Liet. matem. rink, **45**, *spec. nr.*, 2005, 102–107

Glaustinis paraboloidas

Kazimieras NAVICKIS (VU)
el. paštas: kazimieras.navickis@mif.vu.lt

Reziumė. Šiame darbe nagrinėjami paviršiaus aukštesnių eilių glaustiniai paraboloidai. Šie paviršiai leidžia vizualizuoti duotojo paviršiaus savybes jo taško aukštesnių eilių aplinkose.

Raktiniai žodžiai: paviršius, glaustinis paviršius, glaustinis paraboloidas.

Dviejų paviršių kontakto eilės geometrinė interpretacija turi ilgą istoriją diferencialinėje geometrijoje. Eilės r kontakto geometrinę interpretaciją padeda išaiškinti r-osios eilės glaustinis paraboloidas. Atvejis $r = 2$ yra klasikinis [1]. Šiame darbe išvedamos formulės leidžia efektyviai ir paprastai rasti bet kurios eilės $r \geqslant 2$ glaustinį paraboloidą duotajame paviršiaus taške.

Tarkime, kad S – paviršius trimatėje Euklido erdvėje. Paviršių S galima apibrėžti išreikštine lygtimi, neišreikštine lygtimi arba parametrinėmis lygtimis. Aptarsime šiuos atvejus.

1 atvejis. Tarkime, kad paviršius S apibrėžtas išreikštine lygtimi

$$S\colon\ z = f(x, y), \tag{1}$$

funkcija f yra tolydinė ir turi tolydines dalines išvestines taške $(x_0; y_0)$ iki eilės $r+1$; $r \in \mathbb{N}$. Paviršių S nagrinėsime jo taško $M_0(x_0; y_0; z_0)$ aplinkoje; čia $z_0 = f(x_0, y_0)$. Pažymėkime

$$f_{\underbrace{1\cdots1}_{p}\underbrace{2\cdots2}_{q}} = \frac{\partial^{p+q} f}{(\partial x)^p(\partial y)^q};$$

$$a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p+q}} = f_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+q}}\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}};$$

čia $\alpha_1, \alpha_2, \ldots = 1, 2$. Paviršiaus S parametrinių kreivių $x = const$ ir $y = const$ liečiamieji vektoriai $\overrightarrow{r_1} = \{1; 0; f_1\}$, $\overrightarrow{r_2} = \{0; 1; f_2\}$ yra statmeni normalės vektoriui $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{r_1} \times \overrightarrow{r_2}$.

Paviršiaus S taške M_0 turime tris ortus:

$$\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{\sqrt{E_0}}\,\{1; 0; a_1\}, \quad \overrightarrow{e_3} = \frac{1}{W_0}\,\{-a_1; -a_2; 1\},$$

$$\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_3} \times \overrightarrow{e_1} = \frac{1}{W_0\sqrt{E_0}}\big\{-a_1a_2; 1+(a_1)^2; (a_2)^2\big\};$$

čia $E_0 = 1 + (a_1)^2$, $W_0 = \sqrt{1 + (a_1)^2 + (a_2)^2}$.

Bazinių vektorių koordinates žymėsime taip:

$$\overrightarrow{e_1} = \{l_1; l_2; l_3\}, \quad \overrightarrow{e_2} = \{m_1; m_2; m_3\}, \quad \overrightarrow{e_3} = \{n_1; n_2; n_3\}.$$

Bet kurio erdvės taško $M(x; y; z)$ koordinates bazės $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}\}$ atžvilgiu pažymėkime x_1, y_1, z_1. Tada

$$(x\ y\ z) = (x_0\ y_0\ z_0) + (x_1\ y_1\ z_1) \cdot R^t; \tag{2}$$

čia

$$R^t = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix}.$$

Atvirkštinė transformacija $(x_1\ y_1\ z_1) = (x - x_0\ \ y - y_0\ \ z - z_0) \cdot R$. Paviršiaus S lygtis, atlikus (2) koordinačių transformaciją, dabar bus tokia:

$$\begin{aligned} S\colon\ g(x_1, y_1, z_1) \equiv f(&x_0 + l_1x_1 + m_1y_1 + n_1z_1,\ y_0 + l_2x_1 + m_2y_1 + n_2z_1) \\ &- (l_3x_1 + m_3y_1 + n_3z_1 + z_0) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Pažymėkime

$$g_1 = \frac{\partial g}{\partial x_1}, \quad g_2 = \frac{\partial g}{\partial y_1}, \quad g_3 = \frac{\partial g}{\partial z_1}.$$

