikia nuo kiekvieno šakojimosi taško iki begalybės nubrėžti tarpusavyje nesikertančias tieses ir perkirpti plokštumą per jas.

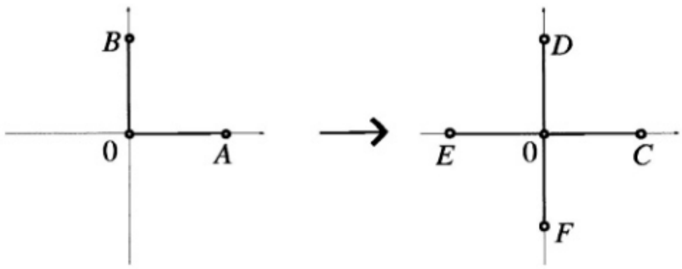
Apibrėžimas: taškai, kurie nėra šakojimosi taškai, bet kuriuose tolydūs kreivių vaizdai nėra vienareikšmiškai apibrėžti vadinami funkcijos neunikalumo taškais.
Braižant Rymano schemą, nuo tokių taškų nereikia daryti perkirpimų, bet kreivės turi būti parenkamos tokios, kad nekirstų šių taškų.

Pavyzdys:
Nagrinėkime funkciją $\sqrt{z^2}$.
Vienareikšmės jos šakos yra $w_0(z) = z$ ir $w_1(z) = -z$. Apsisukus vieną kartą aplink tašką

$z = 0 \quad argz^2$ pakinta 4π, vadinasi $arg\sqrt{z^2}$ pasikeis per 2π, taigi funkcijos reikšmė nepasikeis. Rymano schema susidaro iš dviejų nesijungiančių plokštumų. Rymano paviršius atrodys taip:



Parodysime, kodėl pašalinami neunikalumo taškai:
imkime kreivę AOB. Funkcija $\sqrt{z^2}$ ją atvaizduos į kreives COD, COF, EOD, EOF:



pereinant per tašką $z = 0$ įmanoma ir pereiti į kitą Rymano paviršiaus plokštumą, ir likti toje pačioje.

2.3 Rymano paviršių schemų konstravimas

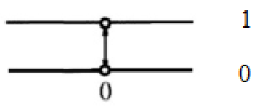
Tarkime, turime funkciją $h(z) = f(z)+g(z)$. Plokštumoje panaikiname $h(z)$ neunikalumo taškus ir perkerpame plokštumas nuo funkcijų $f(z)$ ir $g(z)$ šakojimosi taškų iki begalybės taip, kad perkirpimai nesikirstų. Tegu $f_1(z), ..., f_n(z)$ ir $g_1(z), ..., g_m(z)$ - tolydžios vienareikšmės funkcijų $f(z)$ ir $g(z)$ šakos plokštumose su perkirpimais. Tada funkcija $h(z)$ turės nm tolydžių vienareikšmių šakų, nes $h(z)$ reikšmė kuriame nors taške z_0 yra sudaroma imant bet kurią iš n $g(z_0)$ reikšmių ir pridedant bet kurią iš m $f(z_0)$ reikšmių (iš viso gauname nm variantų):
$h_{i,j}(z_0) = g_i(z_0) + h_j(z_0)$. Jei funkcija apsisukdama apie šakojimosi tašką vieną kartą pereina iš šakos $f_{i_1}(z)$ į šaką $f_{i_2}(z)$ ir iš šakos $g_{j_1}(z)$ į šaką $g_{i_2}(z)$, tai šaka $h_{i_1,j_1}(z) = f_{i_1}(z) + g_{j_1}(z)$ pereis į $h_{i_2,j_2}(z) = f_{i_2}(z) + g_{j_2}(z)$. Taip iš funkcijų $f(z)$ ir $g(z)$ Rymano schemų galima nubraižyti schemą $h(z)$. Kiekvienai porai šakų $f_i(z)$ ir $g_j(z)$ imame plokš-

tumą atitinkančią $h_{i,j}(z_0) = g_i(z_0)+h_j(z_0)$. Atitinkamai nubrėžiame rodykles perėjimams tarp plokštumų kiekviename taške. Šis metodas vadinamas formaliuoju, tačiau juo nevisada gauname teisingą schemą, nes kai kurios $h_{i_2,j_2}(z)$ reikšmės gali sutapti.

