Liet. matem. rink., T. 43, spec. nr., 581–585

Parabolinio-elipsinio uždavinio skaitinis sprendimas

Raimondas ČIEGIS (VGTU), Remigijus ČIEGIS (VU)
el. paštas: rc@fm.vtu.lt, remigijus.ciegis@vukhf.lt

1. Uždavinio formulavimas

Matematinės fizikos uždavinius, aprašomus antrosios eilės diferencialinėmis lygtimis dalinėmis išvestinėmis sąlyginai skirstome į tris pagrindines klases: hiperbolinio, elipsinio ir parabolinio tipo uždavinius. Daugelį matematinių modelių galime ištirti, išskyrę vyraujantį procesą ir nustatę jo tipą. Tai ypač svarbu sudarant efektyvius uždavinio skaitinius sprendimo metodus, kadangi kiekvieno pagrindinio tipo uždavinio sprendimui yra sukurta daug labai efektyvių specialių metodų.

Tačiau daug taikomųjų matematinių modelių jau negali būti klasifikuojami naudojant tik šias tris klases. Atskirose uždavinio apibrėžimo srityse lygties tipas gali keistis. Todėl aktualiu skaičiavimo matematikos uždaviniu yra naujų skaitinių algoritmų, skirtų netradicinių matematinių modelių sprendimui, kūrimas.

Skysčių tekėjimo poringose terpėse matematiniai modeliai dažnai aprašomi netiesinėmis diferencialinėmis lygtimis, kurios yra parabolinio tipo skysčiu dar neprisotintoje terpėje, ir elipsinio tipo, kai terpė yra pilnai užpildyta skysčiu. Vykstant šiam procesui sritis ribojantis paviršius irgi juda [3]. Naujas tokių uždavinių skaitinio sprendimo algoritmas yra pateiktas [2] darbe.

Mūsų tikslas yra ištirti pasiūlytojo algoritmo konvergavimo sąlygas ir įvertinti iteracinio metodo konvergavimo greitį, kai sprendžiamas tiesinis modelinis uždavinys.

Srityje $Q = \Omega \times [0, T]$ nagrinėkime parabolinio-elipsinio tipo kraštinį uždavinį:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \sum\limits_{j=1}^{3} \dfrac{\partial}{\partial x_j}\Big(k_j \dfrac{\partial u}{\partial x_j}\Big) - q(t)u + f(X,t), \quad (X,t) \in Q_{par}, \\ -\sum\limits_{j=1}^{3} \dfrac{\partial}{\partial x_j}\Big(k_j \dfrac{\partial u}{\partial x_j}\Big) + q(t)u = f(X,t), \quad (X,t) \in Q_{elip}, \\ u(X,t) = \mu_0, \quad (X,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \\ u(X,0) = u_0(X), \quad X \in \Omega = [0,1]^3, \end{cases}$$

čia padarėme prielaidą, kad

$$Q = Q_{par} \cup Q_{elip}, \quad Q_{elip} = [a,b]^3 \times [0,T], \quad 0 < a < b < 1\,.$$

Koeficientai k_j yra teigiamos konstantos, $q(t) \geqslant 0$.

2. Neišreikštinė baigtinių skirtumų schema

Srityje Q apibrėžkime tolygųjį tinklą $Q_{h\tau}$. Šio tinklo taškuose yra apibrėžtos funkcijos $U_i^n = U(X_i, t^n)$. Pažymėkime diskrečiuosius operatorius:

$$A_j U^n = \left(k_j U^n_{x_j}\right)_{\bar{x}_j} - q_j(t^n) U^n + f_j(X, t^n),$$

čia panaudojome standartinius vienpusių baigtinių skirtumų operatorius.

Diferencialinį uždavinį aproksimuojame tokia modifikuota neišreikštine Eulerio schema:

$$c(X)\,\frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} = \sum_{j=1}^{3} A_j U^{n+1}, \tag{1}$$

čia $c(X)$ yra apibrėžtas taip:

$$c(X) = \begin{cases} 1, & \text{jei } \ X \in \Omega_{par}, \\ 0, & \text{jei } \ X \in \Omega_{elip}. \end{cases}$$

Kiekviename laiko sluosnyje sprendžiame tiesinių lygčių sitemą

$$\left(\frac{c}{\tau}\,\mathbf{I} - \sum_{j=1}^{3} \widetilde{A}_j\right) U^{n+1} = F^{n+1}\,,$$

kurią kompaktikškai galime užrašyti taip:

$$\mathbf{A}\,U^{n+1} = F^{n+1}\,.$$

Matrica $\mathbf{A}$ yra simetrinė, nesunkiai gauname tokius jos spektrinius įverčius:

$$\left(\frac{meas\,|\Omega_{par}|}{\tau} + \lambda_{A,\min}\right)\mathbf{I} \leqslant \mathbf{A} \leqslant \left(\frac{meas\,|\Omega_{par}|}{\tau} + \lambda_{A,\max}\right)\mathbf{I}\,.$$

Tokias sistemas galime spręsti įvairiais iteraciniais metodais, pavyzdžiui jungtinių gradientų metodu [1]. Iteracijų skaičius esminiai priklauso nuo parametro τ ir paraboliškumo srities dydžio.