Funkcijos g aukštesnių eilių išvestines žymėsime panašiai:

$$g_{\underbrace{1\cdots1}_{p}\underbrace{2\cdots2}_{q}\underbrace{3\cdots3}_{s}} = \frac{\partial^{p+q+s} g}{(\partial x_1)^p (\partial y_1)^q (\partial z_1)^s}.$$

Išvestinių $g_{a_1},\ g_{a_1a_2},\ \ldots$ reikšmes taške M_0 žymėsime atitinkamai $b_{a_1},\ b_{a_1a_2},\ \ldots$; čia $a_1, a_2, \ldots = 1, 2, 3$. Kadangi $b_1 = 0,\ b_2 = 0,\ b_3 = -W_0 \neq 0$, tai funkcija g apibrėžia funkciją $z_1 = h(x_1, y_1)$. Pažymėkime

$$A_{\underbrace{1\cdots1}_{p}\underbrace{2\cdots2}_{q}} = \frac{\partial^{p+q} z_1}{(\partial x_1)^p (\partial y_1)^q}, \quad c_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+q}} = A_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+q}}\big|_{M_0}.$$

Diferencialinių operatorių

$$\partial_1^\sharp = \frac{\partial}{\partial x_1} + A_1\frac{\partial}{\partial z_1}, \quad \partial_2^\sharp = \frac{\partial}{\partial y_1} + A_2\frac{\partial}{\partial z_1} \tag{4}$$

pagalba galima apibrėžti naujus operatorius $\partial^\sharp_{\alpha_1\ldots\alpha_p} = \partial^\sharp_{\alpha_p} \circ \cdots \circ \partial^\sharp_{\alpha_1}$. Pažymėkime $G_{\alpha_1\ldots\alpha_p} = \partial^\sharp_{\alpha_1\ldots\alpha_p} g$. Tada iš lygčių sistemos $G_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\big|_{c_\beta=0} = 0$, t.y. iš sistemos

$$b_{\alpha\beta} + b_3c_{\alpha\beta} = 0,$$

$$b_{\alpha\beta\gamma} + 3c_{(\alpha\beta}b_{\gamma)3} + b_3 c_{\alpha\beta\gamma} = 0,$$
$$b_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} + 6c_{(\alpha\beta}b_{\gamma\varepsilon)3} + 4c_{(\alpha\beta\gamma}b_{\varepsilon)3} + 3b_{33}c_{(\alpha\beta}c_{\gamma\varepsilon)} + b_3 c_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

paeiliui randame dydžius $c_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$.

Tardami, kad $x^1 = x$, $x^2 = y$, apibrėšime p-formą ($p \geqslant 2$)

$$z_p = \frac{1}{p!} c_{\alpha_1\ldots\alpha_p} x^{\alpha_1} \cdots x^{\alpha_p}. \tag{5}$$

Lygtis

$$O^{(r)}_{M_0}(S)\colon\ z_1 = z_2 + \cdots + z_r \tag{6}$$

apibrėžia r-osios eilės paviršių $O^{(r)}_{M_0}(S)$, kuris turi r-osios eilės kontaktą taške M_0 su duotuoju paviršiumi S. Todėl šį paviršių mes vadinsime paviršiaus S r-osios eilės glaustiniu paraboloidu taške M_0. Geometrines jo savybes mes nagrinėsime kitame darbe.

2 atvejis. Tarkime, kad paviršius S yra apibrėžtas neišreikštine lygtimi

$$S\colon\ F(x, y, z) = 0, \tag{7}$$

ir taškas $M_0(x_0; y_0; z_0) \in S$ yra toks, kad

$$F_z(M_0) = \frac{\partial F}{\partial z}\bigg|_{M_0} \neq 0.$$

Laikysime, kad funkcija F yra tolydinė kartu su savo dalinėmis išvestinėmis taške M_0 iki eilės $r+2$. Tam tikroje taško M_0 aplinkoje paviršius S aprašomas (1) tipo lygtimi ir

$$f_1 = -\frac{F_x}{F_z}, \quad f_2 = -\frac{F_y}{F_z}. \tag{8}$$

Funkcijos f aukštesnių eilių dalinės išvestinės gaunamos taikant diferencialinius operatorius

$$D^\sharp_1 = \frac{\partial}{\partial x} + f_1 \frac{\partial}{\partial z}, \quad D^\sharp_2 = \frac{\partial}{\partial y} + f_2 \frac{\partial}{\partial z}. \tag{9}$$

