

Lietuvos moksleivių paprastosios trupmenos sąvokos supratimo tyrimas

Virginija Būdienė

Mokslų darbuotoja
Vilniaus universitetas
Švietimo politikos centras
Didlaukio g. 47, LT-08303 Vilnius
Tel. (8 5) 267 52 44

Straipsnyje pateikiami sąvokos supratimo tikrinimo modelio sudarymo principai ir modelio aprobavimas analizuojant moksleivių paprastosios trupmenos sąvokos supratimą. Pagal pateiktą sąvokų supratimo tikrinimo modelį atlikta Lietuvos keturiolikmečių moksleivių paprastosios trupmenos sąvokos supratimo konstatuojamoji analizė ir nustatyta, kad tik apie pusę šios amžiaus grupės moksleivių yra įgiję teisingą paprastosios trupmenos sąvokos sampratą. Analizuojamos sąvokos supratimo klaidos ir galimos jų priežastys, pateikiamos metodinės rekomendacijos ir hipotezės tolesniems sąvokos supratimo tyrimams.

Reikšminiai žodžiai: sąvokų supratimas, sąvokos supratimo tikrinimo modelis, paprastosios trupmenos sąvokos supratimas.

Įvadas

Kiekvieno mokomojo dalyko ugdymo turinio pagrindą sudaro sąvokos, procedūros ir ryšiai. Moksleivių sąvokų mokymąsi ir jų supratimo formavimąsi tyrinėjo daugelis mokslininkų: psichologai Piaget (1960), Bruner (1966), Gardner (1984) tyrė sąvokų formavimąsi ir jų ryšį su proto veikla; Bruneris itin daug dėmesio skyrė moksleivių matematikos sąvokų formavimuisi; Merrill (1977), Hiebert (1992), Gage ir Berliner (1994), teoriškai grindė sąvokų mokymo ir mokymosi praktiką.

Tennyson pažinimą traktuoja kaip žinių įgijimą, o jų įsisąmoninimo gilumą skirsto į tris

hierarchinius lygmenis (Tennyson 1986; Arends 1998): *deklaratyviąsias, procedūrines ir konceptualiąsias* sąvokos žinias (arba *sampratas*). Deklaratyviosiomis vadinamos išankstinės ir formaliai atkartojamos sąvokos žinios. Išankstinės žinios gali turėti konceptualiųjų trūkumų, o atkartojamosios žinios yra paviršutiniškos. Taigi šio lygmens žinios yra pradinės ir dar nelaiduoja sąvokos supratimo. Plačiau taikomoje Bloomo (1956) pažinimo tikslų taksonomijoje deklaratyviosios žinios yra hierarchiškai žemiausioji pažinimo, taigi ir sąvokos formavimosi pakopa. Giliam sąvokų supratimui svarbiausios yra procedūrinės ir konceptualio-

sios žinios. Pagrindinis procedūrinių žinių po-
žymis yra gebėjimas *atpažinti* sąvoką. Koncep-
tualiosios žinios yra gebėjimas *apibrėžti* sąvo-
ką remiantis specifiniais kriterijais ir išvelgti
tos sąvokos santykius su kitomis sąvokomis ir
ją taikyti. Nors, mūsų manymu, šių sričių ribos
yra negriežtos, nes įsisąmoninimo procesas yra
kompleksinis ir permanentinis, t. y. mokantis
vis naujų sąvokų, ypač artimų, gilinamos ir
ankstesnės sąvokos, tačiau remdamiesi šia ži-
nių gilumo klasifikacija galime sudaryti sąvo-
kos supratimo tikrinimo modelį.

Problema

Supratimui tirti skirta nemažai mokslo darbų
(Gadamer 1998, Burns et al. 1991, Helmstad
1999). Ši problema yra filosofijos, pedagogi-
kos ir psichologijos mokslo objektas. Nors tai
yra mokymosi esmė, tiesiogiai supratimą pa-
matuoti sunku. Vieno kokio klausimo atsakymas
ar vieno uždavinio sprendimas, nors ir tei-
singas, dar neįrodo supratimo, todėl *suprati-
mo tikrinimas* ir matavimas yra sudėtinga, kom-
pleksinė problema. Dėl šio kompleksiško
viena iš sudėtingiausių švietimo problemų yra
moksleivių žinių vertinimas, aukštesniojo lyg-
mens mąstymo matavimas. Lietuvoje, refor-
muojant ugdymo turinį, modifikuoti matema-
tikos mokymo ir mokymosi tikslai: akcentuo-
jamos ne tik žinios, bet ir taikymai, realių pro-
blemų sprendimas, argumentavimas, matema-
tinė komunikacija. Dėl to kyla „matematinio
mąstymo“, sąmoningo supratimo tikrinimo,
kuris iki šiol į vertinimo programas nėra įtrau-
kiamas, reikmė. Kulm (1990), Romberg (1995)
tyrimų duomenimis, tik iš užduočių įvairovės
galima generuoti patikimą ir akivaizdų supra-
timo patvirtinimą. Siekiant koreguoti mokymo
ir mokymosi procesą, lygia greta sąvokos for-
mavimui (si) reikia taikyti įvairius formuoja-
muosius sąvokos supratimo tikrinimo būdus.

*Tačiau daugelis autorių pabrėžia supratimo tik-
rinimo modelių stoką.* Jų teigimu, pažangos šio-
je srityje galima pasiekti tik atliekant plačius
tyrimus, konstruojant ir verifikuojant naujus
supratimo tikrinimo modelius (Resnic et al.
1989). Tikrinimo modeliais galima tikrinti tiek
konkreto moksleivio, tiek didesnės mokinių
grupės supratimą.