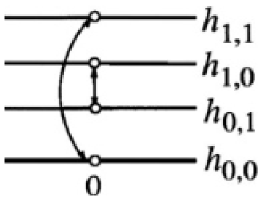
Pavyzdys:

Tarkime, turime funkciją $h(z) = \sqrt{z} + \sqrt{z}$.

Funkcijos $\sqrt{z}$ schema yra



Tada funkcijos $\sqrt{z} + \sqrt{z}$ schema bus



raskime visas galimas funkcijos $h(z)$ reikšmes. Tarkime, $f_0(z)$ yra viena funkcijos $\sqrt{z}$ šaka. Tada antra jos šaka yra lygi $-f_0(z)$. Galimos $h(z)$ reikšmės yra:

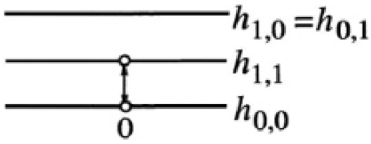
$h_{0,0}(z) = f_0(z) + f_0(z)$

$h_{1,1}(z) = -f_0(z) - f_0(z)$

$h_{0,1}(z) = f_0(z) - f_0(z) \equiv 0$

$h_{1,0}(z) = -f_0(z) + f_0(z) \equiv 0.$

Matome, kad reikšmės $h_{0,1}(z)$ ir $h_{1,0}(z)$ sutampa. Schemoje paliekame ploštumas $h_{0,0}$ ir $h_{1,1}$, o vietoje $h_{0,1}(z)$ ir $h_{1,0}(z)$ brėžiame tik vieną. Šiuo atveju ji nesijungia su kitomis plokštumomis:



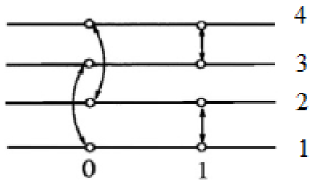
Taigi, turint Rymano schemas funkcijoms $f(z)$ ir $g(z)$ ir norint nubrėžti schemą funkcijai $h(z) = f(z) + g(z)$ reikia nubrėžti schemą naudojant formalų metodą ir surasti šakas, kurių reikšmės sutampa. Taip galima sudaryti schemas ir kai funkcija $h(z) = f(z) - g(z)$, $h(z) = f(z) \cdot g(z)$, $h(z) = f(z)/g(z)$

2.4 Monodromijos grupės

Kiekvienai Rymano paviršiaus schemai galima priskirti keitinių grupę. Kiekvieną apsisukimą prieš laikrodžio rodyklę aplink šakojimosi tašką atitinka Rymano schemų plokštumų keitinys ([1]).

Pavyzdys:

tarkime, turime schemą



jos keitiniai užrašomi

$z = 0: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, z = 1: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Apibrėžimas: tegu $g_1, g_2, ..., g_s$ - Rymano paviršiaus schemos keitiniai, atitinkantys apsisukimus prieš laikrodžio rodyklę aplink šakojimosi taškus. Grupė, generuotą elementų $g_1, g_2, ..., g_s$ vadinama Rymano paviršiaus schemos plokštumų keitinių grupe, arba schemos keitinių grupe.

Tarkime, taškas z_0 nėra nei šakojimosi, nei neunikalumo taškas daugiareikšmei funkcijai $w(z)$ ir $w_1, w_2, ..., w_n$ yra funkcijos $w(z)$ reikšmės taške z_0. Nagrinėkime tolydžią kreivę C, kuri prasideda ir baigiasi taške z_0 ir nekerta funkcijos $w(z)$ šakojimosi ir neunikalumo taškų. Imkime reikšmę $w_i = w(z_0)$ ir apibrėžkime tolydžiai palei kreivę kitą reikšmę w_j. Pradėdami nuo skirtingų w_i reikšmių gauname skirtingas w_j reikšmes. Vadinasi, kreivę C atitinka tam tikras reikšmių $w_1, w_2, ..., w_n$ keitinys ([1]).

Jei nagrinėsime visas įmanomas kreives, kurios prasideda ir baigiasi taške z_0 ir neina per funkcijos $w(z)$ šakojimosi ir neunikalumo taškus, tai jas atitinkantys keitiniai sudarys grupę, kuri vadinama $w(z_0)$ reikšmių keitinių grupe.