Pažymėkime

$$F_{\underbrace{1\cdots1}_{p}\underbrace{2\cdots2}_{q}\underbrace{3\cdots3}_{s}} = \frac{\partial^{p+q+s} F}{(\partial x)^p (\partial y)^q (\partial z)^s}; \quad d_{a_1\cdots a_p} = F_{a_1\cdots a_p}\Big|_{M_0}.$$

Tardami, kad

$$E_0 = \frac{(d_1)^2 + (d_3)^2}{(d_3)^2}, \quad W_0 = \frac{\sqrt{(d_1)^2 + (d_2)^2 + (d_3)^2}}{|d_3|},$$

taške M_0 turime tris ortus:

$$\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{\sqrt{E_0}}\{d_3; 0; -d_1\}, \quad \overrightarrow{e_3} = \frac{1}{W_0}\{d_1; d_2; d_3\},$$
$$\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_3} \times \overrightarrow{e_1} = \frac{1}{W_0\sqrt{E_0}}\big\{ -d_1 \cdot d_2; (d_1)^2 + (d_3)^2; -d_2 d_3\big\},$$

kurių koordinates žymėsime taip, kaip ir 1 atveju. Taikydami (2) koordinačių transformaciją (1) lygčiai, gauname (3) paviršiaus S lygtį. Vadinasi, dabar glaustinio paraboloido $O_{M_0}^{(r)}(S)$ radimui galime taikyti 1 atveju gautas formules.

3 atvejis. Tarkime, kad paviršius S yra apibrėžtas parametrinėmis lygtimis

$$S\colon\ x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \tag{10}$$

kuriose funkcijos $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ yra tolydinės kartu su savo dalinėmis išvestinėmis taške $V_0(u_0; v_0)$ iki eilės $r + 2$. Paviršių S nagrinėsime taško $M_0(x_0; y_0; z_0)$ aplinkoje; čia $x_0 = x(V_0)$, $y_0 = y(V_0)$, $z_0 = z(V_0)$. Pažymėkime

$$\begin{aligned} H_1 &= y_v \cdot z_u - y_u \cdot z_v, \\ H_2 &= x_u \cdot z_v - x_v \cdot z_u, \\ H_3 &= x_u \cdot y_v - x_v \cdot y_u; \end{aligned} \tag{11}$$

$$h_a = H_a(V_0); \tag{12}$$

čia

$$x_u = \frac{\partial x}{\partial u}, \quad x_v = \frac{\partial x}{\partial v}, \ \cdots.$$

Jei $h_3 \neq 0$, tai u ir v galima išreikšti x ir y atžvilgiu: $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$; be to,

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \frac{1}{H_3}\begin{pmatrix} y_v & -x_v \\ -y_u & x_u \end{pmatrix}.$$

Iš (10) paviršiaus lygčių išplaukia, kad jis dabar aprašomas lygtimi

$$S\colon\ z = z\big(u(x, y), v(x, y)\big) \quad \text{arba} \quad S\colon\ z = f(x, y). \tag{1}$$

Šiuo atveju galima taikyti diferencialinius operatorius

$$L_1^\sharp = u_x \frac{\partial}{\partial u} + v_x \frac{\partial}{\partial v}, \quad L_2^\sharp = u_y \frac{\partial}{\partial u} + v_y \frac{\partial}{\partial v} \tag{13}$$

ir jų kompozicijas $L_{\alpha_1 \cdots \alpha_p}^\sharp$. Iš (1) lygties gauname, kad

$$f_1 = -\frac{H_1}{H_3}, \quad f_2 = -\frac{H_2}{H_3}. \tag{14}$$

Vadinasi,

$$f_{\alpha_1\cdots\alpha_p} = L^{\sharp}_{\alpha_1\cdots\alpha_{p-1}} f_{\alpha_p}. \tag{15}$$

Pažymėkime

$$E_0 = \frac{(h_1)^2 + (h_3)^2}{(h_3)^2}, \quad W_0 = \frac{\sqrt{(h_1)^2 + (h_2)^2 + (h_3)^2}}{|h_3|}. \tag{16}$$