*Analizuojant patikimas ir reprezentatyvias
moksleivių mokymosi rezultatų duomenų bazines,
galima nustatyti tipines visos tam tikro amžiaus
populiacijos supratimo klaidas.* Lietuvoje to-
kiems apibendrinimams tinkamos yra TIMSS,
TIMSS-R ir nacionalinių egzaminų duomenų
bazės. Tokių diagnostinių tyrimų duomenys
reikšmingi nacionalinių programų sudaryto-
jams, vadovėlių autoriams, mokytojų rengė-
jams ir patiems mokytojams, planuojantiems
savo pedagoginę veiklą (Būdienė, 2000).
TIMSS duomenų bazės iki šiol Lietuvoje nėra
išsamiai analizuotos, juo labiau sąvokos supra-
timo aspektu.

Tyrimo objektas – moksleivių sąvokų supra-
timas.

Tyrimo tikslas – sudaryti sąvokos supra-
timo tikrinimo modelį ir jį verifikuoti analizuo-
jant Lietuvos keturiolikmečių moksleivių pa-
prastosios trupmenos sąvokos supratimą.

Tyrimo uždaviniai: 1) Sudaryti sąvokos supra-
timo tikrinimo modelį. 2) Ištirti, kaip moks-
leiviai supranta paprastosios trupmenos sąvo-
ką. 3) Nustatyti, kuri Lietuvos keturiolikmečių
moksleivių dalis giliai suvokia paprastųjų trup-
menų sąvoką. 4) Išsiaiškinti būdingiausiais moks-
leivių paprastųjų trupmenų sampratos klaidas.
5) Pateikti prielaidas apie moksleivių paprastųjų
trupmenų sampratos klaidų prigimtį.

Šiame straipsnyje pateiktas sąvokos suvo-
kimo tikrinimo modelis ir konkrečios sąvokos
supratimo analizė yra indėlis į negausius šios
problemos tyrimus ir vienas pirmųjų pavyzdžių,
kaip tarptautinė duomenų bazė galėtų būti

panaudojama tirti moksleivių mokymosi rezultatus, atlikti būdingų klaidų analizę ir tobulinti didaktines sistemas.

Tyrimo metodika

Lietuvos keturiolikmečių moksleivių paprastosios trupmenos supratimą ištirsime pagal TIMSS tyrimo¹ paprastųjų trupmenų užduočių sprendimo rezultatus. Tyrimo imties sudarymo, reprezentatyvumo metodikos ir statistikų duomenys pateikiami atskirame leidinyje (TIMSS, 2000), todėl čia jų atskirai neaptarsime. TIMSS tyrime 1995 ir 1999 metais tirta 2500 moksleivių iš 150 Lietuvos mokyklų. Kai kurios šiame straipsnyje aptariamos užduotys tyrime dalyvavusių šalių susitarimu neskelbiamos, todėl, laikydamiesi konfidencialumo, jas tik aprašysime.

Sąvokų supratimo tikrinimo modelis

Šiame straipsnyje taikomą sąvokos supratimo tikrinimo modelį sudarėme remdamiesi sąvokų formavimosi proceso nuoseklumu (Arends, 1998) ir modelio žingsnius atitinkančiomis užduotimis hierarchiškai tikrinome sąvokos supratimą. Sąvokos supratimą tikriname laipsniškai, išskirdami tris supratimo lygmenis: deklaratyviausias, procedūrinis ir konceptualiausias žinias.

Pateikiame sąvokų supratimo tikrinimo modelį, kuris sukonstruotas kaip tam tikra užduočių struktūra, kurią sudaro užduočių rinkinys su apibrėžta tikrinimo paskirtimi, pagal kurio sprendimo rezultatus galima spręsti apie sąvokos supratimo gilumą.

Tikrinant, kaip moksleivis giliai supranta sąvoką, siūlome laipsniškai išsiaiškinti, ar jis geba:

- a) pavadinti, apibūdinti ir atpažinti sąvoką;
- b) sukurti pavyzdį ir kontrpavyzdį;
- c) grafiniais modeliais (vaizdiniais modeliais, diagramomis) pavaizduoti sąvoką;
- d) sąvoką, pavaizduotą (išreikštą) vienu būdu, pavaizduoti (išreikšti) kitu būdu;
- e) atpažinti įvairias sąvokos prasmes ir interpretacijas;
- f) nustatyti sąvokos savybes ir atpažinti esminius požymius, būdingus sąvokai;
- g) palyginti ir supriešinti sąvokas;
- h) sieti artimas sąvokas;
- i) sąmoningai taikyti sąvokas.

Šis sąvokos supratimo tikrinimo modelis yra koncepcinis, ne konstrukcinis. Siūlomas modelis nereiškia, kad tikrinant sąvokos supratimą turi būti tiek uždavinių, kiek modelyje yra žingsnių, ar pan. – kai kuriomis užduotimis galima patikrinti iš karto kelias sąvokos supratimo pakopas. Modelyje išvardytos sąvokos supratimo pakopos atitinka tvirtai susiformavusio sąvoką moksleivio esminius gebėjimus ir leidžia nustatyti tipines supratimo klaidas.

Iš visų TIMSS tyrime naudotų užduočių išskyrėme tas užduotis, kurios labiausiai atitinka modelio žingsnius ir kuriomis galima nustatyti, kaip giliai Lietuvos moksleiviai supranta paprastosios trupmenos sąvoką. Moksleivių paprastosios trupmenos supratimą analizavome pagal Lietuvos keturiolikmečių TIMSS tyrimo paprastųjų trupmenų užduočių sprendimo rezultatus. Šiai analizei naudojome TIMSS studijos užduotis, skirtas aritmetinio raštingumo tyrimui. Iš viso duomenų bazėje yra 51 užduoties, skirtos skaičiaus jausmo, skaičiaus sampratos, skaičių savybių ir veiksmų, skaičių sistemos sampratos, sprendimo rezultatai. TIMSS tyrimo paprastųjų trupmenų užduotis parinkome ir panaudojome suskirstę į tris gru-

¹ TIMSS – trečioji traptautinė matematikos ir gamtos mokslų studija, kurioje dalyvavo ir Lietuvos moksleiviai, vyko 1995 metais, pakartota 1999 metais. Verifikaciją bus galima papildyti naujais TIMSS duomenimis, jie paskelbti 2004 metų pabaigoje.

pes pagal tai, kaip jos atitinka sąvokos formavimosi supratimo pakopas: deklaratyviasias, procedūrinės ir konceptualiasias žinias.