Apibrėžimas: Visų reikšmių $w(z_0)$ visiems taškams z_0 keitinių grupė vadinama daugiareikšmės funkcijos $w(z)$ monodromijos grupe. Ji yra izomorfiška visų funkcijos $w(z_0)$ Rymano schemų keitinių grupei.

2.4.1 teorema. *Jei daugiareikšmė funkcija gali būti išreiškiama radikalais, tai jos monodromijos grupė yra išsprendžiama.*

(Įrodymas [1] knygoje).

3 skyrius

Abel-Ruffini teorema

Imkime lygtį $P_z(w)$

$$2w^5 - 5w^4 - \frac{70}{3}w^3 + 40w^2 + 120w + z = 0$$

kur z – kompleksinis parametras. Tokia lygtis turi 5 šaknis. Jos išvestinė lygi:

$10w^4 - 20w^3 - 70w^2 + 80w + 120 = 10(w+1)(w-2)(w+2)(w-3)$.

vadinasi, šaknys -2,–1, 2, 3 gali būti antros eilės. Įsistatome jas į pradinę lygtį:

$P_z(-2) = 2 \cdot (-2)^5 - 5 \cdot (-2)^4 - \frac{70}{3} \cdot (-2)^3 + 40 \cdot (-2)^2 + 120 \cdot (-2) + z = -37\frac{1}{3} + z$

$-37\frac{1}{3} + z = 0$

$\Rightarrow z = 37\frac{1}{3}$

$P_z(-1) = 2 \cdot (-1)^5 - 5 \cdot (-1)^4 - \frac{70}{3} \cdot (-1)^3 + 40 \cdot (-1)^2 + 120 \cdot (-2) + z = -63\frac{2}{3} + z$

$-63\frac{2}{3} + z = 0$

$\Rightarrow z = 63\frac{2}{3}$

$P_z(2) = 2 \cdot (2)^5 - 5 \cdot (2)^4 - \frac{70}{3} \cdot (2)^3 + 40 \cdot (2)^2 + 120 \cdot (2) + z = 197\frac{1}{3} + z$

$197\frac{1}{3} + z = 0$

$\Rightarrow z = -197\frac{1}{3}$

$P_z(3) = 2 \cdot (3)^5 - 5 \cdot (3)^4 - \frac{70}{3} \cdot (3)^3 + 40 \cdot (3)^2 + 120 \cdot (3) + z = 171 + z$

$171 + z = 0$

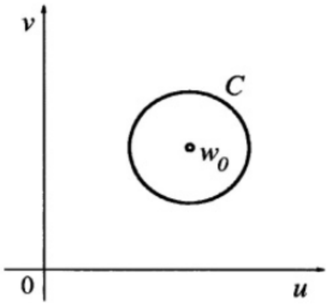
$\Rightarrow z = -171$

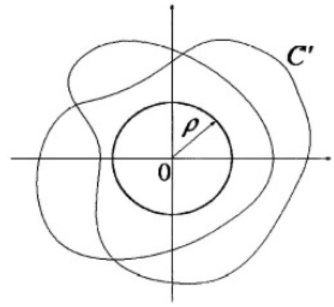
Taigi, kai parametro z reikšmės $z = 37\frac{1}{3}, z = 63\frac{2}{3}, z = -197\frac{1}{3}, z = -171$, daugianaris $P_z(w)$ gali turėti keturias skirtingas šaknis.
Šaknis $w_0 = -2$ bus antros eilės tada, kai parametro z reikšmė bus lygi $z = 37\frac{1}{3}$, šaknis $w_0 = -1$ antros eilės, kai $z = 63\frac{2}{3}$, šaknis $w_0 = 2$ antros eilės, kai $z = -197\frac{1}{3}$, šaknis $w_0 = 3$, kai $z = -171$.

Įrodykime, kad mažiems parametro z pokyčiams, lygties
$2w^5 - 5w^4 - \frac{70}{3}w^3 + 40w^2 + 120w + z = 0$
šaknys irgi pakis mažai:

3.0.1 teiginys. *Tegu z_0 - kompleksinis skaičius, w_0 - viena iš daugianario $P_z(w)$ šaknų, kai $z = z_0$. Imkime skritulį su kiek norima mažu spindulu r ir centru taške w_0. Tada egzistuoja realusis skaičius $\rho > 0$, toks, kad jei $|z_0^* - z_0| < \rho$, tai tame skritulyje egzistuoja bent viena daugianario šaknis ir taškui $z = z_0^*$.*