3. Stabilizuojančios pataisos schema

Gerai žinoma, kad daugiamačius parabolinio tipo uždavinius ypač efektyviai sprendžiame naudodami išskaidymo schemas [4]. Todėl diferencialinį uždavinį aproksimuojame tokia modifikuota *stabilizuojančios pataisos* išskaidymo schema [2]:

$$\begin{cases} \dfrac{U_s^{n+1/3} - U_s^n}{\tau} = A_1 U_s^{n+1/3} + A_2 U_s^n + A_3 U_s^n, \\[2mm] \dfrac{U_s^{n+2/3} - U_s^{n+1/3}}{\tau} = A_2 U_s^{n+2/3} - A_2 U_s^n, \\[2mm] \dfrac{U_s^{n+1} - U_s^{n+2/3}}{\tau} = A_3 U_s^{n+1} - A_3 U_s^n, \end{cases} \tag{2}$$

čia s yra iteracijos numeris, o pradinė sąlyga taške $t = t^n$ yra *perskaičiuojama* po kiekvienos iteracijos:

$$U_{s+1}^n = \begin{cases} U^n, & \text{jei } X \in \Omega_{h,par}, \\ U_s^{n+1}, & \text{jei } X \in \Omega_{h,elip}, \end{cases}$$
$$U_0^n = U^n, \quad (X, t^n) \in Q_{h\tau}.$$

Stabilumo analizė

Tegul $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ yra diskrečiųjų operatorių $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, \widetilde{A}_3$ tikrinės reikšmės:

$$\lambda_j < 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Pažymėkime iteracinio artinio paklaidą:

$$Z_s^{n+1} = U_s^{n+1} - U^{n+1}, \tag{3}$$
$$Z_s^n = \begin{cases} 0, & \text{jei } X \in \Omega_{h,par}, \\ U_s^n - U^{n+1}, & \text{jei } X \in \Omega_{h,elip}. \end{cases} \tag{4}$$

3.1 teorema. *Stabilizuojančios pataisos baigtinių skirtumų schema* (2) *yra stabili, kai sprendžiame trimatį parabolinį-elipsinį uždavinį ir teisingas toks iteracinio artinio paklaidos įvertis*:

$$\|Z_s^{n+1}\| \leqslant q\,\|Z_{s-1}^{n+1}\|, \quad q < 1,$$

čia $\|\cdot\|$ yra diskrečioji L_2 norma.

Įrodymas. Nagrinėkime Furjė skleidinį:

$$Z_s^{n+1} = \sum_{i,j,m} q_{i,j,m}^{n+1}\, c_{i,j,m}\, W_{i,j,m},$$

čia $W_{i,j,m}$ yra matricos $\mathbf{A}$ tikriniai vektoriai, $q_{i,j,m}$ yra *augimo* arba *stabilumo* daugikliai

$$q_{i,j,m} = \frac{1 + \tau^2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3) - \tau^3\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(1 - \tau\lambda_1)(1 - \tau\lambda_2)(1 - \tau\lambda_3)}.$$

Kadangi $\lambda_j < 0$, tai gauname, jog nelygybės

$$|q_{i,j,m}| \leqslant q_1 < 1$$

visada yra teisingos. Iš (4) nesunkiai įrodome, kad norma $\|Z_s^n\|$ gali būti įvertinta tokiu būdu:

$$\|Z_s^n\| \leqslant q_2 \|Z_{s-1}^{n+1}\|, \quad q_2 \leqslant 1.$$

Tada, apjungę abu įverčius, įrodome reikiamą iteracinio metodo paklaidos nelygybę:

$$\|Z_s^{n+1}\| \leqslant q_1 \|Z_s^n\| \leqslant q_1 q_2 \|Z_{s-1}^{n+1}\|, \quad q = q_1 q_2 < 1,$$

kuri rodo, kad itearcinė seka konverguoja tiesiniu greičiu.