Sąvokos pasirinkimas supratimui tikrinti

Matematikos mokymosi pagrindas yra matematikos sąvokų supratimas: tik giliai sąvokas suprantantis moksleivis sąmoningai mokysis su šia sąvoka susijusių matematinių procedūrų, kitų sąvokų ir jų ryšių. Šiame straipsnyje analizuoti pasirinkome paprastosios trupmenos sąvokos supratimą. *Paprastosios trupmenos sąvoka* skirtina prie jungiamųjų sąvokų, todėl gilus ir integruotas (susietasis) jos supratimas yra ypač svarbus mokantis kitų sąvokų.

Intuityvioji paprastųjų trupmenų samprata pradedama formuoti jau pradinėje mokykloje; ji formuojasi ir už mokyklos ribų. Ši samprata yra išankstinės žinios, kurios paprastai turi esminių trūkumų, o sisteminio paprastųjų trupmenų kurso pradedama mokyti penktojoje klasėje. Trupmena yra pirmoji matematikos sąvoka, kurios mokantis sistemiškai 5 klasėje moksleiviams reikia peržengti *sinkretinį* ir *perkėlimo* slenkstį – paprastosioms trupmenoms negalioja mokiniams jau žinomi natūraliųjų skaičių palyginimo ir veiksmų su natūraliaisiais skaičiais algoritmai, nėra „gretimosios“ trupmenos, visiškai neįprasta šio amžiaus moksleiviams trupmenų sudėties taisyklė ir kt. Taigi mokydamasis paprastųjų trupmenų moksleivis turi nutolti nuo susiformavusių procedūrinių stereotipų – paprastųjų trupmenų sąvokai išmolti būtinas „mąstymo šuolis“, todėl svarbu patikrinti ir nustatyti, kokias išankstines žinias moksleiviai turi pradėdami mokyti sisteminio paprastųjų trupmenų kurso, ir kurie yra šių žinių trūkumai. Ne mažiau svarbu mokant šios sąvokos lygia greta tikrinti, kaip ši sąvoka formuojasi, ar nyksta išankstinių žinių trūkumai, ir koreguoti mokymąsi.

Deklaratyviosios žinios

Deklaratyviasias žinias tikrina tie uždaviniai, kuriuose reikia **pavadinti ir apibūdinti sąvoką, atpažinti ir sukurti pavyzdį arba kontrpavyzdį**. Iš TIMSS užduočių deklaratyviosioms žinioms tikrinti tinkamos trys užduotys – 1 užduotis (K1), 2 užduotis (I6) ir 3 užduotis (H8).

1 užduotis (K1²). Tikrinama išankstinė ir intuityvioji samprata. *Kuriamė skritulyje (iš keilių duotų) užtušuota tokia pati dalis kaip ir staciakampyje?*

Pirmojoje užduotyje, kurios sąlygoje pateikiami tik grafiniai trupmenų modeliai, reikia palyginti tokiu pavidalu pateiktas trupmenas. Teisingai ją atliko 68,8 proc. (1995 metais) ir 74,58 proc. (1999 metais) keturiolikmečių Lietuvos moksleivių. Pažymėsime, kad moksleiviai šią užduotį gali išspręsti nežinodami net pačios sąvokos pavadinimo, intuityviai, t. y. čia tikrinamos deklaratyviosios žinios, todėl tikėtina, kad šį uždavinį galėjo išspręsti ir tie moksleiviai, kurie turi netvirtą paprastosios trupmenos supratimą.

Sąvokos supratimui išsiaiškinti labai svarbu, ar moksleiviai gali sudaryti sąvokos objekto pavyzdį. Tiesiogiai tokios užduoties – „Parašykite bet kokią paprastąją trupmeną“ nebuvo, tačiau moksleivio gebėjimas sudaryti sąvokos objekto pavyzdį su papildoma sąlyga tikrinamas antrąja užduotimi. Teisingai išspręsti šį uždavinį galėjo moksleiviai, turintys formalių žinių apie paprastąją trupmeną.

2 užduotis (I6). Tikrinamos formaliosios žinios. *Užrašykite trupmeną, didesnę už 2/7.*

² Skliausteliuose nurodomi klasifikuoti TIMSS-95 užduočių numeriai.

Lentelė. 2 užduoties (I6) teisingų atsakymų struktūra

Atsakymo tipas	Teisingų atsakymų dalis iš 68,2 proc. teisingai pasirinkusių atsakymą
Trupmena, kurios skaitiklis didesnis už 2, o vardiklis lygus 7 (pvz., 3/7)	27,2
Trupmena 3/8	7,5
Trupmena 1/2	8,9
Kiti teisingi atsakymai	24,6

Teisingai atsakė (didesnę už 2/7 trupmeną parašė) 68,2 proc. moksleivių 1995 metais, o panašią užduotį 1999 metais – 53,69 proc. moksleivių. Tačiau iš teisingai 1995 metais išsprendusiųjų (žr. lentelę) tik 27,2 proc. moksleivių parašė trupmeną, kurios skaitiklis didesnis už 2, o vardiklis – septynetas (pvz., 3/7). Aki vaizdu, kad tokį šio uždavinio atsakymą gavo tie, kurie sėkmingai pritaikė formaliąsias paprastųjų trupmenų žinias.