Įrodymas:
Tegu $P_z(w) = 2w^5 - 5w^4 - \frac{70}{3}w^3 + 40w^2 + 120w + z = 0$. Fiksuokime $z = z_0$ ir nagrinėkime vienareikšmį atvaizdį $\tau = P_{z_0}(w)$, kuris w plokštumą atvaizduoja į kompleksinę τ plokštumą. Tarkime, C yra apskritimas w plokštumoje su centru taške w_0 ir spinduliu r, o C^* – jo vaizdas, gautas atvaizdžiu $\tau = P_{z_0}(w)$. Išskaidykime daugianarį $P_{z_0}(w) = 2w^5 - 5w^4 - \frac{70}{3}w^3 + 40w^2 + 120w + z_0 = 0$ pirmojo laipsnio daugikliais:
$P_{z_0}(w) = 2(w - w_1)(w - w_2)(w - w_3)(w - w_4)(w - w_5)$,
w_i - lygties $P_{z_0}(w) = 0$ šaknys. Jei w_i neguli diske D, apibrėžtame apskritimo C, tai apsisukant prieš laikrodžio rodyklę apskritimu C, $(w - w_i)$ argumentas nesikeičia. Jei $w_i \in D$, tai $(w - w_i)$ argumentas pasikeičia per 2π. Vadinasi, apsisukant palei apskritimą C, funkcijos $P_{z_0}(w)$ argumentas padidėja $2\pi m$, m - lygties $P_{z_0}(w) = 0$ šaknų, esančių skritulio D viduje, skaičius. Vadinasi, kreivė C^* apsisuka aplink tašką $\tau = 0$ m kartų.





Kadangi teigėme, kad w_0, esantis skritulio D centre, yra viena iš lygties $P_{z_0}(w) = 0$ šaknų, vadinasi $m \geqslant 1$. Vadinasi, $\exists \rho > 0$ toks, kad diskas su centru $\tau = 0$ ir spinduliu ρ nesikerta su kreive C^*.

Imkime kitą tašką z_0^*. Nagrinėkime kitą atvaizdį $\tau = P^*_{z_0}(w)$ ir juo gautą kreivės C vaizdą C^{**}.

$P_{z_0^*}(w) = 2w^5 - 5w^4 - \frac{70}{3}w^3 + 40w^2 + 120w + z_0^* = 2w^5 - 5w^4 - \frac{70}{3}w^3 + 40w^2 + 120w + z_0^* + z_0 - z_0 = 2w^5 - 5w^4 - \frac{70}{3}w^3 + 40w^2 + 120w + z_0 + (z_0^* - z_0) = P_{z_0}(w) + (z_0^* - z_0)$.

Taigi, kreivė $C^* *$ gaunama perkeliant kreivę C^* per vektorių $(z_0^* - z_0)$. Jei vektoriaus $(z_0^* - z_0)$ ilgis mažesnis už ρ, tai aplink tašką $\tau = 0$, kreivė $C^* *$ apsisuka tiek pat kartų, kiek ir kreivė $C^* *$, t.y. m kartų. Kaip ir taško z_0 atveju, gauname, kad skritulyje D yra $m \geqslant 1$ šaknų ir lygčiai $P_{z_0^*}(w) = 0$. $\square$

Tarkime, $w(z)$ yra funkcija išreiškianti lygties $P_z(w) = 2w^5 - 5w^4 - \frac{70}{3}w^3 + 40w^2 + 120w + z = 0$ šaknis per parametrą z ir w_0 - viena iš $w(z_0)$ reikšmių. Turime, kad, jei taškas z juda kreive nuo taško z_0 tolygiai, tai galima parinkti vieną iš $w(z)$ reikšmių taip, kad taškas w taip pat kistų tolygiai kreive nuo taško w_0, t.y. funkcija $w(z)$ gali būti apibrėžta tolydžiai palei kokią nors kreivę C. Taigi, jei kreivė C nekerta nei funkcijos $w(z)$ šakojimosi, nei neunikalumo taškų, tai funkcija $w(z)$ yra apibrėžta tolydžiai palei kreivę C.

3.0.2 teiginys. *Tik taškai* $z = 37\frac{1}{3}, z = 63\frac{2}{3}, z = -197\frac{1}{3}, z = -171$ *gali būti funkcijos* $w(z)$ *šakojimosi arba neunikalumo taškais.*

Įrodymas:

Tegu - z_0 koks nors taškas, išskyrus taškus $z = 37\frac{1}{3}, z = 63\frac{2}{3}, z = -197\frac{1}{3}, z = -171$.