Paviršiaus S taške M_0 turime tris ortus

$$\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{\sqrt{E_0}}\Big\{1; 0; -\frac{h_1}{h_3}\Big\}, \quad \overrightarrow{e_3} = \frac{1}{W_0}\Big\{\frac{h_1}{h_3}; \frac{h_2}{h_3}; 1\Big\},$$

$$\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_3} \times \overrightarrow{e_1} = \frac{1}{W_0\sqrt{E_0}}\Big\{-\frac{h_1h_2}{(h_3)^2}; \frac{(h_1)^2 + (h_3)^2}{(h_3)^2}; -\frac{h_2}{h_3}\Big\},$$

kurių koordinates žymėsime taip, kaip 1 atveju. Dabar (1) paviršiaus lygčiai galima taikyti (2) koordinačių transformaciją. Taip mes gausime (3) lygtį. Vadinasi, glaustinio paraboloido $O^{(r)}_{M_0}(S)$ radimas šiuo atveju suvedamas į 1 atveju gautų formulių taikymą.

4 atvejis. Tarkime, kad paviršius S apibrėžtas parametrinėmis lygtimis

$$S\colon\ x = \frac{X(u,v)}{t(u,v)}, \quad y = \frac{Y(u,v)}{t(u,v)}, \quad z = \frac{Z(u,v)}{t(u,v)}, \tag{17}$$

kuriose funkcijos $X(u,v)$, $Y(u,v)$, $Z(u,v)$, $t(u,v)$ yra tolydinės kartu su savo dalinėmis išvestinėmis taške $V_0(u_0; v_0)$ iki eilės $r+2$. Paviršių S nagrinėsime jo taško $M_0(x_0; y_0; z_0)$ aplinkoje; čia $x_0 = x(V_0)$, $y_0 = y(V_0)$, $z_0 = z(V_0)$. Jei $h_3 \neq 0$, tai u ir v galima išreikšti x ir y atžvilgiu: $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$. Todėl paviršiaus S lygtis tampa tokia:

$$S\colon\ z = \frac{Z\big(u(x,y), v(x,y)\big)}{t\big(u(x,y), v(x,y)\big)} \quad \text{arba} \quad S\colon\ z = f(x,y). \tag{1}$$

Šiuo atveju $H_a = t^{-3}P_a$; čia

$$P_1 = \begin{vmatrix} Y_u & Z_u & t_u \\ Y_v & Z_v & t_v \\ Y & Z & t \end{vmatrix}, \quad P_2 = \begin{vmatrix} Z_u & X_u & t_u \\ Z_v & X_v & t_v \\ Z & X & t \end{vmatrix}, \quad P_3 = \begin{vmatrix} X_u & Y_u & t_u \\ X_v & Y_v & t_v \\ X & Y & t \end{vmatrix}.$$

Nagrinėjamu atveju (13) diferencialiniai operatoriai atrodo taip:

$$L^{\sharp}_1 = \frac{1}{H_3}\Big(y_v\frac{\partial}{\partial u} - y_u\frac{\partial}{\partial v}\Big), \quad L_2 = \frac{1}{H_3}\Big(-x_v\frac{\partial}{\partial u} + x_u\frac{\partial}{\partial v}\Big). \tag{18}$$

(18) operatorių kompoziciją $L_{\alpha_1\cdots\alpha_p} = L_{\alpha p} \circ \cdots \circ L_{\alpha_1}$ taikydami išvestinėms

$$f_1 = -\frac{H_1}{H_3} = -\frac{P_1}{P_3}, \quad f_2 = -\frac{H_2}{H_3} = -\frac{P_2}{P_3},$$

gauname aukštesnių eilių išvestines $f_{\alpha_1\cdots\alpha_{p-1}\alpha_p} = L^{\sharp}_{\alpha_1\cdots\alpha_{p-1}} f_{\alpha_p}$.

Taikydami (16) žymėjimus, taške $M_0 \in S$ galime apibrėžti tris ortus $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ (žr. 3 atvejį). Todėl (1) paviršiaus lygčiai galima taikyti (2) koordinačių transformaciją ir ją suvesti į (3) lygtį. Matome, kad ir šiuo atveju glaustinio paraboloido $O^{(r)}_{M_0}(S)$ radimui galima taikyti 1 atveju išvestas formules.

Literatūra

1. G. Scheffers, *Anwendung der Differential-und Integralrechnung auf die Geometrie*, Verlag von Veit & Comp., Zweiter Band, Leipzig (1902).

SUMMARY

K. Navickis. Osculating paraboloid

Osculating paraboloid of second order have been studied in classical differential geometry. In this article we generalize this concept to osculating paraboloids of higher order. This yields a visualization of the local properties of a given surface which depend on the derivatives of higher order.

Keywords: surface, osculating surface, osculating paraboloid.