Dalis moksleivių (7,5 proc.) kaip didesnę už 2/7 trupmeną nurodė tris aštuntąsias: prie skaitiklio ir vardiklio pridėjo po vienetą. Toks atsakymas TIMSS tyrime buvo formaliai įskaitytas kaip teisingas, tačiau šį atsakymą parašę moksleiviai priskirtini prie tų, kurie trupmenos kaip visumos nesuvokia – jiems paprastoji trupmena yra du skirtingi skaičiai: skaitiklis ir vardiklis. Padidinę ir skaitiklį, ir vardiklį, jie pritaikė natūraliesiems skaičiams būdingą požymį, t. y. jie nesuvokia trupmenos kaip vieną skaitinę reikšmę turinčio skaičiaus, todėl galime teigti, kad šios dalies moksleivių paprastosios trupmenos samprata netvirta, jie negali atlikti teigiamojo perkėlimo. Visiškai aiški ir šio trūkumo priežastis – neigiamasis perkėlimas (Gage, 1994). Peršasi išvada, kad paprastąją trupmeną giliai suvokia tik 27,2 procento moksleivių³. Panašią užduotį 1999 metais, minėjome,

teisingai išsprendė dar mažiau (53,69 proc.) moksleivių. Tačiau atsakymų pasiskirstymas nebuvo koduojamas, todėl plačiau pakomentuoti atsakymų negalime.

Moksleivio deklaratyviają paprastosios trupmenos sampratą iliustruoja gebėjimas atpažinti pavyzdį arba kontrpavyzdį. Prie tokių užduočių priskyrėme 3 užduotį (H8). Šia užduotimi taip pat matuojamas sąvokos prasmės suvokimas kaip supratimo pagrindas.

3 užduotis (H8) – trupmenos sąvokos pavyzdžio sudarymo uždavinys. *Duoti keturi to paties kvadrato padalijimo į kelias dalis, iš kurių kelios užtušotos, variantai. Mokiniais reikėjo pasirinkti kvadratą, kurio 2/3 užtušuota.*

Iš atsakymų pasiskirstymo matyti, kad mūsų moksleiviai sieja paprastųjų trupmenų sąvoką su objekto dalijimu į lygias dalis, nes tokius atsakymų variantus pasirinko apie 80 proc. moksleivių. Tačiau teisingą atsakymą 1995 ir 1999 metais nurodė atitinkamai tik 42,1 proc. ir 47,05 proc. moksleivių. Tai tie moksleiviai, kurie supranta 2/3 prasmę: kvadrato, padalyto į tris lygias dalis, turi būti užtušotos dvi dalys. Daug moksleivių (43,1 proc.) manė, kad kvadratas turi būti padalytas į penkias (!?) dalis (sudėjo dvejų trečiųjų skaitiklį ir vardiklį) ir užtušotos dvi dalys. Toks atsakymo pasirinkimas rodo, kad moksleiviai nesupranta paprastosios trupmenos kaip dalies–visumos santykio, ne-

³ Pažymėtina, kad 13,1 proc. moksleivių šios užduoties net nebandė spręsti.

suvokia prasminių skaitiklio ir vardiklio ryšių. Čia vėl susiduriame su ta pačia trupmenos supratimo klaida – skaitiklio ir vardiklio reikšmės ir apskritai paprastosios trupmenos simbolio prasmės supratimo trūkumu. Taigi daugiau negu pusė moksleivių tvirtos sampratos neturi. Tikėtina, kad taip atsitinka dėl vyraujančios mokytojų tradicinės didaktinės programos – skatinimo įsiminti algoritmus (Būdienė, 1999), kuri skatina vien mechaninį įsiminimą, o tam savo ruožtu reikia daugelio pakartojimų⁴. Jei tai daroma nepakankamai ir nekoreguojant, atgaminant mechaniškai įsimintą ir nesuprastą medžiagą, kyla didelių klaidų (Butkienė, Kepalaitė, 1996).

Išvada

Daugelis moksleivių (apie 50 proc.) nepakankamai giliai suvokia paprastųjų trupmenų ir objekto dalijimo į lygias dalis ryšį; nesupranta trupmenos simbolio prasmės, turi klaidingai susiformavusį trupmenos vaizdinį; trupmenos nesuvokia kaip vientiso skaičiaus. Galima tvirtinti, kad pusė moksleivių susiformavo klaidingą arba silpną trupmenos vaizdinį.

Procedūrinės žinios

Sąvokos procedūrinės (operacinės⁵) sampratos gyliui nustatyti skiriama modelio dalis, kuria tikrinami šie moksleivių gebėjimai:

⁴ Į tiriamųjų moksleivių mokytojų anketos klausimą „Ar tiriamoje klasėje mokėte ko nors, kas padėtų moksleiviams atlikti panašias su šia tema (*trupmenomis*) susijusias užduotis?“, neigiamai atsakė 76,4 proc. mokytojų, tuo pačiu net 85 proc. mokytojų teigiamai atsakė į klausimą „Ar šiais metais moksleiviai gali susidurti su šia tema ne mokykloje?“

⁵ *Operacija* čia suprantama kaip tam tikras manipuliavimas objektais arba jų atspindžiais sąmonėje (pagal Piaget apibrėžimą; atitinka Tennyson procedūrinės žinias).

- a) ar moka trupmenos sąvoką pavaizduoti grafiniais modeliais;
- b) ar moka sąvoką, pavaizduotą vienu būdu, pateikti kitu būdu;
- c) ar atpažįsta įvairias sąvokos prasmes ir interpretacijas.

Minėjome, kad procedūrinės žinios yra tiesiogiai susijusios su moksleivio gebėjimu atpažinti sąvoką. Šiuos moksleivio gebėjimus patikrinsime 4 (A1), 5 (F12), 6 (N19) užduotimis. Norint teisingai atlikti šias užduotis, moksleiviui reikia suprasti pagrindinius paprastosios trupmenos sąvokos požymius. Procedūrinė (operacinė) sąvokos samprata akivaizdi, jei moksleivis geba laisvai manipuliuoti įvairiomis sąvokos išraiškomis.

Moksleivių gebėjimas atpažinti įvairias trupmenos sąvokos interpretacijas tikrinamas 4 užduotimi. Šiuo uždaviniu nustatomi skaitinio ir vaizdinio trupmenos interpretavimo gebėjimai ir šių išraiškų ryšio suvokimas.

