

## Atsitiktinių dydžių transformacijos

A. BIKELIS, J. TURKUVIENĖ (VU)

el. paštas: marius@post.omnitel.lt, jurgutet@takas.lt

Atsitiktinių dydžių transformacijos ir jų skirstinių tyrimai užima centrinę vietą matematinėje statistikoje [1–5]. Mes savo darbuose nagrinėjame finansų matematikoje sutinkamus tikimybinis skirstinius [6, 7], t.y. skirstinius, kurie priklauso klasėms  $IG(a, b)$ ,  $GIC(\lambda, a, b)$ ,  $TS(\kappa, a, b)$ ,  $VG(C, G, M)$ ,  $NIG(\alpha, \beta, \delta)$ ,  $CGMY(C, G, M, Y)$  ir t.t. Visi nagrinėjami tikimybiniai skirstiniai yra be galo dalūs ir priklauso  $L$  klasei. Jų charakteringosios funkcijos yra pavidalo

$$f(t) = \exp \left\{ it\gamma - \frac{\sigma^2}{2} t^2 + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx \mathbf{1}_{(|x|<1)}) \pi(dx) \right\},$$

kur  $\gamma \in R^1$ ,  $\sigma^2 \geq 0$ , matas  $\pi(dx)$  apibrėžtas tiesėje  $R^1$  be 0, t.y.  $R^1 \setminus \{0\}$ , ir

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 \wedge x^2) \pi(dx) < \infty.$$

Levy-Chinčino tripletas yra  $(\gamma, 0, \pi(dx))$ .

Smulkiau apsistojame ties B. Grigelionio [4] klasės  $GZD(\alpha, \beta_1, \beta_2, \delta, \mu)$  tikimybiniais skirstiniais. Yra įrodyta [4], kad  $GZD(\dots)$  skirstinių tripletas yra

$$(a, 0, \pi(dx)),$$

kur

$$a = \frac{\alpha\delta}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} \frac{e^{-\beta_2 x} - e^{-\beta_1 x}}{1 - e^x} dx + \mu,$$

$$\pi(dx) = v(x)dx,$$

$$v(x) = \begin{cases} \frac{2\delta \exp\left\{-\frac{2\pi\beta_2}{\alpha}x\right\}}{x\left(1 - \exp\left\{-\frac{2\pi}{\alpha}x\right\}\right)}, & \text{kai } x > 0, \\ \frac{2\delta \exp\left\{\frac{2\pi\beta_1}{\alpha}x\right\}}{|x|\left(1 - \exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}x\right\}\right)}, & \text{kai } x < 0, \end{cases}$$

Darbe [4] yra apibrėžtas daugiamačiasis  $GZD(\dots)$  dėsnio analogas, t.y. jo tankio funkcija

$$p(\vec{x}) = \int_0^\infty g_{v\vec{a}+\vec{\mu}, vA}(\vec{x}) h(v) dv, \quad \vec{x} \in R^k,$$

kur

$$g_{\vec{a}, A}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{|A|}(\sqrt{2\pi})^k} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{a})A^{-1}(\vec{x} - \vec{a})\right\},$$

$\vec{a}, \vec{\mu} \in R^k$ ,  $A$  – teigiamai apibrėžta simetrinė matrica  $k \times k$ ,

$$h(v) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k e^{-\lambda_k v}, \quad v > 0,$$

yra Polya dėsnio tankis su parametrais  $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots$ ,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} < \infty, \quad v_k = \lambda_k \prod_{j \neq k} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_k}\right),$$

egzistuoja  $c > 0$  tokia, kad

$$|v_k| = O(e^{c\lambda_k}),$$

kai  $k \rightarrow \infty$ .

Šiuo atveju Levy charakteristikos  $(\vec{\gamma}_k, \vec{O}, \vec{\pi}_k)$  yra

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}_k &= \vec{\mu} + \int_{|\vec{x}| < 1} \vec{x} \pi_k(d\vec{x}), \\ \pi_k(B) &= \int_B \frac{2 \exp\{(\vec{a}A^{-1}, \vec{x})\}}{\sqrt{|A|}(\sqrt{2\pi})^k} \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \frac{2\lambda_l + (\vec{a}A^{-1}, \vec{a})}{(\vec{x}A^{-1}, \vec{x})} \right]^{k/2} \\ &\quad \times K_{k/2} \left( \left[ (2\lambda_k + (\vec{a}A^{-1}, \vec{a})) (\vec{x}A^{-1}, \vec{x}) \right]^{1/2} \right) d\vec{x}, \end{aligned}$$

kur  $B \in \mathcal{B}(R^k \setminus \{0\})$ ,  $K_\gamma(u)$  – modifikuota Besselio funkcija, t.y.

$$K_\gamma(u) = \frac{1}{2} \int_0^\infty v^{\gamma-1} e^{-u(v+v^{-1})/2} dv, \quad u > 0, \gamma \in R^1.$$