1) Įrodykime, kad taškas z_0 nėra funkcijos $w(z)$ neunikalumo taškas:

turime 5 taško z_0 vaizdus, gautus atvaizdžiu $w(z)$. Pažymėkime juos w_1, w_2, w_3, w_4, w_5. Jei tolydi kreivė prasideda taške z_0, tai kiekviename iš taškų w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 prasidės bent vienas tolydus kreivės C vaizdas. Jei kuriame nors iš taškų $w_i, (i = 1, 2, ..., 5)$ prasidedėtų du tolydūs kreivės C vaizdai, tai kreivė turėtų 6 tolydžius atvaizdžius, tačiau tai nėra įmanoma, nes penktojo laipsnio lygtis negali turėti daugiau nei 5 šaknis. Vadinasi, taškas z_0 negali būti funkcijos $w(z)$ neunikalumo tašku.

2) Taškas z_0 nėra funkcijos $w(z)$ šakojimosi taškas:

imkime penkis skritulius D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 su spinduliu r ir centrais taškuose w_i. r parinkime pakankamai mažą, kad tie skrituliai nesikirstų. Egzistuoja skritulys D_0 su centru taške z_0 toks, kad kiekvienam taškui $z_0^* \in D_0$ egzistuoja po vieną vaizdą kiekviename iš skritulių D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 plokštumoje w. Tarkime, C yra tolydi kreivė skritulio D_0 viduje. Tada visi jos vaizdai yra skritulių D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 viduje. Kadangi skrituliai nesikerta, kreivės vaizdai negali pereiti iš vieno iš $D_i, (i = 1, ..., 5)$ skritulių į kitą ir kiekvienas iš kreivės vaizdų yra tik viename skritulyje. Jei kreivė C, esanti skritulio D viduje, prasideda ir baigiasi taške z_0^*, tai jos vaizdas - kreivė C^* prasideda ir baigiasi taškuose, kurie yra taško z_0^* vaizdai. Kadangi kiekviename iš skritulių D_i yra tik po vieną taško z_0^* vaizdą ir kreivė C^* yra tik vieno iš skritulių viduje, vadinasi, kreivė C^* prasideda ir baigiasi tame pačiame taške.

Taigi, jei C yra uždara kreivė skritulio D_0 viduje, tai funkcijos $w(z)$ reikšmė galiniame kreivės C taške sutampa su reikšme pradiniame C taške. Tai galioja visiems apskritimams su centru taške z_0 ir spinduliu mažnesniu nei ρ. Kadangi apeinant kreive aplink tašką z_0 funckijos $w(z)$ reikšmė nepasikeičia, o lieka tokia pati, vadinasi z_0 nėra funkcijos $w(z)$ šakojimosi taškas. $\square$

Tarkime, žinome, kad vienas iš taškų $z = 37\frac{1}{3}, z = 63\frac{2}{3}, z = -197\frac{1}{3}, z = -171$ yra funkcijos $w(z)$ šakojimosi taškas. Pasirinkime, kad jis yra $z_0 = 37\frac{1}{3}$. Tada lygtis

$2w^5 - 5w^4 - \frac{70}{3}w^3 + 40w^2 + 120w + z = 0$

turi 4 šaknis w_1, w_2, w_3, w_4, iš kurių viena, tarkime, w_1, yra antros eilės, o likusios - pirmos. Tarkime, taškas z_0^* yra arti taško z_0. Tada turime, kad šalia taško w_1 yra du taško z_0^* vaizdai, gauti atvaizdžiu $w(z)$ ir prie taškų w_2, w_3, w_4 - po vieną z_0^* vaizdą. Tarkime, C - apskritimas su mažu spinduliu ir centru taške z_0, C prasideda ir baigiasi taške z_0^*. Turime, kad tolygūs apskritimo C vaizdai, kurie prasideda prie taškų w_2, w_3, w_4 baigiasi tuose pačiuose taškuose, o vaizdas, kurio pradžia yra viename iš taško z_0^* vaizdų prie taško w_1 gali baigtis kitame z_0^* vaizde, esančiame prie taško w_1 . Vadinasi, taške z_0 gali jungtis tik dvi Rymano schemos plokštumos ir tame taške nebus perėjimų tarp likusių trijų plokštumų.