4 užduotimi (A1) tikrinamas trupmenos sąvokos interpretavimas. *Stačiakampyje, suskirstytame į lygius kvadratus, kurių dalis užtušuota, pildyti užtušavimą iki duotos trupmenos reikšmės.*

Šią užduotį teisingai atliko tiek 1995 metų, tiek 1999 metų tyrimuose šiek tiek mažiau negu pusė moksleivių (atitinkamai 45,9 proc. ir 41,6 proc.). Iš klaidingų atsakymų analizės (pasirenkamųjų atsakymų užduotis) matyti, kad didelė moksleivių dalis papildė užtušavimą iki kvadratikų skaičiaus, lygaus duotos trupmenos skaitikliui (16,2 proc. ir 21,05 proc. atitinkamai 1995 ir 1999 metais) arba lygaus duotos trupmenos vardikliui (14,7 proc. ir 16,6 proc. atitinkamai 1995 ir 1999 metais). Tą pačią problemą nustatėme jau ir ankstesnėje tyrimo dalyje. Taigi ši klaida priskirtina stabilioms klaidoms, kurias nuolat daro ne mažiau kaip trečdalis moksleivių. Klaida kyla iš neteisingo trup-

menos skaitiklio ir vardiklio prasmės suvokimo, taigi ir pačios trupmenos suvokimo.

Penktąją užduotimi tikriname, ar trupmeną, pavaizduotą vienu būdu, moksleivis moka palyginti su trupmena, išreikšta kitu būdu, – čia grafinis trupmenos vaizdinys turi būti palyginamas su skaitine išraiška. Prieš tai reikia palyginti skaitines išraiškas tarp savęs, bet šiame uždavinyje jos labai paprastos – tarsi valandos ketvirčiai laikrodyje.

5 užduotimi (F12) tikrinama sąvokos vaizdinių transformacija. Kuri skritulio dalis užtušuota?

Šią užduotį abiejuose tyrimuose teišsprendė trečdalis moksleivių (1995 metais – 30,9 proc., 1999 metais – 32,27 proc.).

Grafinio vaizdavimo gebėjimai – ar mokinys yra susidaręs sąvokos grafinius-regimuosius⁶ ir minties simbolinius vaizdinius, ar šiuos vaizdinius sieja tarpusavyje, ar sugeba juos pritaikyti – tikrinami 6 užduotimi (N19). Joje skaitinę trupmenos išraišką prašoma pakeisti grafine.

6 užduotimi (N19) tikrinami sąvokos grafinio vaizdavimo gebėjimai. Užtušuokite $5/8$ stačiakampio (stačiakampis padalytas į 24 kvadratus).

Tyrimo metu ir iki jo naudotuose vadovėliuose⁷ ši procedūra nėra aiškinama, o intuityvaus vaizdinio suvokimo išspręsti šį uždavinį, kitaip negu 1 uždavinį, neužtenka. Teisingai iš-

sprendė 1995 metais – 29,5 proc., 1999 metais – 26,6 proc. moksleivių.

Kokių įgūdžių reikia moksleiviui teisingai išspręsti šį uždavinį? Pirmiausia reikia suvokti paprastosios trupmenos prasmę, t. y. žinoti, kad $5/8$ yra penkios dalys objekto, padalyto į aštuonias lygias dalis. Vadinasi, moksleivis turi turėti objekto dalijimo siejimo su trupmenos sąvoka įgūdžių ir dalies–visumos santykio sampratą. Antra, reikia nustatyti, kiek langlelių sudaro 24-ių aštuntadalių; taigi reikia įvesti matą. Nors tai ir nelengvas uždavinys, tačiau mažas teisingai atsakusių moksleivių procentas rodo, kad dviejų trečdalių keturiolikmečių moksleivių trupmenos grafinio-vaizdinio suvokimo yra esminių trūkumų. 6 užduoties sprendimo rezultatų pastovumas reiškia, kad ši supratimo klaida yra stabili ir visuotinė (apibendrinant visai Lietuvos keturiolikmečių populiacijai). Klaidai koreguoti reikia papildomų daktinių pastangų: šie įgūdžiai lavinami diskrečiaisiais manualiniais ir grafiniais modeliais.

Išvada

Penktos šeštos klasių vadovėliuose, iš kurių mokėsi tiriama grupė (Nurk, Telgma, 1994), trupmenų grafinis reiškinys buvo pateikiamas tik kaip teorinių samprotavimų pavyzdys; grafinių modelių vadovėlyje nepakanka (keturi brėžiniai). Moksleivių savarankiškam darbui skirtų tokių užduočių minimumuose vadovėliuose apskritai nėra. Mokomojoje programoje apie vaizdinius ir manualinius trupmenų modelius taip pat neužsimenama, o jų skaičius vadovėliuose leidžia tvirtinti, kad nėra kryptingai formuojamas trupmenos grafinis vaizdinys⁸. Todėl moksleivių įgūdžiai, susiję su grafiniais

⁶ Anot Brunerio (1966), sąvokų formavimasis turi tris pakopas – veiksmų, vaizdų, simbolių.

⁷ Tyrimas atliktas 1995 ir 1999 metais, tirtoji populiacija trupmenų buvo mokoma iš Nurkas ir Telgma (1994) matematikos vadovėlio. Dabartiniame penktos klasės vadovėlyje (Cibulskaitė, Stričkienė 1996 ir kartot. leidimai) siūloma kita trupmenų mokymo metodika. Šio straipsnio autorė yra ir minimo vadovėlio konsultantė.