Tarkime,

$$\begin{aligned} e^{i(\vec{t}, \vec{\mu}) + v[i(\vec{t}, \vec{a}) - \frac{1}{2}(\vec{t}A, \vec{t})]} &= \int_{R^k} e^{i(\vec{t}, \vec{x})} g_{v\vec{a}+\vec{\mu}, vA}(\vec{x}) d\vec{x}, \\ f(\vec{t}) &= \int_{R^k} e^{i(\vec{t}, \vec{x})} p(\vec{x}) d\vec{x}. \end{aligned}$$

Tuomet

$$f(\vec{t}) = e^{i(\vec{t}, \vec{\mu})} \widehat{h}(e^{i(\vec{t}, \vec{a}) - \frac{1}{2}(\vec{t}A, \vec{t})}),$$

kur  $\widehat{h}(e^{it})$  yra Polya charakteringoji funkcija.

Daugiamatis  $GZD(\dots)$  dėsnis apibrėžiamas charakteringosios funkcijos  $f^{2\delta}(\vec{t})$  pagalba:

$$f^{2\delta}(\vec{t}) = e^{i2\delta(\vec{t}, \vec{\mu})} (\widehat{h}(e^{i(\vec{t}, \vec{a}) - \frac{1}{2}(\vec{t}A, \vec{t})}))^{2\delta} = e^{i2\delta(\vec{t}, \vec{\mu})} (\widehat{h}_{2\delta}(e^{i(\vec{t}, \vec{a}) - \frac{1}{2}(\vec{t}A, \vec{t})})).$$

Savo darbuose mes praplečiame  $GZD(\dots)$  skirstinių klasę. Vietoje tikimybinio skirstinio su tankiu  $h(v)$ ,  $v > 0$ , imame tikimybinį skirstinį

$$H(v), \quad v \geq 0.$$

Jis gali būti diskretus ir ne be galo dalus.

Gauso tankį praplečiame iki

$$g_{v\vec{a} + \vec{\mu}, \alpha_0^2 A_0 + v\alpha_1^2 A_1}(\vec{x}),$$

kur  $\alpha_0 \geq 0$ ,  $\alpha_1 \geq 0$ ,  $A_0$  ir  $A_1$  – teigiamai apibrėžtos simetrinės matricos  $k \times k$ .

Dabar charakteringoji funkcija yra

$$\overline{f}(\vec{t}) = e^{i(\vec{t}, \vec{\mu}) - \frac{\alpha_0^2}{2}(\vec{t}A_0, \vec{t}_0)} \widehat{h}(e^{i(\vec{t}, \vec{a}) - \frac{\alpha_1^2}{2}(\vec{t}A_1, \vec{t})}),$$

kur

$$\widehat{h}(z) = \int_0^\infty z^v dH(v).$$

Šiuo atveju Levy tripletas yra

$$(\vec{\gamma}_0, \alpha_0^2 A_0, \pi_k).$$

Kai  $k = 1$ , gauname

$$\xi_{ZD} = \mu + \theta\alpha_1\eta_H + \eta_{N(0,1)}\sqrt{\alpha_0^2 + \alpha_1^2\eta_H} \in GZD\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{1}{2}, \mu\right),$$

kur  $P\{\eta_H < x\} = \int_0^x h(v)dv$ .

B. Grigelionio [4] klasės  $GZD(\alpha, \beta_1, \beta_2, \delta, \mu)$  atsitiktiniams dydžiams  $\xi_G$  gauname sekančią transformaciją

$$\xi_G = 2\delta\mu + \theta\alpha_1\eta_{H(\delta)} + \eta_{N(0,1)}\sqrt{2\delta\alpha_0^2 + \alpha_1^2\eta_{H(\delta)}},$$

kur atsitiktinio dydžio  $\eta_{H(\delta)}$  charakteringoji funkcija yra  $(\widehat{h}(t))^{2\delta}$ , o  $\eta_{N(0,1)}$  – standartinis Gauso atsitiktinis dydis.

### Literatūra

1. W. Wasow, On the asymptotic transformation of certain distribution into the normal distribution, *Proc. Symp. Appl. Math.*, **6**, 251–259 (1956).
2. E.A. Cornish, R.A. Fisher, Moments and cumulants in the specification of distributions, *Rev. Inst. Intern. Statist.*, **4**, 307–320 (1937).
3. R. Bhattacharya, M. Denker, *Asymptotic Statistics*, Birkäuser Verlag (1990).
4. B. Grigelionis, On Polya mixtures of multivariate Gaussian distributions, *Liet. matem. rink.* (2004).
5. W. Shoutens, *Levy Processes in Finance*, Jhon Wiley & Sons, Ltd. (2003).

### SUMMARY

#### **A. Bikelis, J. Turkuviene. Transformations of random variables**

Transformation of random variable  $\xi_G \sim GZD(\alpha, \beta_1, \beta_2, \delta, \mu)$  is obtained in this article.

*Keywords:* generalized  $z$ -distribution, Levy characteristics, Gaussian law, random variable transformation.