3.0.3 teiginys. *Tarkime, $w(z)$ yra funkcija išreiškianti lygties $P_z(w) = 2w^5 - 5w^4 - \frac{70}{3}w^3 + 40w^2 + 120w + z = 0$ šaknis per parametrą z. Tegu z_0 ir z_1 - kokie nors taškai, išskyrus $z = 37\frac{1}{3}, z = 63\frac{2}{3}, z = -197\frac{1}{3}, z = -171$ ir w_0 ir w_1 - jų vaizdai, gauti naudojant atvaizdį $w(z)$. Tada yra įmanoma nubrėžti tokią tolydžią kreivę, jungiančią taškus z_0 ir z_1 ir neinančią per $z = 37\frac{1}{3}, z = 63\frac{2}{3}, z = -197\frac{1}{3}, z = -171$, kad jos tolydus vaizdas, kuris prasideda taške w_0, baigtųsi w_1.*

Įrodymas:

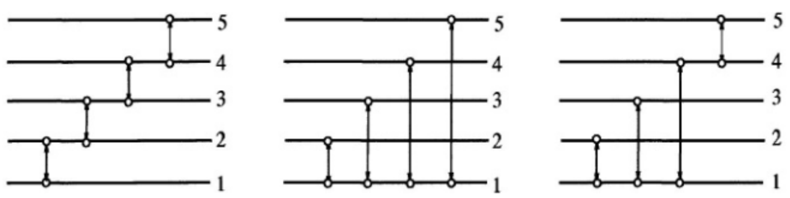
taškai $z = 37\frac{1}{3}, z = 63\frac{2}{3}, z = -197\frac{1}{3}, z = -171$ ir w_0 ir w_1 turi baigtinį skaičių vaizdų, todėl įmanoma nubrėžti jų nekertančią kreivę C^*, einančią iš taško w_0 į w_1. Tegu C yra kreivės C^* vaizdas, gautas atvaizdžiu $z(w) = 2w^5 - 5w^4 - \frac{70}{3}w^3 + 40w^2 + 120w$. Kadangi $z(w)$ yra tolydi funkcija ir C^* - tolydi kreivė, tai C taip pat tolydi. Kreivė C^* yra tolydus kreivės C vaizdas, gautas atvaizdžiu $w(z)$. Kadangi kreivė C^* nekerta taškų $z = 37\frac{1}{3}, z = 63\frac{2}{3}, z = -197\frac{1}{3}, z = -171$ vaizdų, tai kreivė C nekirs taškų $z = 37\frac{1}{3}, z = 63\frac{2}{3}, z = -197\frac{1}{3}, z = -171$ ir pradinis taškas bus $z(w_0) = z_0$, galinis - $z(w_1) = z_1$. $\square$

3.0.4 teiginys. *taškai $z = 37\frac{1}{3}, z = 63\frac{2}{3}, z = -197\frac{1}{3}, z = -171$ yra funkcijos $w(z)$ šakojimosi taškai.*

Įrodymas:

judant kreive, neinančia per taškus $z = 37\frac{1}{3}, z = 63\frac{2}{3}, z = -197\frac{1}{3}, z = -171$, galima pereiti iš vienos funkcijos $w(z)$ Rymano paviršiaus plokštumos į kitą. Kiekvienas perėjimas į kitą plokštumą kertant perkirpimą nuo šakojimosi taško iki begalybės atitinka perėjimą iš to taško Rymano schemoje. Kadangi tik taškai $z = 37\frac{1}{3}, z = 63\frac{2}{3}, z = -197\frac{1}{3}, z = -171$ gali būti funkcijos $w(z)$ šakojimosi taškais, ir kiekviename iš taškų gali jungtis tik dvi plokštumos, norint gauti schemą, kurioje nėra nesijungiančių plokštumų, visi keturi taškai $z = 37\frac{1}{3}, z = 63\frac{2}{3}, z = -197\frac{1}{3}, z = -171$ turi būti funkcijos $w(z)$ šakojimosi taškais. $\square$

Gali būti trys Rymano schemos variantai funkcijai $w(z)$:



(kiti variantai sutampa su šiais pernumeravus plokštumas arba vietomis sukeitus šakojimosi taškus schemoje).