⁸ Kol kas negalime įvertinti, kaip intensyviai mokytojai per pamokas naudojami grafiniais ir manualiniais trupmenų modeliais – tai reikėtų tirti atskirai.

trupmenų modeliais (išskyrus skaičių tiesės atveį), laikytini netiesiogiai įgytais arba savaiminiais. Remdamiesi 1995 metų tyrimų duomenų analize, rekomendavome naujų pagrindinės mokyklos vadovėlių autorėms papildyti paprastųjų trupmenų didaktiką, kad sąvokos formavimasis natūraliai pereinėtų veiksmų, vaizdų ir simbolių stadijas (Bruneris, 1966). Taip būtų kryptingiau formuojama operacinė paprastosios trupmenos sąvokos samprata. Šios didaktikos poveikiui nustatyti reikia atlikti analogišką, kaip čia aprašomas, keturiolikmečių moksleivių, besimokančių pagal naujuosius vadovėlius, sąvokų supratimo tyrimą.

Konceptualiosios žinios

Konceptualiųjų sąvokos žinių tikrinamuju modeliu tikrinami šie gebėjimai:

- nustatyti sąvokos savybes ir atpažinti esminius, lemiamus sąvokos požymius;
- palyginti ir supriešinti sąvokas;
- susieti artimas sąvokas.

TIMSS tyrime šiuos gebėjimus leidžia atskleisti 6 (N19), 7 (D9) ir 8 (M4), 9 (Q8), 10 (G5), 11 (V3) užduotys.

Šeštoji užduotis, kurią analizavome pirmiau, yra kompleksinė ir tikrina sąvokos savybių ir esminių sąvokos požymių supratimą – ji atskleidžia konceptualiųjų trupmenos supratimą. Ankstesnė 6 užduotis analizė parodė, kad ją teturi apie trečdalis moksleivių.

Kaip moksleiviai geba palyginti trupmenas, tikrinama 7 (D9) ir 8 (M4) užduotimis.

7 užduotimi (D9) tikrinama, kaip moksleiviai geba palyginti trupmenas. *Kuri iš šių trupmenų mažiausia $1/6$ $2/3$ $1/3$ $1/2$?* Teisingų atsakymų procentas: 1995 m. – 49,3 proc., 1999 m. – 51,24 proc.

8 užduotimi (M4) tikrinama, kaip moksleiviai geba palyginti trupmenas. *Kuri trupmena didžiausia: $4/5$ $3/4$ $5/8$ $7/10$?* Teisingų atsakymų procentas: 1995 m. – 28,8 proc. (1999 m. buvo pakeista užduotis, todėl negalima palyginti).

Abi šias užduotis galima išspręsti keliais būdais. Moksleivis, gerai suprantantis trupmenos prasmę, susivoktų, kad iš trupmenų su skirtingais vardikliais, kurių skaitikliai vienetai, mažiausiosios vardiklis yra didžiausias. Kitas būdas – nustatyti bendrą vardiklį ir palyginti trupmenas. Galima trupmenas palyginti ir jas pavaizdavus grafiniais modeliais arba skaičių tiesės taškais. Taigi moksleiviai gali taikyti formalią taisyklę arba, jei turi gilų trupmenos vaizdinį, įsivaizduoti arba nubrėžti vieneto, daikto, rinkinio dalis. Šiems metodams realizuoti moksleivis turi būti suvokęs esminį dalyką – objekto *dalies* sampratą, kuri ir yra paprastųjų trupmenų prasmės suvokimo pagrindas.

Deja, mažiausiąją trupmeną 7 užduotyje teisingai nurodė tik pusė moksleivių. Manydami, kad mažiausia yra ta trupmena, kurios vardiklis mažiausias, klaidingą atsakymą 1995 metais pasirinko 32,1 proc. moksleivių, o 1999 metais – 30,93 proc. Tokių rezultatų priežastis yra natūraliųjų skaičių lyginimo taisyklių perkėlimas paprastosioms trupmenoms lyginti, rodantis negilų paprastosios trupmenos sąvokos supratimą.

Aštuntosios užduoties, kuri buvo spręsta tik 1995 metais, neteisingų atsakymų pasiskirstymas rodo, kad moksleiviai didžiausią (klaidingai) nurodė tą trupmeną, kurios arba ir skaitiklis, ir vardiklis iš visų didžiausi (neteisingai pasirinko 32,4 proc.) arba abu mažiausi (neteisingai pasirinko 29,4 proc.).

Taigi tik pusė Lietuvos keturiolikmečių moksleivių teisingai mano, kad trupmenos vardikliui didėjant, o skaitikliui nesikeičiant, trupmena mažėja; daugiau negu trečdalis įsitikinę priešingai ir, deja, klaidingai.

Artimų sąvokų siejimo ir palyginimo gebėjimas tikrinamas 9 užduotimi (Q8). Tikrinama, ar moksleiviai gali sieti artimas sąvokas – palyginti paprastųjų ir dešimtinių trupmenų sąvokas.

9 užduotimi (Q8) tikrinamas sąvokų palyginimas ir supriešinimas. Kurioje eilutėje skaičiai surašyti nuo mažiausio iki didžiausio?

0,345	0,19	0,8	1/5
0,19	1/5	0,345	0,8
0,8	0,19	1/5	0,345
1/5	0,8	0,345	0,19

1995 metais šį uždavinį išsprendė 39,7 proc. moksleivių (1999 metais šis uždavinys nebuvo sprendžiamas). Rezultatai leidžia teigti, kad ne daugiau kaip pusė moksleivių geba susieti artimas sąvokas – paprastąsias ir dešimtaines trupmenas.

Sąmoningas sąvokos taikymas⁹ tikrinamas 10 ir 11 užduotimis.

10 užduotimi (G5) tikrinamas sąmoningas sąvokos taikymas. Duoti pirmą ir antrą pusmetį gimusių klasės moksleivių skaičiai. Prašoma išreikšti paprastąją trupmeną pirmą pusmetį gimusiųjų skaičių. Teisingų atsakymų procentas: 1995 m. – 33,0 proc., 1999 m. – 39,48 proc..

11 užduotimi (V3) tikrinamas sąmoningas sąvokų taikymas. Apie dažų spalvų mišinį. Nustatyti dalies ir visumos santykį. Teisingų atsakymų procentas: 1995 m. – 14,6 proc., 1999 m. 23,21 proc.