4. Skaičiavimo eksperimento rezultatai

Skaičiavimo eksperimente naudojome diskrečiuosius operatorius

$$A_j U^n = \left(U_{x_j}^n\right)_{\bar{x}_j} + f_j(X, t^n), \quad j = 1, 2, 3.$$

Elipsinis operatorius yra apibrėžtas srityje:

$$Q_{ell} = [0.4, 0.7] \times [0.4, 0.7] \times [0.4, 0.7] \times [0, T].$$

Funkcija $f(X,t)$ atitinka tikslų diferencialinio uždavinio sprendinį

$$u(X,t) = \exp(t) \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \sin(\pi x_3).$$

Iteracijų pabaigos požymis buvo

$$\Big\| \sum_{j=1}^{3} A_j U_s^{n+1} \Big\|_{\Omega_{h,elip}} \leqslant \varepsilon$$

arba

$$\left\| U_{s+1}^{n+1} - U_s^{n+1} \right\|_{\infty, \Omega_{h,elip}} \leqslant \varepsilon\tau.$$

Norėdami pagreitinti itearcijų konvergavimą, elipsinėje uždavinio apibrėžimo srityje $\Omega_{h,elip}$ naudojome parametrą τ_0, skirtingą nuo pagrindinio žingsnio τ.

1 lentelėje yra pateikti vidutiniai skaičiai iteracijų, kurias teko atlikti skaičiuojant *stabilizuojančios pataisos* schemos sprendinį viename laiko sluoksnyje. Uždavinys spręstas laiko intervale $[0, 0.5]$, o N pažymėjome tinklo taškų skaičių vienos koordinatės atžvilgiu.

1 lentelė. Vidutinis iteracijų skaičius

τ	$N = 20$	τ_0	$N = 40$	τ_0
0,1	15,8	0,005	26,2	0,002
0,05	14,35	0,006	26,5	0,002
0,025	12,85	0,007	24,3	0,0025

5. Išvados

Išnagrinėjome du skaitinius algoritmus, skirtus parabolinio-elipsinio uždavinio sprendimui. Apibendrinsime kiekvieno iš jų privalumus ir trūkumus. Pirmasis algoritmas kiekviename laiko sluoksnyje aproksimuoja visą uždavinį neišreikštine Eulerio schema, todėl tenka spręsti tiesinių lygčių sistemas, atitinkančias elipsinio uždavinio aproksimaciją visoje apibrėžimo srityje. Tokius skaičiavimus atliekame net ir tada, kai uždavinys visoje srityje yra parabolinio tipo. Darbe įvertintas gautosios tiesinių lygčių sistemos spektras. Parodyta, kad mažėjant laiko žingsniui τ, matricos sąlygotumo skaičius irgi mažėja, todėl atitinkamai mažėja iteracijų skaičius. Algoritmo privalumas yra tas, kad baigtinių skirtumų schema yra universali, jos savybės suderintos su atitinkamomis diferencialinio uždavinio savybėmis. Šią schemą rekomenduotina naudoti tada, kai elipsinio uždavinio apibrėžimo sritis jau yra pakankamai didelė. Tada pagrindinę skačiavimo kaštų dalį sudaro elipsinio uždavinio sprendimo kaštai. Realizuodami neišreikštinę Eulerio schemą galime naudoti efektyvius iteracinius algoritmus ir parinkti specialius matricos sąlygotumo skaičių mažinančius modifikatorius.

Antrasis algoritmas sudarytas panaudojant skaidymo schemų privalumus. Tokios schemos yra efektyviausios sprendžiant daugiamačius parabolinio tipo uždavinius. Pateikta stabilizuojančios pataisos metodo modifikacija, pritaikyta parabolinių-elipsinių uždavinių sprendimui. Įvertintas naujo iteracinio algoritmo konvergavimo greitis. Teorinius konvergavimo rezultatus iliustruoja skaičiavimo eksperimento rezultatai.

Literatūra

[1] R. Čiegis, *Diferencialinių lygčių skaitiniai sprendimo metodai*, Technika, Vilnius (2003).

[2] R. Čiegis, A. Papastavrou, A. Zemitis, Additive splitting methods for elliptic-parabolic problems, *Annalli del Universiteta di Ferrara*, Sez. VII, Sc. Mat. Vol. XLVI, 291–306 (2000).

[3] P.A. Forsyth, M.C. Kropinski, Monotonicity considerations for saturated-unsaturated subsurface flow, *SIAM J. Sci. Comput.*, **18**, 1328–1354 (1997).

[4] G.I. Marchuk, Splitting and alternating direction methods, in: *Handbook of Numerical Analysis* 1, North-Holland, Amsterdam (1990), pp. 197–462.

Numerical algorithms for one parabolic-elliptic problem

Raim. Čiegis, Rem. Čiegis

In this paper we solve numerically a parabolic-elliptic problem. Two finite difference schemes are proposed. The first scheme is a modification of the backward Euler algorithm and it requires to solve an elliptic problem at each time step. The spectral estimates of the obtained matrix are presented. The second scheme is a modification of the stability-correction scheme. This scheme is used as a classical splitting scheme in the parabolic region of the problem definition and as a new iterative algorithm in the elliptic part of the problem. We prove the convergence of the proposed scheme.