3.0.5 teiginys. *funkcijos $w(z)$ monodromijos grupė yra S_5.*

Įrodymas:

pirmiausia įrodysime, kad visoms trims schemoms keitinių grupė yra sudaryta iš transpozicijų $(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)$. Pirmai schemai tai akivaizdu. Antroje ir trečioje schemoje transpozicijas $(2,3)$ ir $(3,4)$ gauname:

$(2,3)=(1,2)\cdot(1,3)\cdot(1,2);$

$(3,4)=(1,3)\cdot(1,4)\cdot(1,3).$

Antroje schemoje:

$(4,5)=(1,4)\cdot(1,5)\cdot(1,4).$

Jei grupė yra sudaryta iš visų transpozicijų $(1,2),(2,3),(...),(n-1,n)$, tai ji sutampa su visa n-ojo laipsnio keitinių grupe S_n (įrodymas [1] knygoje).

Vadinasi, visais trimis atvejais, Rymano schemos keitinių grupė sutampa su grupe S_n. $\square$

3.0.6 teorema. *Penktojo laipsnio lygtis*

$a_0w^5+a_1w^4+a_2w^3+a_3w^2+a_4w+a_5=0, \quad a_0\neq 0$

nėra išsprendžiama radikalais.

Įrodymas:

funkcijos $w(z)$, išreiškiančios lygties $2w^5-5w^4-\frac{70}{3}w^3+40w^2+120w+z=0$ šaknis per parametrą z, monodromijos grupė nėra išsprendžiama, todėl $w(z)$ nėra išreiškiama radikalais. Kadangi lygčiai $a_0w^5+a_1w^4+a_2w^3+a_3w^2+a_4w+a_5=0$ parinkus $a_0=2, a_1=-5, a_2=-\frac{70}{3}, a_3=40, a_4=120, a_5=z$ gavome, kad jos šaknis išreiškiančios lygties negalima užrašyti radikalais, vadinasi, neegzistuoja bendra formulė visoms penktojo laipsnio lygtims. $\square$

Abel-Ruffini teorema:

Kai $n\geqslant 5$, lygtis

$a_0w^n+a_1w^{n-1}+...+a_{n-1}w+a_n=0, \quad a_0\neq 0$

nėra išsprendžiama radikalais.

Įrodymas:

Nagrinėkime lygtį

$(2w^5 - 5w^4 - \frac{70}{3}w^3 + 40w^2 + 120w + z)w^{n-5} = 0.$

Kai $n > 5$, funkcijos $w_1(z)$, išreiškiančios lygties $(2w^5 - 5w^4 - \frac{70}{3}w^3 + 40w^2 + 120w + z)w^{n-5} = 0$ šaknis per parametrą z Rymano paviršius bus sudarytas iš vienos atskiros plokštumos $w_1(z) \equiv 0$ ir penkių plokštumų, atitinkančių funkcijos $w(z)$ Rymano schemą. Vadinasi, funkcijos $w_1(z)$ monodromijos grupė sutampa su funkcijos $w(z)$, kuri nėra išsprendžiama. Kadangi lygties $(2w^5 - 5w^4 - \frac{70}{3}w^3 + 40w^2 + 120w + z)w^{n-5} = 0$ šaknų negalima išreikšti radikalais, kai $n > 5$, gauname, kad neegzistuoja bendra formulė n-tojo laipsnio daugianarių

$a_0w^n + a_1w^{n-1} + ... + a_{n-1}w + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0$

šaknų užrašymui radikalais. $\square$

The topological proof of Abel-Ruffini theorem II

Paulina Žvirblytė

Summary

Abel-Ruffini theorem states that the generic algebraic equation of degree five or higher is not solvable by radicals - formula does not exist for expressing roots of a generic equation of degree five or higher in terms of its coefficients by means of operations of addition, subtraction, multiplication, division, raising to a natural power, and extraction of a root of natural degree.

The aim of this thesis is to write the proof of Abel-Ruffini by analyzing a fifth degree polynomial and its Riemann surface schemes.

Literatūra

[1] V.B. Alekseev, *Abel's Theorem in Problems and Solutions,* Springer, New York, 2004.

[2] C. Teleman, *Riemann Surfaces,* https://math.berkeley.edu/ teleman/math/Riemann.pdf

[3] H. Zoladek, *The Topological Proof of Abel-Ruffini Theorem,* Journal of the Juliusz Schauder Center, 16, 253–265, 2000.