Ir 1995 metais, ir 1999 metais 11 uždavinį išsprendė tik maža dalis moksleivių. Lygiai tą pačią klaidą (61,6 proc. 1995 metais ir 40,44 proc. 1999 metais) rodo abu tyrimai – trupmena moksleiviams yra ne dalies–visumos, o dalies–dalies santykis. Lygiai ta pati klaida kartojosi ir sprendžiant 10 užduotį. Šį uždavinį klaidingai sprendusių moksleivių daugiau negu išsprendusių (40,0 proc. 1995 metais ir 38,55 proc. 1999 metais).

Remdamiesi šioje straipsnio dalyje analizuotų užduočių rezultatais ir klaidų analize ga-

lime teigti, kad didelė dalis moksleivių (apie 40 proc.) paprastosios trupmenos tvirtai nesuvokia dėl konceptualiųjų žinių trūkumo. Stabili klaida – trupmenos, kaip dalies–visumos santykio nesupratimas.

Išvados

Šios išvados suformuluotos išanalizavus keturiolikmečių moksleivių paprastųjų trupmenų supratimo uždavinių sprendimą. **Pagrindinė išvada – ne mažiau kaip pusė Lietuvos moksleivių neturi gilios paprastosios trupmenos sampratos.**

Moksleivių paprastosios trupmenos sąvokos supratimo klaidų šaltiniai:

- neturi visumos, vieneto, rinkinio dalies sampratos;
- silpni objekto dalijimo į dalis įgūdžiai, klaidingai suformuotas trupmenos vaizdinys, trupmena nesuvokta kaip vientisas reikšmę turintis skaičius;
- tik mažiau kaip pusė Lietuvos moksleivių teisingai mano, kad trupmenos vardikliui didėjant trupmena mažėja, o daugiau negu trečdalis įsitikinę priešingai ir, deja, klaidingai;
- nesupranta skaitiklio ir vardiklio prasmės, jų prasminių ryšių ir apskritai paprastosios trupmenos simbolio prasmės;
- neturi trupmenos kaip dalies–visumos santykio supratimo;
- natūraliųjų skaičių savybes perkelia paprastosioms trupmenoms.

Diskusija

Kodėl tik apie pusę moksleivių aiškiai suvokia paprastosios trupmenos, kaip savarankišką reikšmę turinčio skaičiaus, prasmę? Paprastųjų trupmenų, kaip ir visų kitų matematikos sąvokų, įvedimui vadovėliuose, iš kurių mokėsi

⁹ Plačiau apie paprastosios trupmenos sąvokos taikymo uždavinių sprendimą kiekybinio raštingumo ir gebėjimo atlikti trupmenų veiksmus kontekste jau esame rašę (Būdienė, 1998).

tirtoji grupė, skiriama mažai vietos. Nepakankamai subalansuota medžiaga ir įvairių suvokimo tipų ir pateikimo būdų prasme – vyrauja formalusis simbolinis, algebrizuotas pateikimo būdas. Šią disproporciją rodo ir tai, kad uždavinių grupę, skirtą tikrinti paprastųjų trupmenų veiksmų išmokimą, kuriems tereikia įsiminti ir pritaikyti algoritmą, moksleiviai sprendžia geriau. Matėme, kad aukštesnio, nealgoritminio, lygmens mąstymo įgūdžiai susiformavę nepakankamai.

Didesnė trupmenos interpretavimo alternatyvų įvairovė – tolydieji (pvz., pyrago, skritulio dalijimo), diskretieji (pvz., sągų rinkinys), grafiniai ir manualiniai modeliai, skaičių vaizdavimas spindulyje, yra būdas įveikti trupmenų suvokimo kliūtis. Naujajame N. Cibulskaitės ir M. Stričkienės 5 klasės matematikos vadovėlyje (1996), kurio konsultantė yra ir šio straipsnio autorė, žymus poslinkis vaizdinio ugdymo link. Tačiau dar mažoka užduočių, skirtų mokymuisi sąvokos atradimo, tyrimo būdu. Svarbu, kad mokytojai netaupytų mokomojo laiko sąvokų mokymosi sąskaita, nes nepakankamai suprastos sąvokos yra stabdys naujų sąvokų mokymuisi.

Šiuo metu diegiamas naujasis matematikos vadovėlių komplektas. Prasminga būtų atlikti analogišką moksleivių, kurie mokėsi iš naujųjų vadovėlių, paprastųjų trupmenų suvokimo tyrimą, ir pasinaudoti naująja TIMSS duomenų baze, kuri taps prieinama jau 2004 pabaigoje. Toks longitudinalinis sąvokos sampratos tyrimas leistų nustatyti moksleivių sąvokos sampratos dinamiką ir kokią įtaką ugdymo turinio, mokomųjų priemonių kaita turėjo mokymosi rezultatams.

Metodinės rekomendacijos

Šiame straipsnyje pasiūlytas matematikos sąvokų supratimo tikrinimo modelis, hierarchiškai tikrinantis sąvokos susiformavimo gilumą,

kuriuo siūlytume naudotis mokytojams, tikrinant matematinių sąvokų supratimą. Šis sąvokos supratimo tikrinimo modelis yra koncepcinis, o ne konstrukcinis: tikrinant sąvokos supratimą nebūtinai turi būti tiek uždavinių, kiek yra tikrinimo taškų, nes kai kuriomis užduotimis galima patikrinti iš karto kelias sąvokos supratimo pakopas. Modelyje išvardytos sąvokos supratimo pakopos rodo sąvokos formavimo si hierarchiją: nuo negilaus iki tvirto sąvokos supratimo, ir leidžia nustatyti tipinius supratimo klaidų šaltinius.

Kadangi šio tyrimo imtis leidžia apibendrinti rezultatus visiems Lietuvos 7–8 klasių moksleiviams, rekomenduotume sukurti ir įdiegti matematinių sąvokų mokymą ir mokymąsi koreguojančias mokomąsias programas.

Tolesnių tyrimų prielaidos

Manytume, kad silpną paprastųjų trupmenų sąvokos supratimą galėjo lemti šios pedagoginės psichologinės prielaidos:

- vyraujanti („paveldėta“) *tradicinė* matematikos mokymo koncepcija, kuriai būdingas požiūris, kad mokant matematikos svarbiausia yra skaičiavimo įgūdžių lavinimas ir mechaninis taisyklių ir algoritmų įsiminimas;
- reproduktyviosios didaktikos vyravimas;
- programoje ir vadovėliuose sąvokų supratimui formuoti skiriama per mažai dėmesio ir mokomojo laiko;
- retroaktyvusis slopinimas;
- sąvokos saugojimo–išlaikymo pasyvumas;
- konceptualiųjų semantinių mokymo modelių naudojimo trūkumas;
- menka sąvokų grafinių ir manualinių modelių reprezentacijos įvairovė;
- metakognityviųjų ir reflektiviųjų mokymosi strategijų naudojimo trūkumas;

- situacinio ir kontekstinio mokymo trūkumas;
- mokomųjų pavyzdžių aukštesnio lygmens akomodavimui trūkumas;
- žinių asimiliacijos ir akomodacijos tikrinimo metodų trūkumas;
- formuojamojo vertinimo metodų trūkumas.

Šias silpno paprastųjų trupmenų sąvokos supratimo (modifikavus – ir kitų matematikos

sąvokų) galimas priežastis reikia papildomai tirti siekiant suprasti, pagerinti ir palengvinti moksleivių sąvokų formavimąsi, sukurti naujų supratimo matavimo instrumentų. Tokių tyrimų duomenys ir išvados būtų reikšmingos nacionalinių programų sudarytojams, vadovėlių autoriams, mokytojų rengėjams ir patiems mokytojams, planuojantiems savo pedagoginę veiklą ir siekiantiems atnaujinti individualią daktinę sąvokų formavimo programą.

LITERATŪRA

1. Arends R. I. Mokomės mokyti. Vilnius: Margi raštai, 1998.
2. Burns, J., Clift J., Duncan J. Understanding of understanding: Implications for learning and teaching // *British Journal of Educational Psychology*. 1991, 61, p. 279–289.
3. Bloom B. S. Krathwohl D. R. et al. Taxonomy of Educational Objectives. Handbook I. Cognitive domain. NY: Longman, 1956.
4. Bruner J. S. Toward a theory of instruction. New York: Norton Books, 1966.
5. Būdienė V. Mokytojų ir studentų matematikos mokymo nuostatų lyginamasis tyrimas // Lietuvos matematikų draugijos mokslo darbai, III tomas. Vilnius, 1999.
6. Būdienė V. Raštingumas ir matematinis raštingumas // *Mokykla*, 1998, Nr. 1-2, p. 20–25.
7. Būdienė V. Monitoringas ad hoc // *Mokykla*. 2000. Nr. 1.
8. Butkienė G. Kepalaitė A. Mokymasis ir asmenybės brendimas. Vilnius: Margi raštai, 1996.
9. Cibulskaitė N., Stričkienė M. Matematika ir pasaulis 5 klasei. Vilnius: TEV, 1996.
10. Gadamer H. G. Tiesa ir metodas. Vilnius: Baltos lankos, 1998.
11. Gardner H. Frames of Mind. New York: Basic Books, 1984.
12. Gage N. L., Berliner D. C. Pedagoginė psichologija. Vilnius: Alna Litera, 1994.
13. Helmstad G., Understanding of understanding // *Göteborg studies in Educational sciences* 134. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis, 1999.
14. Hiebert J., Carpenter T. P. Learning and teaching with understanding // *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* / Ed. D. Grouws. New York: Simon and Shuster. 1992. P. 65–101.
15. Keeves J. P. The World of School Learning. Hague: IEA, 1995.
16. Kulm G. (ed), Assessing Higher order Thinking in Mathematics. Washington, D.C: American Association for Advancement of Science, 1990.
17. Merrill M. D., Tennyson R. D. Teaching concepts: An instructional design guide. Englewood Cliffs, N. J.: Educational Technology, 1977.
18. TIMSS 1999, International Mathematics Report. Findings from IEA's Repeat of the Third International Mathematics and Science Study at the Eighth Grade. Chestnut Hill, MA: Boston College. 2000.
19. Nurkas E., Telgma A. Matematika 5. Kaunas: Šviesa, 1994.
20. Resnic L. B., Nesher P., Leonard F., Magone F., Peled I., Omanson S. F. Conceptual bases of arithmetic errors: The case of decimal fractions // *Journal for Research in Mathematics Education*. 1989, 20, p. 8–27.
21. Romberg T. A., Wilson T. Issues related to the Development of an Authentic Assessment. Albany: State University of New York Press. 1995. P. 1–18.
22. Piaget J. The psychology of intelligence. Littlefield, NJ: Adams, 1960.
23. Tennyson R. D., Cocchiarella M. J. An Empirically based Instructional design. Theory to Teaching Concepts // *Review of Educational Research*. 1986. 56(1), p. 40–71.

INQUIRY INTO UNDERSTANDING THE CONCEPT OF COMMON FRACTION AMONG LITHUANIAN STUDENTS

Virginija Būdienė

Summary

The article deals with the survey of understanding of a concept of common fraction among 14-year-old Lithuanian students. The model of concept understanding verification is introduced and used to analyze the survey data. Data from Third International Mathematics and Science Study (TIMSS) is used for analysis. The analysis of data, using the proposed model of verification of understanding of concepts, identi-

fies that less than 50 percent of 14-year old Lithuanian students perceive the concept of common fraction in a right way. The causes of the problem are analyzed in the article. Possible extensions of application area of the verification model are discussed.

Key words: understanding of concepts, concept understanding verification model, understanding of a concept of common fraction.

Įteikta 2004 09 30

Priimta 2004 11 15